Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

В. О. ЛИХАЧОВ

ДЕЯКІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ В ЦИЛІНДРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Рівняння Ляме в циліндричних координатах при відсутності об'ємних сил можна записати, як відомо, таким чином:

$$\frac{\partial У}{\partial \zeta} - \frac{\partial R_c Z}{\partial \theta} = \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} x \frac{\partial R_c \Theta}{\partial x}; \quad \frac{\partial R_c X}{\partial \theta} - \frac{\partial У}{\partial x} = \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} x \frac{\partial R_c \Theta}{\partial \zeta}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial \zeta} = \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \frac{1}{x} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial (x R_c X)}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial У}{\partial \theta} + x \frac{\partial R_c Z}{\partial \zeta} = 0,$$

де

$$\frac{\partial (x u_\theta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = x R_c X; \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (x u_\theta)}{\partial x} = x R_c Z; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} = \frac{1}{x} У; \quad \frac{1}{x} \frac{\partial (x u_r)}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = R\Theta;$$

ν — число Пуассона, $R_c \Theta$ — об'ємне розширення.

Відносно компонентів зміщення будемо вважати, що вони задовольняють одну з таких умов:

„A"
1) $u_z, \frac{\partial u_r}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_\Theta}{\partial \zeta}$ рівні нулю при $\zeta = 0$,
2) $u_r, u_\Theta, \frac{\partial u_z}{\partial \zeta}$ відмінні від нуля при $\zeta = 0$.

„B"
1) $u_r, u_\Theta, \frac{\partial u_z}{\partial \zeta}$ рівні нулю при $\zeta = 0$,
2) $u_z, \frac{\partial u_r}{\partial \zeta}, \frac{\partial u_\Theta}{\partial \zeta}$ відмінні від нуля при $\zeta = 0$,

що відносно функцій $X(x,\zeta,\Theta)$, $У(x,\zeta,\Theta)$, $Z(x,\zeta,\Theta)$, $\Theta(x,\zeta,\Theta)$ значить:

1) X, $У$, $\frac{\partial Z}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}$ рівні нулю при $\zeta = 0$,

2) Z, Θ, $\frac{\partial X}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial У}{\partial \zeta}$ відмінні від нуля при $\zeta = 0$

при виконанні умови «А»,

1) Z, Θ, $\frac{\partial X}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial У}{\partial \zeta}$ рівні нулю при $\zeta = 0$,

2) $X, У, \frac{\partial Z}{\partial \zeta}, \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}$ відмінні від нуля при $\zeta = 0$,

якщо виконується умова «В».

Виконання умови «А» відповідає парним відносно ζ компонентам напруги $\widehat{rr}$, $\widehat{zz}$, $\widehat{\Theta\Theta}$, $\widehat{r\Theta}$, і непарним іншим. Виконання умови «В» — непарним компонентам $\widehat{rr}$, $\widehat{zz}$, $\widehat{\Theta\Theta}$, $\widehat{r\Theta}$ і парним іншим. У випадку задачі, симетричної відносно осі,— відповідно симетричному і кососиметричному навантаженню бічної поверхні.

Будемо надалі вважати, що виконується умова «А». З системи (1) видно, що її розв'язок можна виразити через дві гармонічні функції $\varphi_1(x,\zeta,\Theta)$ и $\varphi_2(x,\zeta,\Theta)$. Якщо прийняти $\Theta(x,\zeta,\Theta) = \varphi_1(x,\zeta,\Theta)$, $Z(x,\zeta,\Theta) = \varphi_2(x,\zeta,\Theta)$, то

$$У(x, \zeta, \Theta) = \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} x \frac{\partial \varphi^x_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^x_2}{\partial \Theta}; \quad X(x, \zeta, \Theta) = -\frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi^x_1}{\partial \Theta} + \frac{\partial \varphi^x_2}{\partial x},$$

де

$$\varphi_1^x(x, \zeta, \Theta) = \int_0^\zeta \varphi_1(x, z, \Theta)\, dz, \quad \varphi_2^x(x, \zeta, \Theta) = \int_0^\zeta \varphi_2(x, z, \Theta)\, dz.$$

З системи (2) виходить, що її розв'язок можна виразити через три гармонічні функції $\varphi_1(x,\zeta,\Theta)$, $\varphi_2(x,\zeta,\Theta)$, $\varphi_3(x,\zeta,\Theta)$, якщо припустити, що $u_z(x,\zeta,\Theta) = u_z^{(1)}(x,\zeta,\Theta) + u_z^{(2)}(x,\zeta,\Theta)$, $u_z^{(1)} = \varphi_3(x,\zeta,\Theta)$, де $u_z^{(1)}(x, \zeta, \Theta)$ — загальний розв'язок однорідного, а $u_z^{(2)}(x,\zeta,\Theta)$ — частковий розв'язок рівняння $\Delta u_z(x,\zeta,\Theta) = -\frac{\nu}{\nu-2} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta}$. Таким чином, розв'язок системи рівнянь Ляме виражається через три гармонічні функції і вид цього рішення буде залежати від вибору гармонічних функцій.

Для задачі, симетричної відносно осі, системи (1), (2) значно спрощуються і розв'язок рівнянь Ляме виражається через дві гармонічні функції $\psi_1(x,\zeta)$, $\psi_2(x,\zeta)$.

Наведемо деякі розв'язки системи рівнянь Ляме тільки для випадку задачі, симетричної відносно осі, і суцільної області, що пояснюється браком місця.

а) $$\psi_i(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} a_i(p) I_0(px) \frac{\cos p\zeta}{\sin p\zeta};$$

$$\Theta(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} a_1(p) I_0(px) \cos p\zeta;$$

$$u_z(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty} \left[a_2(p) I_0(px) + \frac{\nu}{2(\nu-2)} a_1(p) x I_1(px) \right] \sin p\zeta;$$

$$u_r(x, \zeta) = -\sum_{p=1}^{\infty} \left[a_2(p) I_1(px) + \frac{2(\nu-1)}{\nu-2} \left(\frac{\nu}{4(\nu-1)} x I_0(px) - \frac{1}{p} I_0(px) \right) a_1(p) \right] \cos p\zeta.$$

б) $$\psi_i(x,\zeta)=\sum_{p=1}^{\infty} b_i(p)\, Y_0(px)\, \underset{\mathrm{sh}\, p\zeta}{\mathrm{ch}\, p\zeta};$$

$$\Theta(x,\zeta)=\sum_{p=1}^{\infty} b_1(p)\, Y_0(px)\,\mathrm{ch}\, p\zeta;$$

$$u_z(x,\zeta)=\sum_{p=1}^{\infty}\left[b_2(p)\, Y_0(px)-\frac{\nu}{2(\nu-2)}\, b_1(p)\, x\, Y_1(px)\right]\mathrm{sh}\, p\zeta;$$

$$u_r(x,\zeta)=-\sum_{p=1}^{\infty}\Big[\, b_2(p)\, Y_1(px)+\frac{2(\nu-1)}{\nu-2}\left(\frac{\nu}{4(\nu-1)}\, x\, Y_0(px)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p}\, Y_1(px)\right) b_1(p)\Big]\,\mathrm{ch}\, p\zeta.$$

в) $$\psi_1(p,\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[x^{2n}+(-1)^m\frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots(2n-2m+2)^2}{(2m)!}\, x^{2n-2m}\zeta^{2m}\right];$$

$$\psi_2(x,\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[x^{2n}\zeta+(-1)^m\frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots(2n-2m+2)^2}{(2m+1)!}\, x^{2n-2m}\zeta^{2m+1}\right];$$

$$\Theta(x,\zeta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{2n}\left[x^{2n}+(-1)^m\frac{(2n)^2\ldots(2n-2m+2)^2}{(2m)!}\, x^{2n-2m}\zeta^{2m}\right];$$

$$u_z(x,\zeta)=\beta_1\zeta+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\beta_{2n}-\frac{\nu}{\nu-2}\alpha_{2n}\right]x^{2n}\zeta+\right.$$

$$+(-1)^m\frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots(2n-2m+2)^2}{(2m+1)!}\Big[\beta_{2n}-$$

$$\left.-\frac{(m+1)\nu}{\nu-2}\,\alpha_{2n}\Big]\, x^{2n-2m}\,\zeta^{2m+1}\right\};$$

$$u_r(x,\zeta)=\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}\, x+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m-1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n+2}\Big[\frac{2(\nu-1)}{\nu-2}\,\alpha_{2n}-\right.$$

$$-\beta_{2n}\Big]\, x^{2n+1}+n\left[\beta_{2n}-\frac{3\nu-2}{\nu-2}\,\alpha_{2n}\right]x^{2n-1}\zeta^2+$$

$$+(-1)^m\frac{(2n)^2(\ldots(2n-2m+2)^2(2n-2m)}{(2m+2)!}\Big[\beta_{2n}-$$

$$\left.-\frac{(m+3)\nu-2}{\nu-2}\,\alpha_{2n}\Big]\, x^{2n-2m-1}\,\zeta^{2m+2}\right\}.$$

Звідки, беручи до уваги відомі співвідношення, можна записати:

$$\frac{Rl}{2\mu}\,\overline{rr}=\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\zeta^{2k}=c_0+c_2\zeta^2+c_4\zeta^4+c_6\zeta^6+\ldots, \qquad (3)$$

$$\frac{R_l}{\mu}\widehat{rz}=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k+1}\zeta^{2k+1}=b_1\zeta+b_3\zeta^3+b_5\zeta^5+b_7\zeta^7+\ldots$$

для $x=1$,

$$\frac{R_l}{2\mu}\widehat{zz}=\sum_{k=0}^{\infty}d_{2k}x^{2k}=d_0+d_2x^2+d_4x^4+d_6x^6+\ldots, \tag{4}$$

$$\frac{Rl}{\mu}\widehat{zr}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+\ldots$$

для $\zeta=l$, де

$$c_0=\frac{\nu}{2(\nu-2)}\alpha_0-\frac{1}{2}\beta_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(2n+1)(\nu-1)+2n+2}{(2n+2)(\nu-2)}\alpha_{2n-1}-\frac{2n+1}{2n+2}\beta_{2n-1}\right];$$

$$c_2=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+n(2n-1)(3\nu-2)}{\nu-2}\alpha_{2n-1}-n(2n-1)\beta_{2n-1}\right]; \tag{5}$$

$$c_{2k}=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2k-2)^2\ldots(2n)}{(2k)!}\left[\frac{2n+(2n-1)[(k+2)\nu-2]}{\nu-2}\alpha_{2n+2k-3}-\right.$$

$$\left.-(2n-1)\beta_{2n+2k-3}\right]$$

$$(k=2,3,4\ldots);$$

$$b_1=-4\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2n-1}-\beta_{2n-1}\right);$$

$$b_{2k+1}=2(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2k)^2\ldots 2n}{(2k+1)!}\left[\frac{(2k-1)\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2n+2k-1}-\beta_{2n+2k-1}\right]$$

$$(k=1,2,3\ldots);$$

$$d_0=\beta_0+\frac{1}{\nu-2}\alpha_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n^2(2n-2)^2\ldots 4}{(2n)!}\left[\frac{1-(n+1)\nu}{\nu-2}\alpha_{2n-1}+\beta_{2n-1}\right]l^{2n}; \tag{6}$$

$$d_{2k}=\frac{1-\nu}{\nu-2}\alpha_{2k-1}+\beta_{2k-1}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+2k)^2\ldots 4^2}{(2n)!}\cdot\left[\frac{1-(n+1)\nu}{\nu-2}\alpha_{2n+2k-1}+\beta_{2n+2k-1}\right]l^{2n}$$

$$(k=1,2,3\ldots);$$

$$a_1 = -4\left(\frac{2\nu-1}{\nu-2}\alpha_1 - \beta_1\right) l +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4 \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)!} \left[\frac{(n+2)\nu-1}{\nu-2} \alpha_{2n+1} - \beta_{2n+1}\right] l^{2n+1};$$

$$a_{2k+1} = -4(k+1)\left(\frac{2\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2k+1} - \beta_{2k+1}\right) l +$$

$$+4(k+1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+2k+2)}{(2n+1)!}\left[\frac{(n+2)\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2n+2k+1} - \beta_{2n+2k+1}\right] l^{2n+1}$$

$$(k = 1, 2, 3\ldots).$$

г) $$\psi_1(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[c_1(p)\, ber\, p_1 x - d_1(p)\, bei\, p_1 x\right]\cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta +\right.$$

$$\left.+\left[c_1(p)\, bei\, p_1 x + d_1(p)\, ber\, p_1 x\right]\sin p\zeta \operatorname{sh} p\zeta\right\};$$

$$\psi_2(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[c_2(p)(ber\, p_1 x - bei\, p_1 x) -\right.\right.$$

$$\left.- d_2(p)(ber\, p_1 x + bei\, p_1 x)\right]\cos p\zeta \operatorname{sh} p\zeta + \left[c_2(p)(ber\, p_1 x + bei\, p_1 x) +\right.$$

$$\left.\left.+ d_2(p)(ber\, p_1 x - bei\, p_1 x)\right]\sin p\zeta \operatorname{ch} p\zeta\right\},$$

де $p_1 = \sqrt{2}p$, blr і bli — функції Кельвіна, які вводяться співвідношенням

$$I_0(\sqrt{i}x) = ber\, x + i\, bei x.$$

$$\Theta(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\left\{c_1(p)\left[ber\, p_1 x \cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta + bei\, p_1 x \sin p\zeta \operatorname{sh} p\zeta\right] +\right.$$

$$\left.+ d_1(p)\left[ber\, p_1 x \sin p\zeta \operatorname{sh} p\zeta - bei\, p_1 x \cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta\right]\right\};$$

$$u_z(x, \zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[c_2(p)(ber\, p_1 x + bei\, p_1 x) + d_2(p)(ber\, p_1 x -\right.\right.$$

$$- bei\, p_1 x)]\sin p\zeta \operatorname{ch} p\zeta + [c_2(p)(ber\, p_1 x - bei\, p_1 x) -$$

$$- d_2(p)(ber\, p_1 x + bei\, p_1 x)]\cos p\zeta \operatorname{sh} p\zeta -$$

$$-\frac{1}{2(\nu-2)}x\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[d_1(p)(be'i\, p_1 x - be'r\, p_1 x) + c_1(p)(be'i\, p_1 x +\right.\right.$$

$$+ be'i\,p_1 x)]\sin p\zeta \operatorname{ch} p\zeta + [d_1(p)(be'r\,p_1 x + be'i\,p_1 x) +$$

$$+ c_1(p)(be'r\,p_1 x - be'i\,p_1 x)]\sqrt{2}\cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta\};$$

$$u_r(x,\zeta) = \sum_{p=1}^{\infty}\Big\{\Big[\sqrt{2}\,c_2(p)\,be'r\,p_1 x - \sqrt{2}\,d_2(p)\,be'i\,p_1 x +$$

$$+ \frac{c_1}{\nu-2}\Big(x\,bei\,p_1 x + \frac{2(\nu-1)}{p}\,be'r\,p_1 x\Big) -$$

$$- \frac{d_1}{\nu-2}\Big(\frac{px}{2}\,bei\,p_1 x + \frac{2(\nu-1)}{p}\,be'i\,p_1 x\Big)\Big]\sin p\zeta \operatorname{sh} p\zeta +$$

$$+ \Big[\frac{d_1(p)}{\nu-2}\Big(\frac{px}{2}\,ber\,p_1 x - \frac{2(\nu-1)}{p}\,be'r\,p_1 x\Big) - \sqrt{2}\,c_2(p\;be'i\,p_1 x -$$

$$- \sqrt{2}\,d_2(p)\,be'r\,p_1 x + \frac{c_1(p)}{\nu-2}\Big(x\,ber\,p_1 x -$$

$$- \frac{2(\nu-1)}{p}\,be'i\,p_1 x\Big)\Big]\cos p\zeta \operatorname{ch} p\zeta.$$

Розглянемо, як приклад застосування розв'язків «*а*» і «*в*», задачу про напружений стан циліндра довжини $2l\left(l = \frac{L}{R_l} = 0{,}1\,\pi\right)$, який навантажений по ділянці бічної поверхні ($2b = 0{,}2$) зусиллями

$$\frac{R_l}{2\mu}\widehat{rr}(1,\zeta) = f_1(\zeta),\ \frac{R_l}{\mu}\widehat{rz}(1,\zeta) = f_2(\zeta). \tag{7}$$

$-b \leqslant \zeta \leqslant b$, $f_1(\zeta), f_2(\zeta)$ задовольняють умови Діріхле.

Торці циліндра припускаємо вільними від зовнішніх зусиль, тобто

$$\frac{R_l}{2\mu}\widehat{zz}(x,l) = 0,\ \frac{R_l}{\mu}\widehat{zr}(x,l) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{8}$$

Початок системи координат поміщаємо в точці перетину площини $\zeta = 0$ з віссю циліндра. Вісь oz направимо по осі циліндра. Задачу розглядаємо як симетричну відносно площини $\zeta = 0$ і для її розв'язку застосуємо суму розв'язків «*а*» і «*в*». Умова відсутності дотичних зусиль $\widehat{zr}(x,l)$ на торцях циліндра (7) виконується, якщо припустити, що

$$\beta_{2n-1} = \frac{2\nu-1}{\nu-2}\alpha_{2n-1} - \frac{a_{n,1}}{4n}\cdot\frac{\nu}{\nu-2}\alpha_{2n+1} - \Big(\frac{2a_{n,2}}{4n} +$$

$$\frac{a_{n,1}}{4n}\cdot\frac{a_{n+1,1}}{4(n+1)}\Big)\frac{\nu}{\nu-2}\alpha_{2n+3} - \frac{\nu}{\nu-2}\sum_{i,j}\frac{1}{4(i+n-1)}\Big\{(i+2)\,a_{i+n-1,j+2} +$$

$$+ a_{i+n-1,j+1}\cdot\frac{a_{i+j+n,1}}{4(i+j+n)} + a_{i+n-1,j}\Big[\frac{2a_{n+i+j-2,2}}{4(n+i+j-1)} +$$

$$+ \frac{a_{i+n+j-1,1}}{4(i+n+j-1)}\cdot\frac{a_{i+n+j-n,1}}{4(i+j+n)}\Big]\Big\}p_i\,\alpha_{2(i+j+n-1)+3}, \tag{9}$$

де

$$a_{i,j} = 2(-1)^{i+j}\frac{(2i+2)^2(2i+4)^2\ldots(2i+2j)^2\,2i}{(2j+1)!}e^{2j}, \tag{10}$$

$$p_1 = 1, \quad p_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a_{k,\, i-k}}{4k} p_k$$

$$(i = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

Щоб отримати вираз для коефіцієнта α_{2m-1}. треба індексу «i» надавати значення $i = 1,2,3...$ Значення для «j» отримаємо з рівняння $j = m - i - 2$. Але завжди $i + j = m + 2$.

Наприклад,

$$\beta_1 = \frac{2\nu - 1}{\nu - 2}\alpha_1 - 2{,}66667\frac{\nu}{\nu - 2} l^2 \alpha_3 - 6{,}4 \frac{\nu}{\nu - 2} l^4 \alpha_5 - 39{,}0095 \frac{\nu}{\nu - 2} l^6 \alpha_7 -$$

$$- 471{,}365 \frac{\nu}{\nu - 2} l^8 \alpha_9 - 5700{,}01 \frac{\nu}{\nu - 2} l^{10} \alpha_9 - 112809 \frac{\nu}{\nu - 2} l^{12} \alpha_{13} -$$

$$- 292274 \cdot 10 \frac{\nu}{\nu - 2} l^{14} \alpha_{15} - 959614 \cdot 10^2 \frac{\nu}{\nu - 2} l^{16} \alpha_{17} - \ldots,$$

$$\beta_3 = \frac{2\nu - 1}{\nu - 2}\alpha_3 - 6 \frac{\nu}{\nu - 2} l^2 \alpha_5\, 25{,}6 \frac{\nu}{\nu - 2} l^4 \alpha_7 - 243{,}810 \frac{\nu}{\nu - 2} l^6 \alpha_9 -$$

$$- 269{,}778 \frac{\nu}{\nu - 2} l^8 \alpha_{11} - 11712{,}3 \frac{\nu}{\nu - 2} l^{10} \alpha_{13} - 193382 \frac{\nu}{\nu - 2} l^{12} \alpha_{15} -$$

$$- 478081 \cdot 10 \frac{\nu}{\nu - 2} l^{14} \alpha_{17} - \ldots,$$

$$\beta_5 = \frac{2\nu - 1}{\nu - 2}\alpha_5 - 10{,}6667 \frac{\nu}{\nu - 2} l^2 \alpha_7 - 71{,}1111 \frac{\nu}{\nu - 2} l^4 \alpha_9 - 975{,}238 \frac{\nu}{\nu - 2} l^6 \alpha_{11} +$$

$$+ 4778{,}64 \frac{\nu}{\nu - 2} l^8 \alpha_{13} - 36205{,}6 \frac{\nu}{\nu - 2} l^{10} \alpha_{15} - 207646 \frac{\nu}{\nu - 2} l^{12} \alpha_{17} - \ldots,$$

$$a_{11} = 10{,}6667\, l^2, \quad a_{12} = -19{,}2\, l^4, \quad a_{13} = 29{,}2571\, l^6,$$

$$a_{14} = -40{,}6349\, l^8, \quad a_{15} = 53{,}1948\, l^{10}, \quad a_{16} = -66{,}8345\, l^{12} \ldots,$$

$$a_{21} = 48\, l^2, \quad a_{22} = -153{,}6\, l^4, \quad a_{23} = 365{,}714\, l^6,$$

$$a_{24} = -712\, l^8, \quad a_{25} = 1303{,}27\, l^{10}, \quad a_{26} = -2138{,}70\, l^{12} \ldots$$

Вирази для β_{2n-1}, a_{ij} $(n,i,j = 1,2,3...)$ обчислюються раз назавжди.

Виконання крайових умов на бічній поверхні циліндра приводить до визначення $a_1(p)$, $a_2(p)$ з таких систем:

$$\left[\frac{3\nu - 2}{2(\nu - 2)} I_0(p_1) - \frac{2(\nu - 1)}{\nu - 2} \frac{1}{p_1} I_1(p_1) - \frac{\nu}{2(\nu - 2)} p_1 I_1(p_1)\right] a_1(p) -$$

$$- \left[p_1 I_0(p_1) - I_1(p_1)\right] a_2(p) = (-1)^{p+r} \frac{2}{10^{2r}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m+2r-2} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2m-1} \frac{(2m + 2r - 2)!}{(2m - 1)!} \cdot \frac{1}{p^{2r}} + \frac{2}{l} \int_0^l f_1(\zeta) \cos p, \zeta\, d\zeta;$$

$$\frac{\nu}{\nu - 2}\left[p_1 I_0(p_1) - \frac{2(\nu - 1)}{\nu} I_1(p_1)\right] a_1(p) + 2 p_1 I_1(p_1)\, a_2(p) =$$

$$= (-1)^{p+r} \frac{2}{10^{2r-1}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m+2r-3} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2m-2} \frac{(2m + 2r - 1)!}{(2m - 1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{p^{2r-2}} + \frac{2}{l}\int_0^l f_2(\zeta)\sin p_1\zeta\, d\zeta;$$

$$c_0 + \sum_{m=1} \frac{1}{2m+1}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2m+1} c_{2m} = \int_0^l f_1(\zeta)\, d\zeta$$

для будь-якого значення індекса $r = 1,2,3...$, де $p_1 = \frac{p\pi}{l} = 10p_3$, c_0, $c_2...$ $c_{2m+2r-2}$, b_1, $b_3... b_{2m+2r-2}$ виражаються через α_0, α_1, $\alpha_3... \alpha_{2n-1}$, як це випливає з виразів (5) і (8).

Задоволення умови відсутності нормальних зусиль $\widehat{zz}(x,l)$ на торцях циліндра зводиться до визначення сталих α_0, α_1, $\alpha_3... \alpha_{2n-1}$ з систем рівнянь, які можуть бути отримані з деяких умов. Наприклад, з умови мінімуму потенціальної енергії і застосування варіаційних методів [1], [2], [5], [6], [7], з умови співпадання значення нормальних зусиль $\widehat{zz}(x,l)$ з даними в певних точках радіуса [3], [4], з умови наближення епюри напруг до заданих, вимагаючи виконання скінченного числа інтегральних співвідношень (моменти різних порядків). Нарешті, умова $\widehat{zz}(x,l) = 0$ приводить до такої системи:

$$d_{2k+2} = -\frac{1}{(k+1)!\,(k+1)!} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (5p)^{2k+2}\left[\frac{(k+1)\nu+1}{\nu-2}a_1 + 10pa_2\right];$$

$$d_0 + \beta_0 + \frac{1}{\nu-2}\alpha_0 + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\left[\frac{1}{\nu-2}a_1 + 10pa_2\right], \tag{11}$$

де a_1, a_2 визначаються з системи (10),

$$d_{2k+2} = \frac{1-\nu}{\nu-2}\alpha_{2k+1} + \beta_{2k+1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{(2m+2k+2)^2 ... (2k+4)^2}{(2m)!}\left[\frac{1-(m+1)\nu}{\nu-2}\alpha_{2m+2k+1} + \beta_{2m+2k+1}\right] l^{2m};$$

$$d_0 = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{(2m)^2(2m-2)^2 ... 4}{(2m)!}\left[\frac{1-(m+1)\nu}{\nu-2}\alpha_{2m-1} + \beta_{2m-1}\right] l^{2m} \tag{12}$$

і β_{2k+1}, $\beta_{2m+2k+1}$, β_{2m-1} виражаються через $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3 ... \alpha_{2n-1}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бояршинов С. В. Расчет толстостенных полых цилиндров, находящихся под действием произвольной осесимметрической нагрузки. Сб. «Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций». МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1953.

2. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. Н. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Машгиз, 1950

3. Сумцов В. С. Про напружений стан циліндра конечної довжини. ПМ, IV, 4, 1958.

4. Сумцов В. С. До питання про граничні умови на торцях пружного циліндра. Доповіді АН УРСР, № 5, 1957.

5. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, XV, 2, 1951.

6. Филоненко-Бородич М. М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. ПММ, XV, 5, 1951.

7. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые обобщенные задачи Ляме для упругого параллелепипеда. ПММ, XVII, 4, 1953.