Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

З. О. МЕЛЬНИК

ОДНЕ ЗАУВАЖЕННЯ ДО МЕТОДУ ВІДОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В нашій попередній роботі [1] методом відображень розв'язувалась змішана задача для рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}+g^{\alpha}(x)\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}+g(x)u+f(x,t) \tag{1}$$

$$(\alpha=1,2,3);\ g^{\alpha\beta}(x)=g^{\alpha}(x);\ x^3\geqslant 0$$

при початкових умовах

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t-0}=\psi(x) \tag{2}$$

і граничній умові

$$u\big|_{x^3=0}=0, \tag{3}$$

де $x=(x^1,\ x^2,\ x^3)$; $g^{\alpha\beta}$, g , g, f, φ, ψ — деякі функції, які повинні задовольняти певні умови гладкості.

Продовжуючи відповідним чином коефіцієнти, вільний член і початкові функції задачі в півпростір $x^3<0$, ми досягали того, що умова (3) автоматично відпадала, оскільки одержаний за методом С. Л. Соболева для продовжених даних розв'язок задачі (1)—(2) перетворювався в нуль на площині $x^3=0$. Але для існування розв'язку задачі Коші необхідно на дані задачі накласти ряд умов неперервності. Коли ж ми продовжуємо задані функції в півпростір $x^3<0$, то при $x^3=0$ в коефіцієнтах рівняння і в деяких їх похідних появляються розриви першого роду. Щоб уникнути цього неприємного факту, нам довелось в роботі [1] накласти цілий ряд умов рівності нулю при $x^3=0$ коефіцієнтів рівняння і відповідних їхніх похідних, що значно звужує клас рівнянь, до яких застосовний метод відображень.

Виявляється, що в багатьох з цих умов можна легко позбутись шляхом простих перетворень.

В [1] нам приходилось припускати, що при $x^3=0$ виконуються умови:

$$g^{13}=g^{23}=g^{3}=0,$$

$$\frac{\partial g^{11}}{\partial x^3}=\frac{\partial g^{12}}{\partial x^3}=\frac{\partial g^{22}}{\partial x^3}=\frac{\partial g^{33}}{\partial x^3}=0.$$

Припустимо, що ці умови не виконані. Тоді в (1) зробимо заміну шуканої функції

$$u(x,\ t)=v(x,\ t)\cdot\Phi(x), \tag{4}$$

де $v(x,\ t)$ — нова шукана функція, $\Phi(x)$ — поки що довільна.

Задача (1)—(3) після цієї заміни перейде в таку:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}+\bar{g}^\alpha(x)\frac{\partial v}{\partial x^\alpha}+\bar{g}(x)v+\bar{f}(x,t), \tag{1a}$$

$$v|_{t=0}=\bar{\varphi}(x);\ \ v_t|_{t=0}=\bar{\psi}(x), \tag{2a}$$

$$v|_{x^3=0}=0, \tag{3a}$$

де

$$\bar{g}^\alpha(x)=\left(g^\alpha(x)\,\Phi(x)+2\,g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x^\beta}\right)\Phi^{-1}(x),$$

$$\bar{g}(x)=\left(g(x)\Phi(x)+g^\alpha(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}+g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\right)\Phi^{-1}(x),$$

$$\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)\Phi^{-1}(x),$$

$$\bar{\psi}(x)=\psi(x)\Phi^{-1}(x),$$

$$\bar{f}(x,t)=f(x)\Phi^{-1}(x).$$

Тоді в (1a) переходимо до нових змінних за формулами:

$$y^\alpha=y^\alpha(x)=\varphi^\alpha(\tilde{x})+x^3\psi^\alpha(\tilde{x})+(x^3)^2\chi^\alpha(\tilde{x}) \tag{5}$$
$$(\alpha=1,\,2,\,3),$$

де $\tilde{x}=(x^1,\,x^2)$, $\varphi^3(x)\equiv 0$ і якобіан

$$\frac{D\,(y^1,y^2,y^3)}{D\,(x^1,x^2,x^3)}\neq 0 \tag{6}$$

у всіх точках простору.

Очевидно, що після такої заміни задача (1a)—(3a) переходить у таку:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=p^{\alpha\beta}(y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}+p^\alpha(y)\frac{\partial v}{\partial y^\alpha}+p(y)v+f_1(y,t), \tag{1б}$$

$$v|_{t=0}=\varphi_1(y);\ \ v_t|_{t=0}=\psi_1(y), \tag{2б}$$

$$v|_{y^3=0}=0, \tag{3б}$$

де

$$p^{\alpha\beta}(y)=g^{ij}(x)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}, \tag{7}$$

$$p^\alpha(y)=\bar{g}^i(x)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}+g^{ij}(x)\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}, \tag{8}$$

$$p(y)=\bar{g}(x),\ f_1(y,t)=\bar{f}(x,t),\ \varphi_1(y)=\bar{\varphi}(x),\ \psi_1(y)=\bar{\psi}(x),$$

причому в правих частинах останніх рівностей на місце x^k треба поставити відповідні функції від y^l, знайдені з системи (5). Це завжди можливо в силу (6).

Підберемо функції φ^α, ψ^α, χ^α і Φ так, щоб при $y^3=0$ виконувались умови:

$$p^{13}(y)=p^{23}(y)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial p^{11}}{\partial y^3}=\frac{\partial p^{22}}{\partial y^3}=\frac{\partial p^{33}}{\partial y^3}=\frac{\partial p^{12}}{\partial y^3}=0, \tag{10}$$

$$p^3(y)=0. \tag{11}$$

При $y^3=0$ з (5) одержуємо:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^3}=\frac{g^{i3}}{g^{33}\psi^3} \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Отже, при $y^3=0$ маємо:

$$\frac{\partial}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial y^3}=\frac{g^{s3}}{g^{33}\psi^3}\frac{\partial}{\partial x^s} \quad (s=1,\ 2,\ 3). \tag{12}$$

Враховуючи, що при $y^3=0$, $x^3=0$, і в силу (12) можемо сказати: для того, щоб виконувались умови (9), (10), (11), досить, щоб функції φ^α, ψ^α, χ^α, Φ задовольняли при $x^3=0$ рівності:

$$g^{i3}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}+g^{33}\varphi^k=0 \quad (i, k=1,\ 2), \tag{13}$$

$$A^{ij}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^l}{\partial x^j}=0 \quad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2), \tag{14}$$

$$4\,g^{33}g^{i3}\frac{\partial\psi^3}{\partial x^i}+g^{r3}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^r}\psi^3+4(g^{33})^2\chi^3=0 \tag{15}$$

$$(i=1,\ 2;\quad r=1,\ 2,\ 3),$$

$$\bar{g}^3\psi^3+2g^{r3}\frac{\partial\psi^3}{\partial x^r}+2g^{33}\chi^3=0 \tag{16}$$

$$(r=1,\ 2),$$

де

$$A^{ij}=g^{r3}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^r}-g^{rj}\frac{\partial g^{i3}}{\partial x^r}-g^{ir}\frac{\partial g^{3j}}{\partial x^r}+$$

$$+\frac{g^{rj}g^{i3}g^{33}+g^{ir}g^{j3}g^{33}-g^{r3}g^{i3}g^{j3}}{(g^{33})^2}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^r} \quad (r=1,\ 2,\ 3).$$

Дійсно, простими підрахунками знаходимо:

$$p^3(y)|_{y^3=0}=\left[\bar{g}^3\psi^3+2g^{r3}\frac{\partial\psi^3}{\partial x^r}+2g^{33}\chi^3\right]_{x^3=0}(r=1,\ 2),$$

$$p^{k3}(y)|_{y^3=0}=\left[g^{i3}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}+g^{33}\psi^k\right]_{x^3=0} \quad (i,\ k=1,\ 2),$$

$$\left.\frac{\partial p^{kl}}{\partial y^3}\right|_{y^3=0}=\left[A^{ij}\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^l}{\partial x^j}\right]_{x^3=0} \quad (i,\ j,\ k,\ l=1,2),$$

звідки й випливає наше твердження.

Тоді з (15) одержуємо:

$$\chi^3(x)=-\frac{g^{i3}}{g^{33}}\frac{\partial\psi^3}{\partial x^i}-\frac{g^{r3}}{4(g^{33})^2}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^r}\psi^3 \tag{17}$$

$$(i=1,\ 2;\ r=1,\ 2,\ 3).$$

Помноживши (16) на $2g^{33}$ і віднявши від (15), одержимо:

$$\left(g^{r3}\frac{\partial g^{33}}{\partial x^r}-2\bar{g}^3 g^{33}\right)\psi^3=0 \quad (r=1,\ 2,\ 3).$$

Оскільки $\psi^3 \neq 0$, то, враховуючи вираз для $\bar{g}^3$, будемо мати:

$$g^3\,\Phi+2g^{3i}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}=\frac{g^{r3}}{2\,g^{33}}\,\frac{\partial\,g^{33}}{\partial x^r}\,\Phi \quad (i=1,\ 2;\ r=1,\ 2,\ 3). \tag{18}$$

З (13) випливає:

$$\psi^k=-\frac{g^{i3}}{g^{33}}\,\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^i} \quad (i=1{,}2). \tag{19}$$

За $\varphi^1(x)$ і $\varphi^2(x)$ приймемо два лінійно незалежні розв'язки рівняння:

$$A^{ij}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}=0. \tag{20}$$

$\psi^3(x)$ будемо вважати довільною функцією, не рівною нулю в жодній точці простору.

Отже, має місце теорема: якщо при довільній функції $\varphi^3 \neq 0$ функція χ^3 виражається за формулою (17), функція Φ є довільним розв'язком рівняння (18), функції φ^k $(k=1,2)$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (20) і функції ψ^k $(k=1,2)$ виражаються з формул (19), то після заміни шуканої функції за формулою (4) і заміни змінних за формулами (5) рівняння (1) переходить в (16), в якому виконуються всі умови (9), (10) і (11), за винятком рівності

$$\frac{\partial p^{12}}{\partial y^3}=0 \quad \text{при } y^3=0.$$

Крім того, легко показати, що можна так підібрати функції χ^1 і χ^2, що при $y^3=0$ будуть виконуватись умови

$$\frac{\partial p^{13}}{\partial y^3}=\frac{\partial p^{23}}{\partial y^3}=0.$$

Отже, шляхом наведених перетворень не можна задовольнити тільки останню умову в (10).

ЛІТЕРАТУРА

1. Мельник З. О. Змішана задача для деяких рівнянь гіперболічного типу. Зб. робіт аспірантів каф. природничих наук. Вид. Львівського ун-ту, 1960.