О. М. ШАБЛІЙ

ПРО НЕСУЧУ ЗДАТНІСТЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ, ПІДКРІПЛЕНОЇ КІЛЬЦЕВИМ РЕБРОМ

Кругла пластинка товщиною $2h$ і радіусом R шарнірно сперта на контурі, а на довільному радіусі R_1 підсилена концентричним ребром. Пластинка навантажена рівномірно розподіленим навантаженням, яке є функцією часу $p(t)$. Потрібно визначити несучу здатність q такої конструкції.

За умову пластичності приймемо шестикутник Треска. Матеріал пластинки і ребра жорстко пластичний.

Динамічне рівняння рівноваги елемента пластинки має вигляд:

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = -\int_0^r \left[p(t) - \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right] r dr, \tag{1}$$

де M_r, M_θ — радіальний і коловий згинаючі моменти, віднесені до одиниці довжини;

w — прогин серединної площини пластинки;

μ — густина матеріалу пластинки.

Рівняння руху елемента тонкого ребра під дією рівномірно розподіленого моменту m_* буде:

$$H_* + m_* R_1 - \mu_k I \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

де H_* — граничний внутрішній згинаючий момент, який дорівнює граничному зовнішньому моменту з оберненим знаком $|H_* = -H|$;

m_* — інтенсивність реактивного моменту, який діє з боку пластинки на ребро ($m_* = m$, m — інтенсивність реактивного моменту, який діє з боку ребра на пластинку);

$\mu_k I$ — момент інерції поперечного перетину кільця;

γ — кут повороту кільця.

Нехай навантаження, яке діє на пластинку, перевищує несучу здатність на невелику величину $\varepsilon \geqslant 0$.

Після аналізу пластичного стану пластинки [1, 2] і ребра приходимо до висновку, що поле швидкостей у пластинці має такий вигляд:

а) $\frac{\partial w}{\partial t} = C_1 r + C_2; \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho,$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C_3 + C_4 \ln r, \quad \rho \leqslant r \leqslant R_1,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = C_5 r + C_6, \quad R_1 \leqslant r \leqslant R,$$

коли

$$\frac{m}{M_0} \geqslant \frac{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}; \tag{4}$$

б) $$\frac{\partial w}{\partial t} = C_1^* r + C_2^*, \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \tag{5}$$

коли

$$\frac{m}{M_0} \leqslant \frac{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}, \tag{6}$$

де $M_0 = \sigma_0 h^2$ — граничний момент пластинки;
$C_1, \ldots C_6, C_1^*, C_2^*$ — довільні функції часу, які визначаються з граничних і початкових умов.

У випадку а) будуть мати місце граничні умови [3, 4]:

при $r = R$: $$M_r = 0, \ \frac{\partial w}{\partial t} = 0; \tag{7}$$

при $r = R_1$: $$M_r - M_{r2} = m,$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}; \ \frac{\partial^2 w_2}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t}; \tag{8}$$

при $r = \varrho$: $$M_{r1} = M_{r2} = 0,$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial t}; \ \frac{\partial^2 w_1}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial r \partial t}; \tag{9}$$

при $r = 0$: $$M_{r1} = M_{\Theta 1} = M_0. \tag{10}$$

Числові індекси «1» або «2» означають, що дана величина береться відповідно в проміжку $0 \leqslant r \leqslant \rho$ або $\rho \leqslant r \leqslant R_1$. Величина без індекса береться в проміжку $R_1 < r < R$.

У випадку б) граничні умови (9) відпадають, а в умовах (8) індекс «2» заміниться на «1».

Граничні умови (7) і (10) мають місце без змін.

Початкові умови:

$$w(r, 0) = 0, \frac{\partial w(r, 0)}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

Проінтегрувавши рівняння (1) за допомогою (3), (5) та граничних і початкових умов, одержимо вирази для моментів і швидкостей як функції r і t.

Якщо навантаження не перевищує несучої здатності, то поле швидкостей нульове. На основі цього одержуємо такі вирази для несучої здатності:

У випадку а):

$$q = \frac{6 M_0}{\rho^2}, \tag{12}$$

де ρ визначається з трансцедентного рівняння

$$2R_1 m + \frac{M_0}{\rho^2}(3\rho^2 R_1 - 2R^3 - R_1^3) - 2M_0\left(R_1 - R - R_1 \ln\frac{R_1}{\rho}\right) = 0; \tag{13}$$

у випадку б):

$$\frac{q}{p_0} = 1 + \frac{m}{M_0}\,\frac{R_1}{R}, \tag{14}$$

де $p_0 = \frac{6\,M_0}{R^2}$ — несуча здатність шарнірно спертої пластинки без підкріплення.

При збільшенні значення $\frac{m}{M_0}$ при певному $\frac{R_1}{R}$ несуча здатність конструкції пластинка-ребро збільшиться лише до якоїсь границі, яка обумовлена появою пластичного шарніра в пластинці біля ребра з його внутрішньої або зовнішньої сторони.

Через це формули (12), (13) вірні для:

$$\frac{m}{M_0} \leqslant \frac{3}{2}\,\frac{\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^3} - \ln\sqrt{\frac{\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^3} - \frac{1}{2}}, \text{ коли } 0{,}755 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 0{,}85, \tag{15}$$

і

$$\frac{m}{M_0} \leqslant 2 - \frac{R}{R_1} + 1{,}877\left[\left(\frac{R}{R_1}\right)^3 - 1\right], \quad \text{коли } 0{,}85 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 1. \tag{16}$$

Формула (14) вірна для

$$\frac{m}{M_0} \leqslant \frac{\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}, \text{ коли } 0 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 0{,}755. \tag{17}$$

Коли не виконується нерівність (15) у випадку а) і нерівність (17) у випадку б), несуча здатність визначається за формулою

$$\frac{q}{p_0} = \frac{1}{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^3}; \quad 0 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 0{,}85. \tag{18}$$

Якщо ж не виконується (16) — за формулою

$$\frac{q}{p_0} = \frac{1{,}877}{\left(\frac{R_1}{R}\right)^2}; \quad 0{,}85 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 1. \tag{19}$$

Як показують підрахунки, несуча здатність пластинки за допомогою ребра може бути збільшена більш як у два рази.

У наведених вище формулах величина m може бути граничним моментом не тільки тонких, але й середніх і високих ребер.

Одержані формули можуть бути застосовані для обчислення несучої здатності таких конструкцій, особливо з матеріалів, близьких до жорстко пластичних.

Ефективність постановки ребер буде доведена тоді, коли ми покажемо, що вага пластинки з ребром буде менша, ніж вага пластинки без ребра, яка має з нею однакову несучу здатність і радіус.

Мета цієї роботи — показати ефективність застосування тонких ребер для підкріплення круглих пластин.

Коли висота ребра $2h_к$, то тонким, за Соколовим [6], вважається ребро, параметри якого задовольняють умову

$$h_k \leqslant 0{,}39\sqrt{R_1 a}. \tag{20}$$

Граничний реактивний момент тонкого ребра визначається за формулою

$$m = \nu M_0 = \frac{a(h^2{}_k - h^2)\,\sigma'_0}{R_1}, \tag{21}$$

де a — ширина ребра, $\sigma_0{}^1$ — напруження текучості матеріалу ребра, $\nu = \frac{m}{M_0}$.

Будемо вважати матеріал пластинки і ребра однаковим.

Якщо позначити через N_1 вагу пластинки без ребра, радіус і несуча здатність якої дорівнюють відповідним величинам для пластинки з ребром, а через N_2 — вагу пластинки з ребром, то

$$\lambda = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left\{1 - \frac{k^2 + k\sqrt{k^2 + 0{,}6084\,\nu b^2}}{0{,}1521} - \right.$$

$$- \frac{k^4 + 2k^3\sqrt{k^2 + 0{,}6084\,\nu b^2} + k^2\,(k^2 + 0{,}6084\,\nu b^2)}{0{,}09254\,b^2} +$$

$$\left. + 4{,}6496\left(k^{\frac{4}{3}} + k^{\frac{1}{3}}\sqrt{k^2 + 0{,}6084\nu b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}, \tag{22}$$

де

$$\delta = \frac{q}{p_0}, \quad k = \frac{h}{R}, \quad b = \frac{R_1}{R}.$$

Тоді економія матеріалу визначається за формулою

$$\Delta = 1 - \lambda. \tag{23}$$

Будемо обчислювати економію матеріалу в проміжку $0 \leqslant \frac{R_1}{R} < 1$, міняючи ν по кривій, яка визначається рівностями (17), (15) і (16), а коефіцієнт несучої здатності δ відповідно за формулами (18) і (19).

Підрахунки показують, що підкріплення тонших пластинок більш економне.

З точки зору несучої здатності і економії матеріалу найвигіднішим буде ребро, розміщене в проміжку $0{,}755 \leqslant \frac{R_1}{R} \leqslant 0{,}85$, коли значення $\nu = \frac{m}{M_0}$ визначається за рівністю (15).

Результати підрахунку економії матеріалу для двох випадків наведені в таблиці.

b	k	ν	δ	Δ
0,8	0,02	1,33	2,05	8%
0,85	0,01	2,00	2,60	15%

ЛІТЕРАТУРА

1. Венцковский Б. К. Несущая способность круглых и кольцевых пластинок, подкрепленных кольцевыми ребрами. Сборник «Расчеты на прочность» № 6, 1960.
2. Гопкинс и Прагер В. Динамика пластической круглой пластинки. Сборник «Механика» № 3, 1955.
3. Прагер В. Проблемы теории пластичности. ГИФМ, 1958.
4. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Инженерный сборник, т. VIII, 1950.
5. Соколов С. Н. Изгиб круглых и кольцевых пластинок, подкрепленных кольцевыми ребрами. Сборник «Расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и колебания». Машгиз, 1955.
6. Флейшман Н. П. Пружна рівновага плити з ребрами жорсткості змінної кривизни. Наукові записки ЛДУ ім. Ів. Франка, т. 44, вип. 8, 1957.