Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

В. Г. КОСТЕНКО, Н. В. ЄВСТАФ'ЄВА

ДЕЯКІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО ГРУП ПЕРЕТВОРЕНЬ

В роботі виділяються нелінійні рівняння виду

$$\Omega = \Delta u - \varphi(x, y) F(u) = 0, \tag{1}$$

які залишаються інваріантними відносно нескінченних неперервних груп перетворень.

Нехай

$$Uf = \xi(x, y, u)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, u)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, u)\frac{\partial f}{\partial u} - \tag{2}$$

довільний оператор, а

$$U''f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial u} + \alpha_1\frac{\partial f}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial f}{\partial q} + \beta_1\frac{\partial f}{\partial r} + \beta_2\frac{\partial f}{\partial s} + \beta_3\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{2a}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{d\zeta}{dx} - p\frac{d\xi}{dx} - q\frac{d\eta}{dx},$$

$$\alpha_2 = \frac{d\zeta}{dy} - p\frac{d\xi}{dy} - q\frac{d\eta}{dy},$$

$$\beta_1 = \frac{d\alpha_1}{dx} - r\frac{d\xi}{dx} - s\frac{d\eta}{dx},$$

$$\beta_2 = \frac{d\alpha_1}{dy} - r\frac{d\xi}{dy} - s\frac{d\eta}{dy} = \frac{d\alpha_2}{dx} - s\frac{d\xi}{dx} - t\frac{d\eta}{dx},$$

$$\beta_3 = \frac{d\alpha_2}{dy} - s\frac{d\xi}{dy} - t\frac{d\eta}{dy}, -$$

двічі продовжений оператор з оператора (2).

Як відомо [3], диференціальне рівняння (1) буде інваріантним відносно перетворень (2) тоді і тільки тоді, якщо

$$U''\Omega = 0 \tag{3}$$

на всіх інтегральних поверхнях рівняння (1).

Сукупність перетворень, яка залишає інваріантним диференціальне рівняння, завжди створює групу.

Використовуючи ознаку (3), при умові $\varphi(x, y) = 1$ одержимо для визначення коефіцієнтів перетворень (2) систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x},\ \frac{\partial\xi}{\partial u}=\frac{\partial\eta}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial u}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial u}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}=0, \tag{4}$$

$$\zeta\frac{dF}{du}-F(u)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}-2\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}.$$

Обмежимось в основному найбільш цікавим випадком нелінійних рівнянь (1), які будуть інваріантними відносно нескінченних неперервних груп перетворень.

Із системи рівнянь (4) випливає, що ξ і η повинні бути спряжено-гармонійними по x і y та незалежними від u функціями, а $\zeta=cu+\zeta_1(x, y)$ $(c=\text{const})$. Підставляючи це значення ζ в останнє рівняння системи (4) і враховуючи, що воно повинно бути тотожністю по u, одержимо нескінченну неперервну групу перетворень лише в єдиному випадку, коли $\frac{dF}{du}$ і $F(u)$ будуть лінійно залежними, а $u\frac{dF}{du}$ — від них лінійно незалежною функцією. При цьому $c=0$, а $\zeta_1(x, y)=-\frac{2}{k}\frac{\partial\xi}{\partial x}$.

Із лінійної залежності $F(u)$ і $\frac{dF}{du}$ випливає, що

$$F(u)=pe^{ku},$$

де p, k — довільні сталі.

Т е о р е м а 1. *Для того, щоб нелінійне рівняння $\Delta u=F(u)$ було інваріантним відносно нескінченної неперервної групи перетворень, необхідно і достатньо, щоб $F(u)=pe^{ku}$.*

Як показано в [2], рівняння $\Delta u=pe^{u}$ є автоморфним, тобто всі його розв'язки можуть бути одержані із будь-якого одного перетвореннями нескінченної неперервної групи з інфінітезимальними операторами

$$Uf=\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}-2\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u},$$

де $\xi(x, y)$ і $\eta(x, y)$ — довільні спряжено-гармонійні функції.

Рівняння $\Delta u=pe^{ku}$ перетворюється в рівняння $\Delta v=pke^{v}$ при $u=\frac{v}{k}$.

Якщо ж $\varphi(x, y)\neq\text{const}$, то підрахунками, аналогічними попереднім, одержимо систему (4) у вигляді

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\ \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x},\ \frac{\partial\xi}{\partial u}=\frac{\partial\eta}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial u}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial u}=\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}=0, \tag{4a}$$

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}F(u)+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}F(u)+\zeta\varphi\frac{dF}{du}+\varphi F(u)\left(2\,\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}.$$

Підставляючи $\zeta=cu+\zeta_1(x, y)$ в останнє рівняння (4а) і враховуючи, що воно повинно бути тотожністю по u, при умові лінійної незалежності $F(u)$, $\frac{dF}{du}$ і $u\frac{dF}{du}$ одержимо:

$$c=0,\ \zeta_1(x, y)=0,$$

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\varphi(x, y)=0. \tag{5}$$

В цьому випадку рівняння (1) не буде інваріантним відносно нескінченної неперервної групи перетворень, тому що $\varphi(x, y)$ повинна задовольняти (5) і, таким чином, буде виражатись через ξ і η.

Шукаючи частинний розв'язок останнього рівняння системи (5) у вигляді $\varphi=\Phi_1(\xi^2+\eta^2)$, одержимо $\varphi=\frac{k_1}{\xi^2+\eta^2}$, де k_1 — const.

Таким чином, диференціальне рівняння

$$\Delta u=\frac{F(u)}{\xi^2+\eta^2}, \tag{6}$$

де $F(u)$ — довільна функція від u, завжди допускатиме однопараметричну групу перетворень

$$U_1 f=\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y},$$

а також, як легко перевірити, групу

$$U_2 f=\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}-\eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial x},$$

комутативну першій.

Шукаючи загальний розв'язок останнього рівняння системи (5) у вигляді

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\Phi(x, y),$$

матимемо

$$\xi(x, y)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0.$$

Для знаходження інтегруючого множника $\mu(x, y)$ відповідного звичайного рівняння

$$\frac{dx}{\xi(x, y)}=\frac{dy}{\eta(x, y)}$$

знову одержимо рівняння

$$\xi(x, y)\frac{\partial\mu}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial\mu}{\partial y}+2\mu(x, y)\frac{\partial\xi}{\partial x}=0, \tag{5a}$$

а тому $\mu(x, y)=\frac{1}{\xi^2+\eta^2}$.

Таким чином, рівняння

$$\Delta u=\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\Phi\left[\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\eta(x, y)}{\xi^2(x, y)+\eta^2(x, y)}dx-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\xi(x_0, y)}{\xi^2(x_0, y)+\eta^2(x_0, y)}dy\right]F(u)$$

допускає однопараметричну групу перетворень

$$U_1 f=\xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Якщо $F(u)$ і $\frac{dF}{du}$ лінійно залежні, а $u\frac{dF}{du}$ — лінійно незалежна від них функція, то із останнього рівняння системи (4а) одержимо: $c=0$, $\Delta\zeta_1=0$,

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\zeta_1(x,y)\varphi(x,y)k+2\varphi(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial x}=0. \tag{6}$$

Шукаючи розв'язок рівняння (6) у вигляді $\varphi=\pm e^{\psi(x,y)}$, будемо мати:

$$\zeta_1(x,y)=-\frac{1}{k}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\psi}{\partial y}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right).$$

Але

$$\Delta\zeta_1=-\frac{1}{k}\Delta\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=-\frac{1}{k}\left[\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\right]=0,$$

що при позначенні $\Delta\psi=R(x, y)$ можна записати так:

$$\xi\frac{\partial R}{\partial x}+\eta\frac{\partial R}{\partial y}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}R=0. \tag{7}$$

У всіх випадках, коли функція $R(x, y)\neq0$, вона, а разом з нею і $\psi(x, y)$, буде виражатись через ξ і η. Це приводить до того, що відповідні рівняння (1) можуть бути інваріантними лише відносно конечнопараметричних груп перетворень. І лише тоді, коли $R(x, y)=0$, тобто $\psi(x, y)$ — довільна гармонійна функція, одержимо рівняння

$$\Delta u=\pm e^{\psi(x,y)}e^{ku}, \tag{8}$$

інваріантне відносно нескінченної неперервної групи перетворень з оператором

$$Uf=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{k}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\psi}{\partial y}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial u}, \tag{9}$$

де ξ і η — довільні спряжено-гармонійні функції.

Інші можливі випадки залежності між $F(u)$, $\frac{dF}{du}$ і $u\frac{dF}{du}$ не приводять до нескінченних неперервних груп перетворень, відносно яких рівняння виду (1) були б інваріантними.

Теорема 2. *Для того, щоб нелінійне рівняння (1) при $\varphi(x, y)\neq$ $\neq\text{const}$ було інваріантним відносно нескінченної неперервної групи перетворень, необхідно і достатньо, щоб*

$$\varphi(x,y)=\pm e^{\psi(x,y)} \text{ і } F(u)=e^{ku},$$

де $\psi(x, y)$ — довільна гармонійна функція, а k — довільна стала.

При цьому оператор нескінченної неперервної групи перетворень має вигляд (9).

Рівняння

$$\Delta u=e^{\psi(x,y)}e^{ku} \tag{1a}$$

заміною $u=\frac{v-\psi}{k}$ перетворюється в $\Delta v=ke^v$.

Як відомо [2], загальний розв'язок останнього автоморфного рівняння має вигляд

$$v(x, y) = -2\ln|f(z)| - 2\ln\ln|f(z)| + 2\ln|f'(z)| + \ln\frac{k}{2},$$

де $f(z)$ — довільна аналітична функція.

Звідси одержуємо, що рівняння (1а) також автоморфне і його загальний розв'язок є:

$$u(x, y) = -\frac{1}{k}\Big\{\psi(x, y) + 2\ln|f(z)| + 2\ln\ln|f(z)| -$$

$$- 2\ln|f'(z)| - \ln\frac{k}{2}\Big\}.$$

Аналогічно можна знайти загальний розв'язок для рівняння

$$\Delta u = -e^{\psi(x, y)}e^{ku}.$$

Зауваження. Гіпотеза І. Н. Векуа [1] про те, що для знаходження загального розв'язку рівняння

$$\Delta u = \varphi(x, y)e^{u}$$

достатньо знайти один його частинний розв'язок, тобто що останнє рівняння автоморфне (в термінології Вессіо), підтверджується з точки зору групових властивостей цього рівняння лише для випадку, коли $\varphi(x, y) = \pm|w(z)|$, де $w(z)$ — довільна аналітична функція комплексного змінного $z = x + iy$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Векуа І. Н. Замечания о свойствах решений уравнения $\Delta u = -2ke^{u}$. Сибирский математический журнал, т. I, № 3, 1960.
2. Костенко В. Г. Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних груповим методом. Вид. Львівського ун-ту, 1959
3. Lie S. Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen. Berichte Sachs. Ges., т. 43, 1891.