Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

С. В. ДЕНИСКО

ПРО ДЕЯКІ СПЕЦІАЛЬНІ ЗАДАЧІ ЕКВІАРЕАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ПОВЕРХЕНЬ

Як відомо, еквіареальне відображення однієї поверхні на другу зберігає відношення площ областей поверхні, що відображають. Це відображення, якщо обидві поверхні віднесені до загальних координат, характеризується умовою

$$\Delta_1 = c^2\Delta_2,$$

де $c = \text{const}$, а Δ_1 і Δ_2 — дискримінанти основних квадратичних форм даних поверхень. Якщо $c = 1$, то ми одержуємо частковий випадок, коли при відображенні зберігається площа всякої фігури. Таке відображення називається еквівалентним.

Розглянемо деякі спеціальні еквіареальні відображення.

I. Припустимо, що:

1) поверхня Φ_1 еквіареально відображена на поверхню Φ_2 і цим відображенням обидві поверхні віднесені до загальних координат u, v;

2) в координатах u, v метрична форма поверхні Φ_i[1] має вигляд

$$ds_i^2 = \underset{i}{E}du^2 + \underset{i}{G}dv^2;$$

3) лінії $u = \text{const}$ на поверхні Φ_2 є геодезичні.

Тоді, якщо поверхня Φ_1 накладається на поверхню обертання так, що лінії $u = \text{const}$ перетворюються в паралелі (в цьому випадку $\underset{1}{E}$ і $\underset{1}{G}$ залежать тільки від u), то поверхня Φ_2 накладається на поверхню обертання так, що лінії $u = \text{const}$ переходять в меридіани.

Дійсно, згідно з умовами 1) і 2) маємо:

$$\underset{1}{E}\underset{1}{G} = c^2\underset{2}{E}\underset{2}{G},$$

де $c = \text{const}$.

$\underset{1}{E}$ і $\underset{1}{G}$ залежать тільки від u, а тому з попередньої рівності випливає, що $\underset{2}{E}$ і $\underset{2}{G}$ можна записати в такій формі:

$$\underset{2}{E} = \frac{\varphi^2(u)}{\psi^2(v)}, \tag{1}$$

$$\underset{2}{G} = \psi^2(v)\gamma^2(u). \tag{2}$$

Крім того, згідно з умовою 3) маємо [1]

$$\underset{2}{G}_u = 0.$$

Звідси, враховуючи (2), дістанемо:

$$\gamma = C = \text{const}. \tag{3}$$

[1] Тепер і надалі індекс i набирає значення 1, 2.

Отже, в силу (1), (2) і (3) метрична форма поверхні Φ_2 набирає вигляду

$$ds_2^2 = \frac{\varphi^2(u)}{\psi^2(v)} du^2 + C^2 \psi^2(v) dv^2,$$

а це означає, що наше твердження вірне.

Таким же чином можна показати, що, коли виконуються умови 1), 2), 3) і поверхня Φ_1 накладається на поверхню обертання так, що лінії $u = \text{const}$ перетворюються в меридіани, то і поверхня Φ_2 накладається на поверхню обертання так, що лінії $u = \text{const}$ перетворюються в меридіани.

II. Хай α_1 і α_2 — однопараметричні сім'ї твірних лінійчатих поверхень Φ_1 і Φ_2, а Γ — загальна для цих поверхень напрямна. Причому в кожній точці кривої Γ твірні сімей α_1 і α_2 лежать у спрямній площині.

З'ясуємо, які особливості повинні мати поверхні Φ_1 і Φ_2, а також крива Γ, щоб поверхня Φ_1 еквівалентно відображалась на поверхню Φ_2 і

1) кожна точка кривої Γ перетворювалася в себе;

2) твірні сім'ї α_1 перетворювалися в твірні сім'ї α_2;

3) віддаль між двома точками, що лежать на одній твірній, зберігалася.

Згідно з умовами 1), 2), 3) еквівалентне відображення відносить поверхні Φ_1 і Φ_2 до загальних координат s, v, де v — віддаль з відповідним знаком від довільної точки твірної до точки перетину цієї твірної з кривою Γ, а s — довжина дуги кривої Γ.

Хай $m_i(s)$ — одиничний вектор, напрямлений вздовж твірної сім'ї α_i в бік зростання параметра v.

В координатах s, v дискримінант метричної форми поверхні Φ_i має вигляд

$$\Delta_i = 1 + p_i^2 + 2\frac{dp_i}{ds} v + \left[\left(\frac{dp_i}{ds}\right)^2 + (p_i k - q_i \tau)^2 + q_i^2\right] v^2,$$

де k і τ — кривина і скрут кривої Γ, а p_i, q_i — коефіцієнти розкладу вектора $m_i(s)$ по ортах дотичної і бінормалі в точці s кривої Γ.

Прирівнюючи вирази для дискримінантів Δ_1 і Δ_2, будемо мати:

$$p_1^2 + 2\frac{dp_1}{ds} v + \left[\left(\frac{dp_1}{ds}\right)^2 + (p_1 k - q_1 \tau)^2 + \left(\frac{dq_1}{ds}\right)^2\right] v^2 =$$

$$= p_2^2 + 2\frac{dp_2}{ds} v + \left[\left(\frac{dp_2}{ds}\right)^2 + (p_2 k - q_2 \tau)^2 + \left(\frac{dq_2}{ds}\right)^2\right] v^2.$$

Звідси

$$p_1^2 = p_2^2,$$

$$\frac{dp_1}{ds} = \frac{dp_2}{ds},$$

$$\left(\frac{dp_1}{ds}\right)^2 + (p_1 k - q_1 \tau)^2 + \left(\frac{dq_1}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dp_2}{ds}\right)^2 + (p_2 k - q_2 \tau)^2 + \left(\frac{dq_2}{ds}\right)^2.$$

З цих співвідношень випливають такі рівності:

$$p_1 = p_2,$$

$$q_1 = -q_2,$$

$$k\tau = 0$$

або

$$p_1 = -p_2 = \text{const},$$

$$q_1 = q_2 = \text{const},$$

$$k\tau = 0.$$

Отже, для того, щоб мало місце дане еквівалентне відображення, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови. Крива повинна лежати в деякій площині P, відносно якої поверхня Φ_1 повинна бути симетричною поверхні Φ_2. Причому, якщо відповідні точки знаходяться на прямих, що лежать в спрямних площинах кривої Γ і паралельні площині P, то всі твірні сімей α_1 і α_2 утворюють сталий кут з площиною P.

III. Візьмемо косе коло Γ_1, для якого крива Γ_2 є лінією центрів кривини. Хай для цих кривих можна вказати хоч би одну пару лінійчатих поверхень Φ_1, Φ_2, які задовольняють такі умови:

1) крива Γ_i є напрямна для поверхні Φ_i;

2) поверхня Φ_1 еквівалентно відображається на поверхню Φ_2 так, що кожна точка кривої Γ_1 перетворюється в центр кривини кривої Γ_2 в цій точці, твірні поверхні Φ_1 перетворюються в твірні поверхні Φ_2, причому якщо a_1 і a_2 — відповідні твірні, що проходять через точки M_1 і M_2 кривих Γ_1 і Γ_2, то кут між прямою a_1 і кривою Γ_1 в точці M_1 дорівнює кутові між прямою a_2 і кривою Γ_2 в точці M_2, а також зберігаються довжини відрізків твірної.

Тоді крива Γ_1 є гвинтова лінія, що перетинає твірні циліндра, на якому вона лежить, під кутом в 45°.

Дійсно, аналогічно до попереднього пункту можна показати, що згідно з умовами 1) і 2) має місце рівність

$$\left(\frac{ds_1}{ds_2}\right)^2 = 1,$$

де s_i — довжина дуги кривої Γ_i. Але ds_1, ds_2, кривина k і скрут τ кривої Γ_1 задовольняють таку умову [1]:

$$\left(\frac{ds_1}{ds_2}\right)^2 = \left(\frac{\tau}{k}\right)^2.$$

Тому

$$\left(\frac{\tau}{k}\right)^2 = 1.$$

Звідси випливає, що $\tau = \text{const}$, тобто Γ_1 — гвинтова лінія. Далі, враховуючи, що [1]

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\tau = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

де a — радіус циліндра, на якому лежить крива Γ_1, і b — хід цієї кривої, з попередньої рівності дістанемо

$$a = b.$$

А це означає [1], що крива Γ_1 конгруентна кривій Γ_2 і утворює з твірними циліндра, на якому вона лежить, кут в 45°. Зрозуміло, що для кривих Γ_1, Γ_2 можна вказати безліч пар лінійчатих поверхень, для яких виконуються умови 1), 2).

Таким чином, наше твердження доведено.

IV. Хай поверхня Φ_1 еквіареально відображена за допомогою в'язки паралельних вектору M прямих на поверхню Φ_2 так, що:

1) відповідні дотичні площини (тобто дотичні площини до поверхень Φ_1 і Φ_2 у відповідних точках) перетинаються під сталим кутом;

2) лінії перетину відповідних дотичних площин утворюють сталий кут з вектором M.

Тоді обидві поверхні Φ_1 і Φ_2 є або площини, або колові конуси із загальною віссю, паралельною вектору M (один з них може вироджуватись в площину, перпендикулярну до вектора M), або розгортні поверхні, ребра звороту яких є ізогональними траєкторіями однієї і тієї ж однопараметричної сім'ї прямих, паралельних вектору M.

Для доведення візьмемо декартову прямокутну систему координат, вісь Oz якої паралельна вектору M. Хай у цій координатній системі рівняння поверхні Φ_i

$$z = f_i(x, y).$$

Тоді в силу наших передумов можна записати, що

$$1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 = c^4\left[1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$1 + \frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,\frac{\partial f_1}{\partial y} = c_1 c^2\left[1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$-\frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{dy} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,\frac{\partial f_1}{\partial x} = c_2 c^2\left[1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2\right],$$

де c, c_1, c_2 — сталі, причому $|c_1| < 1$ і $|c_2| < 1$. Виключивши з цих рівнянь $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ і $\frac{\partial f_2}{\partial y}$, будемо мати

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 = \frac{(c^2 c_1 - 1)^2 + c^4 c_2^2}{c^4(1 - c_1^2 - c_2^2)}.$$

Отже, функція $f_1(x, y)$ задовольняє рівняння, кожна інтегральна поверхня якого є або площина, або коловий конус з віссю Oz, або розгортна поверхня, ребро звороту якої є ізогональна траєкторія однопараметричної сім'ї прямих, паралельних осі Oz.

Зрозуміло, що те ж саме можна сказати про функцію $f_2(x, y)$.

Беручи до уваги все це, а також умови 1), 2), переконуємось у справедливості нашого твердження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия. Гостехиздат, 1949.