

Ю. И. КОЙФМАН

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ, КРАЙ КОТОРОЙ ПОДКРЕПЛЕН ТОНКИМ СТЕРЖНЕМ

Предположим, что материал пластинки эластичен (некоторые виды пластмасс, каучук и т. д.), а подкрепляющее кольцо сделано из более жесткого материала. В этом случае упругое равновесие пластинки будет описываться уравнениями нелинейной теории упругости [2], [6], [7], а упругое равновесие кольца — уравнениями теории деформаций тонких криволинейных стержней [1], [4].

Система нелинейных дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости интегрируется посредством представления решения в виде ряда по параметру ε [6].

Первое приближение дает известные соотношения линейной теории. Формулы для членов второго порядка приведены в работе [7].

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим пластинку, край которой подкреплен тонким кольцом. Подкрепляющее кольцо примем за упругую линию, работающую на растяжение и изгиб. Эта задача в линейной постановке была решена М. П. Шереметьевым [4].

Систему координат $(z, \bar{z})$ выберем в деформированном теле (переход к координатам $(\eta, \bar{\eta})$ недеформированного тела осуществляется обычным образом) и поместим начало координат внутри пластинки, если она сплошная, или внутри отверстия, если пластинка ослаблена отверстием.

На контуре соприкосновения пластинки и кольца должны выполняться такие условия:

$$D = D_0; \int_0^s (X_n + iY_n) ds = \int_0^s (X_{n,0} + iY_{n,0}) ds + c_1, \quad (1)$$

где $D = u + iv$, X_n, Y_n ; $D_0 = u_0 + iv_0$, $X_{n,0}, Y_{n,0}$ — комплексное смещение и компоненты напряжения соответственно для пластинки и кольца.

Напряженное состояние подкрепляющего кольца характеризуется изгибающим моментом M , нормальной силой N_1 , перерезывающей силой N_2 , которые определяются из уравнений статики для элемента оси кольца [1], [4]. Закон Гука для кольца выберем в таком виде:

$$\beta = \frac{N_1}{g_1} + \frac{M}{\rho g_1}; \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{g_2} + \frac{M}{\rho^2 g_1} + \frac{N_1}{\rho g_1}, \quad (2)$$

где β — относительное удлинение элемента оси кольца, отнесенное к деформированному или недеформированному состоянию, Θ — угол поворота, ρ — радиус кривизны оси стержня, g_1, g_2 — жесткости на растяжение и изгиб.

Комплексное смещение для кольца выражается следующим образом [4]:

$$D_0 = \int_0^s e^{i\alpha} (i\beta - \Theta) ds. \quad (3)$$

Предположим, что проекции усилий $X_n, Y_n, X_{n,0}, Y_{n,0}$ для пластинки и кольца можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} X_n + i Y_n &= 2^0 H \varepsilon [(X_n^{(1)} + i Y_n^{(1)}) + \varepsilon (X_n^{(2)} + i Y_n^{(2)}) + \dots]; \\ X_{n,0} + i Y_{n,0} &= 2^0 H \varepsilon [(X_{n,0}^{(1)} + i Y_{n,0}^{(1)}) + \varepsilon (X_{n,0}^{(2)} + i Y_{n,0}^{(2)}) + \dots]. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда из формул (2), (3), (4) получим:

$$D_0 = 2^0 H \varepsilon [D_0^{(1)} + \varepsilon D_0^{(2)} + \dots], \quad (5)$$

где

$$D_0^{(1)} = \int_0^s e^{i\alpha} (i\beta^{(1)} - \Theta^{(1)}) ds; \quad D_0^{(2)} = \int_0^s e^{i\alpha} (i\beta^{(2)} - \Theta^{(2)}) ds.$$

Так как $D = \varepsilon D^{(1)} + \varepsilon^2 D^{(2)} + \dots$ [2], то, учитывая формулы (4), (5), (1), запишем граничные условия для второго приближения следующим образом:

$$D^{(2)} = 2^0 H D_0^{(2)}; \quad \int_0^s (X_n^{(2)} + i Y_n^{(2)}) ds = \int_0^s (X_{n,0}^{(2)} + i Y_{n,0}^{(2)}) ds. \quad (6)$$

Выражая левые части соотношений (6) по известным формулам [7] через потенциалы второго порядка $\varphi_{(Z)}^{(2)}, \psi_{(Z)}^{(2)}$, получим следующие граничные условия для этих функций:

$$\varphi^{(2)}(t) + t \bar{\varphi}^{(2)}(\bar{t}) + \bar{\psi}^{(2)}(\bar{t}) - F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = i \int_0^s (X_{n,0}^{(2)} + i Y_{n,0}^{(2)}) ds; \quad (7)$$

$$k \varphi^{(2)}(t) - t \bar{\varphi}^{(2)}(\bar{t}) - \bar{\psi}^{(2)}(\bar{t}) - F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = 2^0 H \int_0^s e^{i\alpha} (i\beta^{(2)} - \Theta^{(2)}) ds,$$

где

$$\begin{aligned} F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) &= \gamma [(t \bar{\Phi}^{(1)}(\bar{t}) + \bar{\Psi}^{(1)}(\bar{t})) \bar{D}^{(1)} + \\ &+ (\delta \bar{\Phi}^{(1)}(\bar{t}) + \Phi^{(1)}(t) D^{(1)})] - k_3 t [\bar{\Phi}^{(1)}(\bar{t})]^2; \\ F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) &= -\gamma [(t \bar{\Phi}^{(1)}(\bar{t}) + \bar{\Psi}^{(1)}(\bar{t})) \bar{D}^{(1)} + (\delta \bar{\Phi}^{(1)}(\bar{t}) - k \Phi^{(1)}(t)) D^{(1)}] - \\ &- k'_1 \int \bar{\Phi}^{(1)}(\bar{t}) \bar{\Psi}^{(1)}(\bar{t}) d\bar{t} - k'_2 \int [\Phi^{(1)}(t)]^2 dt - k'_3 t [\bar{\Phi}^{(1)}(\bar{t})]^2. \end{aligned}$$

$\Phi_{(Z)}^{(1)}, \Psi_{(Z)}^{(1)}$ — потенциалы в линейной теории; постоянные, входящие в функции F, F_1 , определены в работе [7].

В случае решения задачи в координатах $(\eta, \bar{\eta})$ недеформированного тела необходимо заменить в функциях $F(t, \bar{t}, \gamma, \sigma)$ и $F_1(t, \bar{t}, \gamma, \sigma)$ γ, δ на $\gamma^1 = \gamma - 1, \delta^1 = 1 - B_3/k(\gamma - 1)$ [6].

РАСТЯЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Потенциалы первого порядка в данном случае имеют такой вид:

$$\varphi_{(Z)}^{(1)} = \Gamma^{(1)} Z + a_1^{(1)} \frac{R^2}{Z}; \quad \psi_{(Z)}^{(1)} = \Gamma'^{(1)} + b_1^{(1)} \frac{R^2}{Z} + b_3^{(1)} \frac{R^4}{Z^3}. \quad (8)$$

Из формул (7), (8) следует:

$$F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = \sum_{n=-2}^2 B'_{2n+1} e^{(2n+1)i\theta}; \quad F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = \sum_{n=-2}^2 E'_{2n+1} e^{(2n+1)i\theta}; \quad (9)$$

Разложим проекции усилий $X_{n,0}^{(2)} + iY_{n,0}^{(2)}$ в ряды Фурье:

$$X_{n,0}^{(2)} + iY_{n,0}^{(2)} = (\alpha_0^{(2)} + i\gamma_0^{(2)}) + \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n^{(2)} + i\gamma_n^{(2)}) \sigma^n + (\bar{\alpha}_n^{(2)} + i\bar{\gamma}_n^{(2)}) \sigma^{-n}]. \quad (10)$$

Используя равенство нулю главного вектора и главного момента усилий, передаваемых на пластинку со стороны кольца, а также симметричность $X_{n,0}^{(2)}, Y_{n,0}^{(2)}$ относительно осей координат, получим:

$$\alpha_0^{(2)} = \gamma_0^{(2)} = \alpha_{2n}^{(2)} = \gamma_{2n}^{(2)} = 0; \quad \alpha_{2n+1}^{(2)} = \bar{\alpha}_{2n+1}^{(2)}; \quad \gamma_{2n+1}^{(2)} = -\bar{\gamma}_{2n+1}^{(2)}. \quad (11)$$

Из условия однозначности угла поворота Θ при обходе вдоль контура и условия однозначности смещений для кольца, учитывая формулы (10), аналогично [4] получим:

$$\begin{aligned} M^{(2)} &= \frac{R^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_{2n}^{(2)} \sigma^{2n} + \bar{\omega}_{2n}^{(2)} \sigma^{-2n}) - \frac{R^2 g_2 (\bar{\alpha}_1^{(2)} - i\bar{\gamma}_1^{(2)})}{g_2 + R^2 g_1}; \\ N_1^{(2)} &= -\frac{R}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{2n}^{(2)} \sigma^{2n} + \bar{\delta}_{2n}^{(2)} \sigma^{-2n}) + R (\bar{\alpha}_1^{(2)} - i\bar{\gamma}_1^{(2)}); \\ \beta^{(2)} &= -\sum_{n=1}^{\infty} (m_{2n}^{(2)} \sigma^{2n} + \bar{m}_{2n}^{(2)} \sigma^{-2n}) + \frac{R^3 (\bar{\alpha}_1^{(2)} - i\bar{\gamma}_1^{(2)})}{g_2 + R^2 g_1}; \\ \Theta^{(2)} &= i \sum_{n=1}^{\infty} (l_{2n}^{(2)} \sigma^{2n} - \bar{l}_{2n}^{(2)} \sigma^{-2n}), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{2n}^{(2)} &= \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{2n-1} (\alpha_{2n-1}^{(2)} - i\gamma_{2n-1}^{(2)}) + \frac{1}{2n+1} (\alpha_{2n+1}^{(2)} + i\gamma_{2n+1}^{(2)}) \right]; \\ \delta_{2n}^{(2)} &= \frac{1}{2n-1} (\alpha_{2n-1}^{(2)} - i\gamma_{2n-1}^{(2)}) - \frac{1}{2n+1} (\alpha_{2n+1}^{(2)} + i\gamma_{2n+1}^{(2)}); \end{aligned}$$

$$m_{2n}^{(2)} = \frac{R}{4ng_1} [(\alpha_{2n-1}^{(2)} - i\gamma_{2n-1}^{(2)}) - (\alpha_{2n+1}^{(2)} + i\gamma_{2n+1}^{(2)})];$$

$$l_{2n}^{(2)} = \frac{1}{2n} \left(m_{2n}^{(2)} - \frac{R^3}{2g_2} \omega_{2n}^{(2)} \right).$$

Учитывая условие однозначности смещений для пластинки [7], потенциалы второго порядка будем искать в таком виде:

$$\varphi_{(z)}^{(2)} = \Gamma_z^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} \frac{R^{n+1}}{z^n}; \quad \psi_{(z)}^{(2)} = \Gamma'_z^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(2)} \frac{R^{n+1}}{z^n}. \quad (13)$$

Подставим соотношения (9), (10), (12), (13) в граничные условия (7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях σ :

$$\begin{aligned} 2R\Gamma^{(2)} + \bar{b}_1^{(2)} - B'_1 &= R(\alpha_1^{(2)} + i\gamma_1^{(2)}); \\ R\Gamma'^{(2)} + a_1^{(2)} - B'_{-1} &= -R(\bar{\alpha}_1^{(2)} + i\bar{\gamma}_1^{(2)}); \\ -(2n-1)\bar{a}_{2n-1}^{(2)} + \bar{b}_{2n+1}^{(2)} - B'_{2n+1} &= \frac{R}{2n+1}(\alpha_{2n+1}^{(2)} + i\gamma_{2n+1}^{(2)}); \\ a_{2n+1}^{(2)} - B'_{-(2n+1)} &= -\frac{R}{2n+1}(\bar{\alpha}_{2n+1}^{(2)} + i\bar{\gamma}_{2n+1}^{(2)}); \\ (k-1)R\Gamma^{(2)} - \bar{b}_1^{(2)} - E'_1 &= 2^0 HR \frac{R^2}{g_2 + R^2 g_1} (\bar{\alpha}_1^{(2)} - i\bar{\gamma}_1^{(2)}); \\ -R\Gamma'^{(2)} + ka_1^{(2)} - E'_{-1} &= 2^0 HR m^{(2)} - \bar{l}_2^{(2)}] \times \\ \times (2n-1)\bar{a}_{2n-1}^{(2)} - \bar{b}_{2n+1}^{(2)} - E'_{2n+1} &= -2^0 HR \frac{m_{2n}^{(2)} + l_{2n}^{(2)}}{2n+1}; \\ ka_{2n+1}^{(2)} - E'_{-(2n+1)} &= -2^0 HR \left[\frac{l_{2n+2}^{(2)} - m_{2n+2}^{(2)}}{2n+1} + 2^0 H \lambda_{-(2n+1)} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из формул (14), учитывая соотношения (11), найдем:

$$a_{2n}^{(2)} = b_{2n}^{(2)} = 0; \quad a_{2n-1}^{(2)} = \bar{a}_{2n-1}^{(2)}; \quad b_{2n-1}^{(2)} = \bar{b}_{2n-1}^{(2)}. \quad (16)$$

Исключая в формулах (14) — (15) неизвестные правые части, получим систему уравнений для определения коэффициентов функций, из которой находим:

$$\begin{aligned} \varphi_{(z)}^{(2)} &= \Gamma_z^{(2)} + a_1^{(2)} \frac{R^2}{z} + a_3^{(2)} \frac{R^4}{z^3}; \quad \psi_{(z)}^{(2)} = \Gamma'_z^{(2)} + b_1^{(2)} \frac{R^2}{z} + \\ &+ b_3^{(2)} \frac{R^4}{z^3} + b_5^{(2)} \frac{R^6}{z^5}, \end{aligned} \quad (17)$$

где:

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= \frac{1}{L} \left\{ 4^0 H^2 R^4 (B'_{-1} - \Gamma'^{(2)}) + 12 g_1 g_2 (\Gamma'^{(2)} + E'_{-1}) + \right. \\ &+ 3^0 HR (3 g_2 - R^2 g_1) \left(\frac{2}{3} \Gamma'^{(2)} + B'_3 + E'_3 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + {}^0HR [3B'_{-1} (R^2 g_1 + g_2) + E'_{-1} (9g_2 + R^2 g_1)]; \\
a_3^{(2)} = & \frac{1}{L_1} \left\{ 3[80g_1g_2 + {}^0HR (25g_2 + R^2 g_1)] E'_{-3} + \right. \\
& + {}^0HR [5(9g_2 + R^2 g_1) + 4{}^0HR^3] B'_{-3} - \\
& \left. - 5{}^0HR (R^2 g_1 - 15g_2) (B'_5 + E'_5) \right\}; \\
b_1^{(2)} = & \frac{1}{2{}^0HR^3 + R^2 g_1 + g_2} \left\{ 2{}^0HR^3 (B'_1 - 2\Gamma^{(2)}) + \right. \\
& \left. + (R^2 g_1 + g_2) [(k-1)\Gamma^{(2)} - E'_1] \right\}; \\
b_3^{(2)} = & \frac{1}{L} \left\{ 12g_1g_2 [\Gamma^{(2)} + E'_{-1} - kE'_3] + \right. \\
& + 4{}^0H^2R^4 (B'_{-1} + B'_3 - \Gamma^{(2)}) + {}^0HR [(3g_2 - R^2 g_1) (kB'_{-1} + 3B'_{-3}) + \\
& + 3B'_{-1} (R^2 g_1 + g_2) + kB'_{-3} (9g_2 + R^2 g_1) + \\
& + 2E'_{-1} (3g_2 - R^2 g_1) - \\
& \left. - (R^2 g_1 - g_2) [6E'_3 - (k-1)\Gamma^{(2)}] \right\}; \\
b_5^{(2)} = & \frac{1}{L_1} \left\{ 4{}^0H^2R^4 (3B'_3 + B'_5) + 15{}^0HRg_2 (3+k) (3B'_3 + 5B'_5) + \right. \\
& + 3{}^0HR^3g_1 (5-k) (B'_{-3} - B'_5) - 20E'_5 \times \\
& \left. \times [12kg_1g_2 + {}^0HR (R^2 g_1 - g_2)] \right\}; \\
L = & 4{}^0H^2R^4 + 12kg_1g_2 + {}^0HR^3 (k+3)g_1 + 3{}^0HR (3k+1)g_2; \\
L_1 = & 4{}^0H^2R^4 + 240kg_1g_2 + {}^0HR^3 (3k+5)g_1 + 15{}^0HR (5k+3)g_2; \\
B'_5 = & \gamma [(2a_1^{(1)} - 3b_3^{(1)}) (ka_1^{(1)} - \Gamma^{(1)}) + \delta a_1^{(1)} (b_3^{(1)} - a_1^{(1)})] - k_3 a_1^{(1)2}; \\
B'_3 = & \gamma \{ b_1^{(1)} (\Gamma^{(1)} - ka_1^{(1)}) - (2a_1^{(1)} - \delta a_1^{(1)} - 3b_3^{(1)}) [\Gamma^{(1)} (1-k) + b_1^{(1)}] + \\
& + \Gamma^{(1)} (1+\delta) (a_1^{(1)} - b_3^{(1)}) \} - 2k_3 a_1^{(1)} \Gamma^{(1)}; \\
B'_1 = & \gamma \{ (ka_1^{(1)} - \Gamma^{(1)}) (\Gamma^{(1)} - \delta a_1^{(1)}) + [\Gamma^{(1)} (k-1) - \\
& - b_1^{(1)}] [\Gamma^{(1)} (1+\delta) - b_1^{(1)}] + (a_1^{(1)} - 3b_3^{(1)}) (a_1^{(1)} - b_3^{(1)}) \} - k_3 \Gamma^{(1)2}; \\
B'_{-1} = & \gamma \{ (\Gamma^{(1)} - a_1^{(1)}) [\Gamma^{(1)} (k-1) - b_1^{(1)}] - b_1^{(1)} (a_1^{(1)} - b_3^{(1)}) + \\
& + \Gamma^{(1)} (ka_1^{(1)} - \Gamma^{(1)}) (1+\delta) \}; \\
B'_{-3} = & \gamma [\Gamma^{(1)} (a_1^{(1)} - b_3^{(1)}) - a_1^{(1)} (ka_1^{(1)} - \Gamma^{(1)})]; \\
E'_5 = & \gamma [(2a_1^{(1)} - 3b_3^{(1)}) (\Gamma^{(1)} - ka_1^{(1)}) - \delta a_1^{(1)} (b_3^{(1)} - a_1^{(1)})] - \\
& - k'_3 a_1^{(1)2} + \frac{3}{5} k'_1 a_1^{(1)} b_3^{(1)}; \\
E'_3 = & \gamma \{ b_1^{(1)} (ka_1^{(1)} - \Gamma^{(1)}) - (2a_1^{(1)} - \delta a_1^{(1)} - 3b_3^{(1)}) [\Gamma^{(1)} (k-1) - \\
& - b_1^{(1)}] + \Gamma^{(1)} (k-\delta) (a_1^{(1)} - b_3^{(1)}) \} + 2k'_3 a_1^{(1)} \Gamma^{(1)} - \frac{1}{3} k'_1 (3\Gamma^{(1)} b_3^{(1)} - a_1^{(1)} b_1^{(1)});
\end{aligned}
\tag{18}$$

$$\begin{aligned}
E'_1 &= \gamma \{ (ka_1^{(1)} - \Gamma^{(1)}) (\delta a_1^{(1)} - \Gamma'^{(1)}) + [\Gamma^{(1)} (k-1) - b_1^{(1)}] [\Gamma^{(1)} (k-\delta) + b_1^{(1)}] - \\
&- (2a_1^{(1)} - 3b_3^{(1)} - ka_1^{(1)}) (a_1^{(1)} - b_3^{(1)}) \} - \Gamma^{(1)2} (k'_3 + k'_2) - k'_1 (\Gamma^{(1)} b_1^{(1)} + \Gamma'^{(1)} a_1^{(1)}); \\
E'_{-1} &= \gamma \{ (\Gamma'^{(1)} + ka_1^{(1)}) [(1-k) \Gamma^{(1)} + b_1^{(1)}] + \Gamma^{(1)} (k-\delta) (ka_1^{(1)} - \Gamma'^{(1)}) + \\
&+ b_1^{(1)} (a_1^{(1)} - b_3^{(1)}) \} - k'_1 \Gamma^{(1)} \Gamma'^{(1)} - 2k'_2 a_1^{(1)} \Gamma^{(1)}; \\
E'_{-3} &= \gamma [\Gamma'^{(1)} (b_3^{(1)} - a_1^{(1)}) - ka_1^{(1)} (ka_1^{(1)} - \Gamma^{(1)})] + \frac{k'_2}{3} a_1^{(1)2}.
\end{aligned}$$

Для тонких колец можно пренебречь влиянием жесткости на изгиб ($g_2 = 0$) [4], [3].

Зная потенциалы первого и второго порядков, можно определить напряжения по формулам, приведенным в работе [7].

Следует заметить, что в выражения коэффициентов функций входят три новые упругие постоянные:

$$c_2 = -\frac{2}{\mu} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial J_1 \partial J_2} \right]_0; \quad c_3 = -\frac{2}{\mu} \left[\frac{\partial \omega}{\partial J_3} \right]_0; \quad c_4 = -\frac{2}{\mu} \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial J_1^3} \right]_0,$$

где ω — функция удельной энергии деформации для изотропного материала; J_1, J_2, J_3 — инварианты деформаций.

Эти постоянные должны быть определены для соответствующих материалов экспериментальным путем.

При решении задачи в случае, когда отверстие имеет произвольную форму, для определения потенциалов первого и второго порядков можно воспользоваться методом малого параметра [5].

Отобразим нашу область на плоскость (ζ) с круговым отверстием с помощью функции $Z = \omega(\zeta, m)$, где $\omega(\zeta, m)$ — любая рациональная функция, аналитически зависящая от малого параметра m . Так как функции $\varphi^{(1)}[\omega(\zeta, m)]$, $\psi^{(1)}[\omega(\zeta, m)]$ также зависят от этого параметра, то будем искать их в таком виде:

$$\varphi_1^{(1)}(\zeta, m) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n \varphi_n^{(1)}(\zeta); \quad \psi_1^{(1)}(\zeta, m) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n \psi_n^{(1)}(\zeta), \quad (19)$$

где $\varphi_n^{(1)}(\zeta)$, $\psi_n^{(1)}(\zeta)$ — функции, аналитические в области, включая границу.

Подставляя формулы (19) в граничные условия и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях m , а затем σ , и исключая неизвестные правые части, получаем бесконечные системы уравнений относительно коэффициентов функций $\varphi_n^{(1)}(\zeta)$, $\psi_n^{(1)}(\zeta)$.

Нетрудно убедиться в том, что каждая из этих бесконечных систем в свою очередь разделяется на $n+1$ систему двух уравнений с двумя неизвестными, из которых легко определяются искомые коэффициенты. Таким образом, функции $\varphi_n^{(1)}(\zeta)$, $\psi_n^{(1)}(\zeta)$ выражаются в замкнутом виде (при конечном n).

Ограничиваясь, например, $n=2$, определим потенциалы первого порядка, а затем таким же образом функции $\varphi^{(2)}(\zeta)$, $\psi^{(2)}(\zeta)$.

Для того, чтобы определить влияние кольца, нужно предварительно найти напряжения на контуре свободного отверстия. Потенциалы второго порядка в данном случае находятся по формулам (17), (18), если положить:

$$g_1 = g_2 = 0.$$

При одноосном растяжении ($q = 0$) напряжение $\widehat{\sigma}_c$ на контуре равно:¹

$$\widehat{\sigma}_c^I = P \left\{ 1 - 2 \cos 2\vartheta + \frac{P\gamma}{4(^0H)} [3 - k\delta - 4 \cos 2\vartheta + 4 \cos 4\vartheta] \right\}; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_c^{II} = P \left\{ 1 - 2 \cos 2\vartheta + \frac{P \left(\gamma - \frac{k+1}{2} \right)}{4(^0H)} \left[\frac{\gamma(3-k\delta)}{\gamma - \frac{k+1}{2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \cos 2\vartheta + 4 \cos 4\vartheta \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $\widehat{\sigma}_c^I, \widehat{\sigma}_c^{II}$ — напряжения на контуре при решении задачи в случаях, когда граница задана в деформированном или недеформированном теле соответственно. Если материал пластинки несжимаем (коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$), то получим:² $\gamma = \frac{5c'_1 + c'_2}{8(c'_1 + c'_2)}$; $\delta = \frac{3c_1 + 7c'_2}{5(5c'_1 + c'_2)}$, где c'_1 и c'_2 — упругие постоянные, входящие в функцию ω (форма Муни):

$$\omega = c'_1(1 - 3) + c'_2(2 - 3) \quad (21)$$

и

$$^0H = 2h_0\mu = 4h_0(c'_1 + c'_2).$$

Определим теперь компоненты напряжения на контуре отверстия, подкрепленного кольцом прямоугольного поперечного сечения $2b \times 2h_1$, в случае, когда материал пластинки несжимаем, при $q = 0$.

Полагая, что

$$\frac{E_1 h_1 b}{E_0 R} = 1 \quad \text{и} \quad g_2 = 0, \quad (22)$$

получим $\varphi^{(1)}(Z)$ и $\psi^{(1)}(Z)$ в таком виде [3]:

$$\varphi^{(1)}(Z) = \frac{PR}{4} \left(Z + \frac{1}{Z} \right); \quad \psi^{(1)}(Z) = -\frac{PR}{2} Z. \quad (23)$$

Определяя теперь потенциалы второго порядка по формулам (17), (18), найдем напряжения на контуре пластинки при $c'_2/c'_1 = 0,14$. При растяжении ($P > 0$) максимальные напряжения $\widehat{\sigma}_c^I$ достигаются при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

для свободного отверстия:

$$\widehat{\sigma}_c^I = 3P \left(1 + 0,504 \frac{P}{^0H} \right); \quad (P > 0)$$

для подкрепленного отверстия:

$$\widehat{\sigma}_c^I = P \left(1 + 0,726 \frac{P}{^0H} \right). \quad (P > 0)$$

¹ Для пластинки толщиной $2h_0$ параметр ϵ выберем таким образом, чтобы $2^0H\epsilon = 1$ кг/см ($^0H = 2h_0\mu$, где μ — модуль сдвига в линейной теории).

² $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ (обобщенное плоско-напряженное состояние).

Для наглядности на рисунке приведены напряжения $\frac{\widehat{\sigma\sigma}_c^I}{\sigma_H}$, $\frac{\widehat{\sigma\sigma}_n^I}{\sigma_H}$ на контуре при $\frac{P}{\sigma_H} = 0,8$.

Результаты подсчетов напряжений $\widehat{\sigma\sigma}_c^I$, $\widehat{\sigma\sigma}_n^I$, $\widehat{rr}_n^I$ в случае сжатия $P < 0$ при $\alpha_1 = \frac{P}{\sigma_H}$ приведены в таблице 1.

Максимальные напряжения $\widehat{\sigma\sigma}^{II}$ в случае сжатия ($P < 0$) достигаются при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и равны:

для свободного отверстия:

$$\widehat{\sigma\sigma}_c^{II} = 3P \left(1 - 0,394 \frac{P}{\sigma_H} \right); \quad (P < 0)$$

для подкрепленного отверстия:

$$\widehat{\sigma\sigma}_n^{II} = P \left(1 - 0,066 \frac{P}{\sigma_H} \right). \quad (P < 0)$$

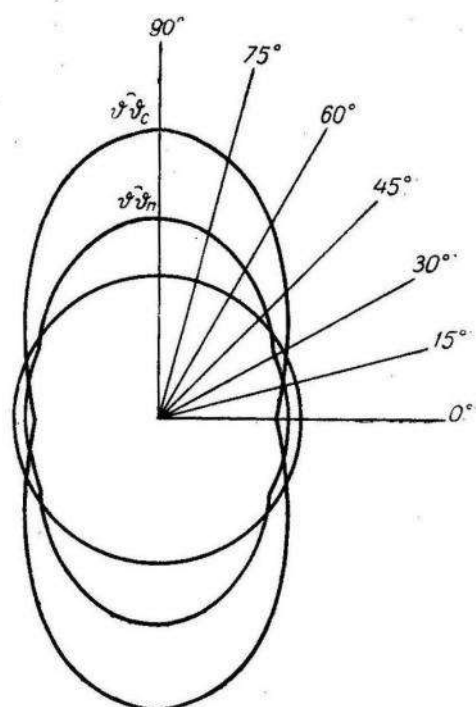


Рис. 1.

Таблица 1

ϑ	α_1	- 0,4			- 0,6			- 0,8		
		$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_c^I}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_n^I}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{rr}_n^I}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_c^I}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_n^I}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{rr}_n^I}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_c^I}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_n^I}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{rr}_n^I}{\sigma_H}$
0°		0,461	-0,024	0,032	0,737	-0,036	0,072	1,04	-0,048	0,108
45°		-0,429	-0,245	-0,202	-0,665	-0,4	-0,304	-0,915	-0,539	-0,406
90°		-0,96	-0,278	-0,406	-1,26	-0,319	-0,614	-1,44	-0,304	-0,826

Таблица 2

ϑ	α_1	0,4			0,6			0,8		
		$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_c^{II}}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_n^{II}}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{rr}_n^{II}}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_c^{II}}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_n^{II}}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{rr}_n^{II}}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_c^{II}}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{\sigma\sigma}_n^{II}}{\sigma_H}$	$\frac{\widehat{rr}_n^{II}}{\sigma_H}$
0°		-0,34	-0,096	0,117	-0,465	-0,216	0,263	-0,68	-0,384	0,467
45°		0,584	0,239	0,32	1,014	0,388	0,588	1,54	0,557	0,912
90°		1,01	0,39	0,33	1,37	0,575	0,442	1,63	0,755	0,518

Данные подсчета $\widehat{\sigma\sigma}_c^{II}$, $\widehat{\sigma\sigma}_n^{II}$, $\widehat{rr}_n^{II}$ при растяжении приведены в таблице 2.

На основании приведенных выше формул, а также таблиц 1 и 2 можно сделать вывод: подкрепляющее кольцо значительно снижает концентрацию напряжений на контуре отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. О малых деформациях криволинейных стержней. Труды Ленинградского политехнического ин-та, № 3, 1941.
2. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
3. Флейшман Н. П. Замечания к одной статье М. П. Шереметьева. Доповіді та повідомлення Львівського державного ун-ту, вип. 7, част. III, 1957.
4. Шереметьев М. П. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инженерный сборник, т. XIV, 1953.
5. Койфман Ю. І. Про один спосіб розв'язування задач для безмежної пластинки з отвором, край якого підкріплений тонким кільцем. Студентський збірник, част. II, Вид. Львівського ун-ту, 1960.
6. Adkins J. E., Green A. E., Nicholas G. G. Two-dimensional theory of elasticity for finite deformations. Philosophical Transactions, A. 247, 1954.
7. Adkins J. E., Green A. E. Plane problems in second-order elasticity theory. Proceedings of Royal Society, ser. A., N 1219, vol. 239, 1957.