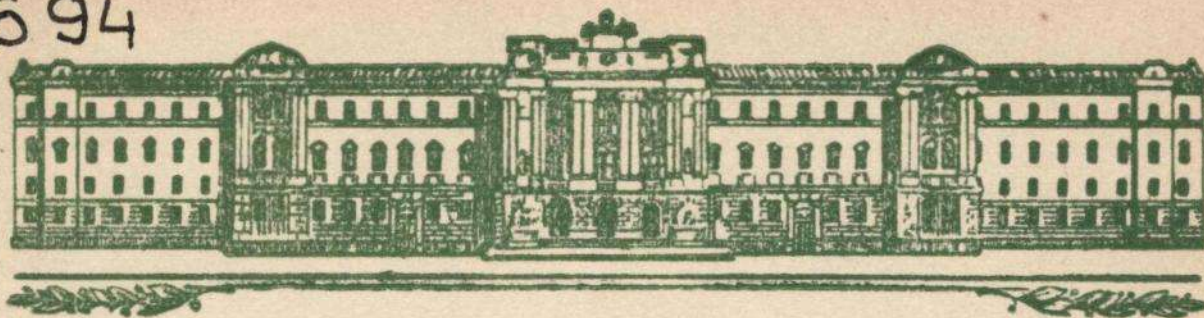


[Вип. 4]
117694



ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Ів. ФРАНКА

ЗБІРНИК РОБІТ АСПІРАНТІВ

ПРИРОДНИЧІ НАУКИ

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1983

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР
ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. ІВАНА ФРАНКА

ЗБІРНИК РОБІТ АСПІРАНТІВ

ПРИРОДНИЧІ НАУКИ

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1963

В збірнику вміщено роботи аспірантів Львівського університету з математики, механіки, аналітичної хімії, зоології, мікології, фізіології рослин, мікробіології і фізіології тварин.

Відповідальний редактор
проф. С. О. Гребінський

МАТЕМАТИКА

О. М. ВВЕДЕНСЬКИЙ

КОГОМОЛОГІЇ ПІДГРУПИ ЛЮТЦ ЕЛІПТИЧНОЇ КРИВОЇ*

Нехай K — локальне поле (тобто дискретно нормоване поле, повне відносно топології, яка визначена цією нормою) з алгебраїчно замкненим полем лишків k характеристики $p > 3$. L — конечне нормальне розширення K з групою Галуа g , Q_K і v_K (відповідно Q_L і v_L) — кільце цілих і норма в K (відповідно в L). T — уніформізуюча L , а P (відповідно p_1) — максимальний ідеал Q_L (відповідно Q_K).

Розглядаємо над K еліптичну криву A :

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in Q_K; 4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0 \pmod{p_1}). \quad (1)$$

Має місце точна послідовність

$$0 \rightarrow S_K \rightarrow A_K \xrightarrow{j} A' \rightarrow 0, \quad (2)$$

де A_K — група раціональних над K точок A , A' — редукція (1) кривої A , j — епіморфізм редукції, S_K — ядро редукції. Ми допустимо, що інваріант Хассе (2) у A' відмінний від нуля.

Мета цієї роботи — визначити $H^q(g, S_L)$ (Тейтовські когомології (3)) за допомогою локальної теорії полів класів (4).

Припустимо спочатку, що $[g:1] = p$.

Лема 1. (Серр (4)). Диферента D розширення L/K дорівнює P^m , де $m = (l+1)(p-1)$, а l — номер останньої, відмінної від одиниці, групи вітвлення (5):

$$g = g_0 = g_1 = \dots = g_l; \quad g_{l+1} = \dots = \{1\}.$$

Лема 2. (Серр (4)). Нехай $Tr: L \rightarrow K$ слід розширення L/K . Покладемо $m = (l+1)(p-1)$. Для всіх цілих $s \geq 1$ буде

$$Tr(P^s) = p_1^r,$$

$$\text{де } r = \left[\frac{m+s}{p} \right],$$

$[x]$ — ціла частина дійсного числа x .

Підгрупу S_L можна параметризувати (6) так, що додаванню елементів, які відповідають значенням t_1 і t_2 параметра t , відповідає композиція значень параметрів $t_1 \circ t_2 = (t_1 + t_2) \cdot (1 + t_1 t_2 g_1(t_1, t_2))$, $g_1(t_1, t_2)$ — ряд від t_1, t_2 з коефіцієнтами з Q_K .

Через $N: S_L \rightarrow S_K$ будемо позначати нормений гомоморфізм з S_L в S_K , а коли T_s значення параметра t , відповідаюче початковій точці

*Науковий керівник — член-кореспондент АН СРСР І. Р. Шафаревич.

з S_L , то $N(T_s)$ значення параметра t , відповідаюче образу цієї точки при гомоморфізмі $N. Norm: L \rightarrow K$ — норма розширення L/K .

Лема 3. Нехай T_s — елемент Q_L , норма якого $\geq s$; тоді

$$N(T_s) \equiv Tr(T_s) + \varepsilon Norm(T_s) + \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m [Norm(T_s)]^m \pmod{Tr(P^{2s})}. \quad (3)$$

Тут ε — одиниця в K , α_m — елементи з Q_K .

Доведення. Нехай σ — твірна g (ми допустили, що $[g:1]=p$). Коли $\lambda = n_0 + n_1\sigma + \dots + n_{p-1}\sigma^{p-1}$ елемент групової алгебри $Z[g]$, то $T_s^\lambda = T_s^{n_0} \cdot (\sigma T_s)^{n_1} \dots (\sigma^{p-1} T_s)^{n_{p-1}}$.

$Z_+[g]$ — частина $Z[g]$, яка складається з тих λ , що всі n_i невід'ємні, але хоч одне з них додатне. Тоді, позначаючи $t_1 \circ t_2 = S(t_1, t_2)$, одержуємо

$$N(T_s) = S(T_s, \sigma(T_s), \dots, \sigma^{p-1}(T_s)) = \sum_{\lambda \in Z_+[g]} r_\lambda T_s^\lambda,$$

$r_\lambda \in Q_K$, r_λ підлягають деяким умовам симетричності. Коли $\sigma^i \lambda = \lambda$, то $\lambda = n(1 + \sigma + \dots + \sigma^{p-1})$ (i — одному з чисел $0, 1, \dots, p-1$). Коли λ не має такого вигляду, то по симетричності S , в $N(T_s)$ входить разом з $r_\lambda T_s^\lambda$ також і $r_\lambda Tr(T_s^\lambda)$; залишається врахувати формулу множення на p в A , і лема доведена.

Нехай

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{коли } x \leq l \\ l + p(x-l), & \text{коли } x \geq l. \end{cases}$$

В S_L виникає фільтрація: S_L^n — підгрупа тих точок S_L , значення параметра t в яких належить до P^n .

Лема 4. Для всіх цілих $n \geq 1$ має місце

$$(a) \quad N(S_L^{\psi(n)}) = S_K^n, \quad N(S_L^{\psi(n)+1}) = S_K^{n+1},$$

$$(b) \quad \text{коли } N_n: \frac{S_L^{\psi(n)}}{S_L^{\psi(n)+1}} \rightarrow \frac{S_K^n}{S_K^{n+1}}$$

гомоморфізм, одержаний з N факторизацією, то при всіх $n \neq l$, N_n ізоморфізми. При $n = l$ має місце точна послідовність

$$0 \rightarrow g \rightarrow \frac{S_L^l}{S_L^{l+1}} \xrightarrow{N_l} \frac{S_K^l}{S_K^{l+1}} \rightarrow 0.$$

Доведення. Досить довести (b) і

$$(a') \quad N(S_L^{\psi(n)}) \subset S_K^n; \quad N(S_L^{\psi(n)+1}) \subset S_K^{n+1};$$

з них (a) випливає по властивостях груп з фільтрацією (6).

Метод доведення далі класичний.

$$\text{Наслідок 1. } H^0(g, S_L) = 0, \quad H^{-1}(g, S_L) = \frac{Z}{pZ},$$

Доведення. Слід врахувати формулу

$$\sigma(aTr) \circ (-aTr) = a[\sigma(T) - T][rTr^{-1} + Tr(\dots)][1 + T(\dots)].$$

Лема 5. Для всіх цілих $n \geq 1$ і довільної p — групи g

(а) $N(S_L^{\psi(n)}) = S_K^n$, $N(S_L^{\psi(n)+1}) = S_K^{n+1}$.

(в) Нехай $N_n: \frac{S_L^{\psi(n)}}{S_L^{\psi(n)+1}} \rightarrow \frac{S_K^n}{S_K^{n+1}}$

гомоморфізм, одержаний з N факторизацією. Тоді має місце точна послідовність

$$0 \rightarrow \frac{g_{\psi(n)}}{g_{\psi(n)+1}} \rightarrow \frac{S_L^{\psi(n)}}{S_L^{\psi(n)+1}} \xrightarrow{N_n} \frac{S_K^n}{S_K^{n+1}} \rightarrow 0$$

(ψ — відповідаюча розширенню $\frac{L}{K}$ функція (4)). Доведення класичне.

Лема 6. Коли g — абелева група, то $([g:1] = p^n)$

$$H^1(g, S_L) = \frac{Z}{p^n Z}.$$

Доведення — по аналогії з відомою $H^1(g, U_L) = \frac{Z}{p^n Z}$, (U_L — група одиниць L).

Нехай $K(p)$ — максимальне сепарабельне p -розширення K з групою Галуа $GK(p)$. $S_K(p)$ — індуктивна границя груп S_L , де L — кінцеве p -розширення Галуа поля K . Позначимо $H^1(GK(p), S_K(p))$ через $H^1(*, S_K(p))$ (коцепи неперервні). Нехай $Z_{p^\infty} = \varinjlim \frac{Z}{p^n Z}$.

Лема 7. (Артін (7)). Коли для кожного кінцевого p -розширення Галуа F поля K існує підгрупа $\bar{H}^1(*, S_F(p))$ групи $H^1(*, S_F(p))$, ізоморфна Z_{p^∞} (ізоморфізм позначається через inv_F) така, що

а) для кожного кінцевого нормального сепарабельного p -розширення $\frac{F}{K}$ буде

$$\text{res}_{\frac{F}{K}} \bar{H}^1(*, S_K(p)) \subset H^1(*, S_F(p))$$

і

$$\text{inv}_F \text{res}_{F,K} \alpha = [F:K] \text{inv}_K \alpha$$

для всіх $\alpha \in \bar{H}^1(*, S_K(p))$.

Тоді

$$H^1\left(\frac{g_F}{K}, S_F\right) = \frac{Z}{p^n Z}, \quad H^1(*, S_K(p)) = Z_{p^\infty}.$$

Щоб застосувати цю лему в нашому випадку, треба взяти M — максимальне абелеве p -розширення K : нехай його група Галуа буде $AB_K(p)$. Тоді $H^1(AB_K(p), S_M) = Z_{p^\infty}$ і по спектральній послідовності Серра—Хохшільда є підгрупою $H^1(*, S_K(p))$.

Лема 8. (Тейт (7)). Нехай $f: A \times B \rightarrow C$ гомоморфізм g -модулів, а $\alpha \in H^p(g, B)$ такий, що для деякого q буде

$$H^{q-1}(g, A) \times \alpha \rightarrow H^{p+q-1}(g, C) \text{ епіморфізм}$$

$$H^q(g, A) \times \alpha \rightarrow H^{p+q}(g, C) \text{ ізоморфізм}$$

$$H^{q+1}(g, A) \times \alpha \rightarrow H^{p+q+1}(g, C) \text{ мономорфізм.}$$

Тоді

$$H^r(g, A) = H^{p+r}(g, C) \quad (r \in \mathbb{Z}).$$

Щоб застосувати цю лему в нашому випадку, візьмемо $A = Z$, $B = S_L$, $C = S_L$, $p = 1$, $q = 1$. Тоді з існування фундаментального класу в $H^1(g, S_L)$ випливає

Теорема. Коли g — p -група, то

$$H^q(g, S_L) = H^{q-1}(g, Z) \quad (\text{для всіх } q \in \mathbb{Z}).$$

За допомогою цієї теореми легко обчислити $H^1(G, A)$, і довести, що $H^1(G, A) = \pi_1(A_K)^*$ в нашому випадку (G — група Галуа максимального розширення Галуа поля K).

ЛІТЕРАТУРА

1. G. Shimura. Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field. Amer. J. of Math. 77, № 1, 1955.
2. H. Hasse. Existenz separabler zyklischer unverzweigter Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p ., J. Reine angew. Math. 172, 1934.
3. А. Картан, С. Эйленберґ. Гомологическая алгебра. М., 1960.
4. J. P. Serre. Sur les corps locaux... Bull. Soc. Math. France, 1961.
5. P. Samuel and O. Zarisky. Commutative algebra, vol. I. New York, 1959.
6. N. Bourbaki. Algèbre, Paris, 1949.
7. E. Artin, J. Tate. Class field theory. Princeton, 1959.

О. Н. ВВЕДЕНСКИЙ

КОГОМОЛОГИИ ПОДГРУППЫ ЛЮТЦ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Резюме

Вычисляются когомологии подгруппы Лютц и на основе этого доказывается двойственность в одномерном случае — гипотеза Шафаревича.

А. П. КОПИЛОВ

ВИМІРНИСТЬ ФУНКЦІЙ ПО ЖОРДАНУ ТА ІНТЕГРАЛ РІМАНА*

В роботі «Sur l'intégration des fonctions discontinues» (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 27, 1910, 361—450) А. Лебег відмічав, що коли при визначенні вимірної функції виходити з міри Жордана, то одержиться функція, інтегровна по Ріману. Однак в «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften» (II Analysis, III, 2, 1044) вказується, що визначення вимірності функцій по Жордану беззмістовне.

Нижче розглянемо, яким чином треба визначити вимірні функції, спираючись на поняття міри Жордана, щоб клас останніх співпав з класом функцій, інтегровних (R).

Позначення:

m — міра Лебега;

e — міра Жордана;

e_e — зовнішня міра Жордана;

e_i — внутрішня міра Жордана;

вимірна (J) множина — множина, вимірна по Жордану;

майже всюди (L) — з точністю до множини лебегової міри нуль;

майже всюди (J) — з точністю до множини жорданової міри нуль;

$S(E, f) = \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}$ — підграфік невід'ємної функції;

$\Gamma(E)$ — границя множини, $\Gamma(E) = \overline{E} \cdot \overline{cE}$; $\text{Int}(E) = E - \Gamma(E)$.

1°. Нехай функція $f(x)$ інтегровна (R) на відрізку $[a, b]$. Виникають питання: чи вимірні (J) множини $E(f \geq d)$ ($E(f \leq d)$); якщо так, то чи для всіх d . Перед тим як відповісти на ці питання, розглянемо твердження, що будуть потрібні нам у дальшому.

Теорема 1. Для того щоб невід'ємна обмежена функція $f(x)$ була інтегровна (R) на $[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб множина $S([a, b], f)$ була вимірною (J).

(Доведення див., наприклад: А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, 1934, 47).

Лема. Нехай E — вимірною (J) плоска множина. Тоді майже для всіх (L) y множини $E_y = \{(x, y) \in E, y \text{ — фіксоване число}\}$ вимірні (J).

Доведення. Справедливе твердження: для того щоб множина E була вимірною (J), необхідно і достатньо, щоб $e\Gamma(E) = 0$, або $m\Gamma(E) = 0$.

* Науковий керівник — доц. І. Н. Песня.

В нашому випадку $\text{Int}_y(E) \subset \text{Int}(E_y)$ і $(\bar{E})_y \supset (\bar{E}_y)$. Звідси

$$\Gamma(E_y) = (\bar{E}_y) - \text{Int}(E_y) \subset (\bar{E})_y - \text{Int}_y(E) = (\bar{E} - \text{Int}(E))_y = \Gamma_y(E).$$

Через те, що $m \Gamma(E) = 0$, то майже для всіх (L) у $m \Gamma_y(E) = 0$. Тому для цих у $m \Gamma(E_y) = 0$ і множини E_y вимірні (J) .

Лема доведена.

Відповіді на питання, поставлені на початку цього параграфа, дає теорема 2.

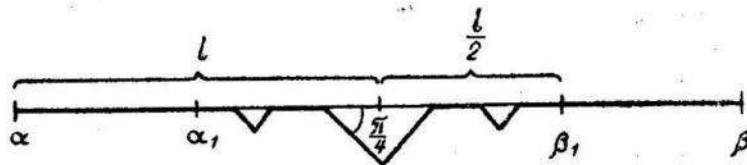
Теорема 2. Для того щоб невід'ємна обмежена функція $f(x)$ була інтегровна (R) на $[a, b]$, необхідно, щоб для майже всіх (L) d з проміжку $[0, \sup f(x)]$ множини $E(f \geq d)$ ($E(f \leq d)$) були вимірні (J) .

Ця теорема є наслідок теореми 1 і тільки що доведеної леми, бо для невід'ємної функції $E(f \geq d) = n p_x S_d([a, b], f)$.

У випадку множин $E(f \leq d)$ слід розглянути інтегровну (R) функцію $\varphi(x) = c - f(x)$, де c підібране так, що $c - f(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

2°. Наступний приклад показує, що теорему 2 не можна підсилити (не можна замінити вираз «майже для всіх (L) » виразом «майже для всіх (J) »).

Розглянемо на $[a, b]$ множину P типу канторової (досконалої) додатньої або нульової лебегової міри і монотонно зростаючу неперервну функцію, сталу на кожному доповняльному інтервалі P і таку, що множина значень її на вказаних інтервалах щільна на сегменті $[\min f(x), \max f(x)]$. Значення функції $f(x)$ на кожному з доповняльних інтервалів змінимо таким чином:



На $[\alpha_1, \beta_1]$ розглянемо множину типу канторової додатньої лебегової міри. На доповняльних інтервалах цієї множини замінимо функцію $f(x)$ ламаними (як вказано на рисунку). Побудована таким шляхом функція неперервна, але для неї маємо: множини $E(f \geq d)$ невимірні (J) для щільної на відрізку $[\min f(x), \max f(x)]$ множини і невимірної (J) . Останнє випливає з того, що канторова множина додатньої лебегової міри невимірна по Жордану.

3°. Проте, теорему 2 можна уточнити.

Теорема 2'. Для того щоб невід'ємна обмежена функція була інтегровна (R) на $[a, b]$, необхідно, щоб множини $E(f \geq d)$ ($E(f \leq d)$) були вимірні (J) , за винятком хіба що зчисленої множини.

Доведення. Множини $E(f \geq d)$ монотонні: якщо $d_1 > d_2$, то $E(f \geq d_1) \subset E(f \geq d_2)$. Тому функції $\varphi_e(d) = e_e E(f \geq d)$ і $\varphi_i(d) = e_i E(f \geq d)$ монотонні і мають, таким чином, хіба що зчисленні множини точок розриву. В кожній же точці, в якій вони разом неперервні, $\varphi_e(d) = \varphi_i(d)$. Це випливає з того, що для інтегровної (R) функції множина тих d , для яких множини $E(f \geq d)$ вимірні (J) , всюди щільна на відрізку $[0, \sup f(x)]$ (останнє є наслідок теореми 2).

Теорема доведена.

4°. Перейдемо до розгляду достатніх умов інтегровності функцій по Ріману.

Теорема 3. Для того щоб невід'ємна обмежена функція була інтегровна (R) на $[a, b]$, достатньо, щоб існувала на відрізку $[\inf f(x), \sup f(x)]$ всюди щільна множина $\{d\}$, для всіх елементів якої множини $E(f \geq d)$ ($E(f \leq d)$) вимірні (J) .

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[\inf f(x), \sup f(x) + \alpha]$ ($\alpha > 0$) на частини точками

$$\inf f(x) = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = \sup f(x) + \alpha$$

і множини

$$S_k = S(E_k, \alpha_k), \quad \tilde{S}_k = S(E_k, \alpha_{k+1}),$$

де

$$E_k = E(\alpha_k \leq f < \alpha_{k+1}) = E(f \geq \alpha_k) - E(f \geq \alpha_{k+1}) \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Мають місце включення

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k \subset S([a, b], f) \subset \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{S}_k.$$

Легко бачити, що $S_{k_1} \cdot S_{k_2} = \emptyset$, коли $k_1 \neq k_2$. Тому

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} e_i S_k &\leq e_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} S_k \right) \leq e_i S([a, b], f) \leq \\ &\leq e_e S([a, b], f) \leq e_e \left(\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{S}_k \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} e_e \tilde{S}_k. \end{aligned}$$

Звідси (на підставі рівностей, які легко перевіряються, $e_e S(E, h) = h e_e E$ і $e_i S(E, h) = h e_i E$) одержуємо

$$\begin{aligned} e_e S([a, b], f) - e_i S([a, b], f) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (e_e \tilde{S}_k - e_i S_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} e_e E_k - \alpha_k e_i E_k). \end{aligned}$$

Нехай $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1} \subset \{d\}$. Через те, що $\alpha_0, \alpha_n \in \{d\}$ також, то

$$e_e E_k = e_i E_k = e E_k = e E(f \geq \alpha_k) - e E(f \geq \alpha_{k+1})$$

і, таким чином,

$$e_e S([a, b], f) - e_i S([a, b], f) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) e E_k \leq \lambda \sum_{k=0}^{n-1} e E_k = \lambda(b-a),$$

де $\lambda = \max_k (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$.

λ можна підібрати так, щоб виконувалась нерівність $\lambda(b-a) < \varepsilon$, де $\varepsilon (> 0)$ — довільне число ($\{d\}$ — всюди щільна множина на сегменті $[\inf f(x), \sup f(x)]$). Звідси $e_e S([a, b], f) = e_i S([a, b], f)$ і $f(x)$ інтегровна (R) (див. теорему 1).

Якщо тепер всюди щільна на $[\inf f(x), \sup f(x)]$ множина $\{d\}$ така, що для всіх елементів її множини $E(f \leq d)$ вимірні (J) , то цей випадок можна звести до попереднього, розглядаючи функцію $\varphi(x) = c - f(x)$ ($c \geq f(x)$).

5°. З доведення теореми 3 та теореми 1 випливає, що для інтеграла Рімана можна дати таку побудову.

Нехай на $[a, b]$ задана невід'ємна функція $f(x)$, причому $f(x) < c < +\infty$.

Розіб'ємо сегмент $[a, c]$ на частини точками

$$a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = c$$

і віднесемо кожному півсегменту $[y_k, y_{k+1}]$ множини

$$E_k = E(y_k \leq f < y_{k+1}) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Розглянемо далі суми

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k e_k E_k \quad \text{і} \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} e_k E_k.$$

Нехай $\underline{s} = \sup \{s\}$, а $\bar{S} = \inf \{S\}$. Якщо $\underline{s} = \bar{S}$, то функція $f(x)$ інтегровна (R) на $[a, b]$ і

$$\underline{s} = \bar{S} = (R) \int_a^b f(x) dx.$$

6°. Одержані результати можна перенести на випадок, коли $f(x)$ — довільна обмежена функція одного змінного, а також коли $f(x)$ — функція багатьох змінних.

На цій підставі введемо означення: обмежена функція $f(x)$, задана в n -мірному просторі, називається вимірною по Жордану, якщо існує всюди щільна на осі Y множина $\{d\}$, для всіх елементів якої множини $E(f \geq d)$ вимірні по Жордану.

Тепер зв'язок між вимірністю функцій по Жордану та інтегровністю по Ріману можна описати таким чином.

Теорема 4. Для того щоб обмежена функція була інтегровна (R), необхідно і достатньо, щоб вона була вимірною по Жордану (згідно введеному означенню).

А. П. КОПИЛОВ

ИЗМЕРИМОСТЬ ФУНКЦИИ ПО ЖОРДАНУ И ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Резюме

Пусть $f(x)$ — ограниченная функция, заданная в n -мерном евклидовом пространстве. Имеет место утверждение:

Для того, чтобы $f(x)$ была интегрируема по Лебегу (на любом измеримом по Лебегу множестве), необходимо и достаточно, чтобы она была измерима по Лебегу.

В работе устанавливается признак интегрируемости, аналогичный сформулированному, для функций, интегрируемых по Риману. Оказывается, что если определить измеримой по Жордану функцию, для которой существует всюду плотное на оси Y множество $\{d\}$, обладающее свойством: множества $E(f \geq d)$ измеримы по Жордану для всех d из $\{d\}$, то класс измеримых в этом смысле функций совпадает с классом функций, интегрируемых по Риману.

В настоящей работе дано также построение интеграла Римана, основанное на понятии меры Жордана, подобное построению интеграла Лебега (5°).

Є. М. ПАРАСЮК

ПРО ОДИН ТИП СИСТЕМ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ*.

Спираючись на одержані недавно результати Я. Б. Лопатинського [1], в даній статті наводимо формулу для обчислення індекса одного типу систем сингулярних інтегральних рівнянь, що відповідають краєвим задачам для областей з безмежною кількістю кутових точок на границі. Вказаний тип задач визначається одним частинним випадком досить загальних кривих з кутовими точками — так званих кривих з обмеженим обертанням.

Означення. Згідно з Радоном [2], плоска неперервна спрямлювана крива S , що задається параметрично рівняннями

$$\begin{aligned}x &= x(s), \\ y &= y(s),\end{aligned} \quad 0 \leq s \leq l,$$

де s — довжина дуги, взята за параметр, називається кривою з обмеженим обертанням, якщо кут $\theta(s)$, означений за допомогою рівностей

$$\begin{aligned}\cos \theta(s) &= x'(s), \\ \sin \theta(s) &= y'(s),\end{aligned}$$

як функція довжини дуги s , може бути означений так, що його повна варіація на проміжку $[0, l]$ є величина обмежена. В дальшому функцію $\theta(s)$ будемо називати кутовою функцією.

Як відомо, $\theta(s)$ визначається для всіх $0 \leq s \leq l$, за винятком множини міри нуль, де вона може приймати довільні значення. Кутова функція як функція з обмеженою варіацією може мати лише зчисленну множину точок розриву I роду. Якщо позначити через $\theta(s+)$ [$\theta(s-)$] односторонні границі кутової функції в точці s відповідно справа (зліва), то враховуючи означення $\theta(s) \pmod{2\pi}$, ми можемо вважати, що в кожній точці s виконується умова

$$|\theta(s+) - \theta(s-)| \leq \pi.$$

Точка, в якій $|\theta(s+) - \theta(s-)| = \pi$, називається точкою загострення, а точка, в якій $|\theta(s+) - \theta(s-)| < \pi$, — кутовою точкою. Тоді, очевидно, крива S може мати лише скінченну кількість точок загострення і зчисленну множину кутових точок. Крива з обмеженим обертанням має ще й ту особливість, що в кожній її точці існує єдина одностороння дотична

* Науковий керівник — член-кор. АН УРСР Я. Б. Лопатинський.

(ліва і права). Для прикладу візьмемо точку, що є граничною точкою для послідовності кутових точок.

Лема. В кожній граничній точці кривої з обмеженим обертанням, існує єдина одностороння дотична (ліва і права). Справедливість цієї леми легко встановлюється від протилежного. Якщо б існували, наприклад, дві праві дотичні в якійсь граничній точці s , то, позначивши кут між ними через ε , легко побачити, що, починаючи з деякого місця на шляху до точки s , стрибок $|\Theta(s+) - \Theta(s-)|$ кутової функції буде не менший, ніж ε . А це суперечить тому, що $\Theta(s)$ — функція обмеженої варіації. Таким чином, кожна гранична точка є або точкою гладкості $[\Theta(s+) = \Theta(s-)]$, або кутовою точкою. У дальнішому ми будемо виключати точки загострення. Зауважимо, що криві з обмеженим обертанням можуть мати всюди щільну множину кутових точок. З усіх кривих з обмеженим обертанням ми виберемо такі, які не мають точок загострення і для яких замикання множини всіх кутових точок має міру нуль. Ці і тільки ці криві ми будемо використовувати у дальшому.

Цим і визначається наш частинний випадок кривих з обмеженим обертанням. Зрозуміло, що наш тип кривих також допускає зчисленну множину кутових точок, але уже не всюди щільну.

Розглянемо тепер краєву задачу для системи диференціальних рівнянь еліптичного типу в області, обмеженій кривою S нашого типу.

Як відомо [1], така задача приводиться до системи інтегральних рівнянь вигляду:

$$u(x) - \int_S \frac{1}{|x-y|} G(x, y, v(x), v(y), \frac{x-y}{|x-y|}) u(y) d_y s = f(x), \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $u(x)$ — стовпчик висоти p , $G(x, y, \xi, \eta, \zeta)$ — квадратна $p \times p$ матриця, неперервна при $x, y \in S$, $|\xi| = |\eta| = |\zeta| = 1$, $v(x)$ — одиничний вектор внутрішньої нормалі до S у точці x .

На матрицю $G(x, y, \xi, \eta, \zeta)$ допускається ще одна умова:

$$G(x, y, \xi, \eta, \zeta) = O[|(\xi, \zeta)| + |(\eta, \zeta)|]. \quad (A)$$

Виділимо окремо інтегральний оператор

$$Gu(x) = \int_S \frac{1}{|x-y|} G(x, y, v(x), v(y), \frac{x-y}{|x-y|}) u(y) d_y s.$$

Тоді попередня система інтегральних рівнянь коротко може бути записана так:

$$(I - G)u(x) = f(x),$$

де I — одиничний оператор. Зауважимо, що оскільки границя S може мати кутові точки, то оператор G не завжди є цілком неперервним.

У роботі [1] подається формула для обчислення індекса оператора $I - G$ при обмеженні, що границя S може мати лише скінченну кількість (n) кутових точок. Точки загострення також виключаються. Формула Я. Б. Лопатинського має такий вигляд:

$$\kappa = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\infty + \varepsilon_k i}^{+\infty + \varepsilon_k i} d_\lambda \arg \Delta_k(\lambda), \quad (B)$$

де

$$\Delta_k(\lambda) = \det[E - U_{k+1,k}^{(1,3)}(\lambda) \cdot U_{k,k+1}^{(3,1)}(\lambda)],$$

$$U_{k+1,k}^{(1,3)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2 \cos \omega_k}} G(a_k, a_k, -\tau_k \sin \omega_k -$$

$$- \nu_k \cos \omega_k, \nu_k, -\zeta_k(t)) dt,$$

$$U_{k,k+1}^{(3,1)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2 \cos \omega_k}} G(a_k, a_k, \nu_k, -\tau_k \sin \omega_k -$$

$$- \nu_k \cos \omega_k, \zeta_k(-t)) dt,$$

$$\zeta_k(t) = \frac{\left(e^{-\frac{t}{2}} \cos \omega_k - e^{\frac{t}{2}}\right) \tau_k - e^{-\frac{t}{2}} \sin \omega_k \cdot \nu_k}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2 \cos \omega_k}},$$

$$\lambda = \xi + i \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right), \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \varepsilon_1 = \operatorname{Im} \lambda = \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

a_k — кутова точка з номером k , ω_k — внутрішній кут при вершині a_k , τ_k , ν_k — одиничні вектори дотичної і нормалі відповідно до дуги S_k в точці a_k . (Тут мається на увазі, що границя поділена кутовими точками на n частин $S_1, S_2, \dots, S_n$, пронумерованих згідно з нумерацією самих кутових точок $a_1, a_2, \dots, a_n$).

Ми покажемо, що формула (B) має місце й у нашому випадку, який допускає наявність безмежної кількості кутових точок. Інакше кажучи, ми покажемо, що в наших умовах у формулі (B) можна переходити до границі при $n \rightarrow \infty$.

Наше доведення буде спиратися на три твердження.

Розглянемо спочатку ізольовані кутові точки a_k ; заключимо кожну із них у деякий окіл σ_k — дужку границі S . Інтегральний оператор, що відповідає цій дужці, позначимо через G_k :

$$G_k u(x) = \int_{\sigma_k} \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y) dy, \quad x \in \sigma_k.$$

Оператор G_k діє у функціональному просторі $L_\varepsilon(\sigma_k)$ з нормою

$$\|u(x)\| = \sum_{i=1}^p \int_{\sigma_k} r^{-\varepsilon}(x) |u_i(x)| dx,$$

де $0 < \varepsilon < 1$, $r(x) = |x - a_k|$.

Твердження 1. Для будь-якого малого числа $\rho > 0$ можна вибрати такі числа $\gamma > 0$ і $\delta > 0$, що $\|G_k\| < \rho$, якщо тільки $l_k \leq \gamma$ і $|\pi - \omega_k| \leq \delta$, де l_k — половина довжини дуги σ_k з центром у точці a_k . Тут і в дальшому мається на увазі, що кутові точки пронумеровані згідно з спаданням величини $|\pi - \omega_k|$.

Доведення проводиться на оцінці постійної, що входить у нерівність

$$\|G_k u(x)\| \leq K \|u(x)\|. \quad (*)$$

У нашому випадку на цю постійну припадає інтеграл

$$I_k(y) = \int_{\sigma_k} \frac{r^\varepsilon(y)r^{-\varepsilon}(x)}{|x-y|} \left| G\left(x, y, v(x), v(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) \right| d_x S, y \in \sigma_k.$$

Проектуючи дугу σ_k на ліву і праву дотичні в точці a_k , переходячи до локальної системи координат (τ_k, ν_k) з центром у точці a_k , а також використовуючи оцінку (А), ми одержимо, що

$$I_k(y) \leq \frac{2C}{\alpha\varepsilon(1-\varepsilon)} \left[5\varepsilon a l_k^\alpha + \alpha \operatorname{tg} \frac{|\pi - \omega_k|}{2} \right], \quad (2)$$

де C — взята з оцінки (А), a і α — постійні Ляпунова, $0 < \varepsilon < 1$.

Звідси й випливає, що можна знайти таку кутову точку a_k і заключити її в такий окіл σ_k , що норма оператора G_k може стати як завгодно малою.

Розглянемо тепер усю границю S , де кутові точки можуть входити і не ізольованим чином.

Множину всіх кутових точок кривої S позначимо через M . Тоді, за нашим допущенням, $\operatorname{mes} \bar{M} = 0$. Покриємо кожну кутову точку a_k кривої S деяким криволінійним інтервалом σ_k — куском кривої S так, щоб ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ був збіжний. Для конкретності будемо вважати, що всі

σ_k відкриті множини, $\sigma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ також відкрита множина, яка покриває всю множину $\bar{M}$. Оскільки $\bar{M}$ — замкнена, то $\sigma \setminus \bar{M}$ — відкрита. Отже, вона може бути представлена у вигляді об'єднання не більше як зчисленної кількості відкритих криволінійних інтервалів, що не перетинаються:

$$\sigma \setminus \bar{M} = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \dots$$

Довжину інтервала Δ_k позначимо через l_k . Очевидно, оскільки M — зчисленна множина, то можна вибрати таке її покриття σ , що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} l_k$ не тільки збігається, але й його сума може бути зроблена як завгодно малою.

Розглянемо тепер оператор G_σ :

$$G_\sigma u(x) = \int_{\sigma} \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, v(x), v(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y) d_y S, x \in \sigma.$$

Очевидно, можна записати:

$$G_\sigma u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k} \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, v(x), v(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y) d_y S, x \in \sigma.$$

Мається на увазі, що оператор G діє в просторі $L_\varepsilon(\sigma)$ з нормою:

$$\|u(x)\| = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^p \int_{\Delta_l} r^{-\varepsilon}(x) |u_i(x)| d_x S \right],$$

де $r(x)$ — віддаль точки x до найближчої кутової точки.

Зауважимо, що нумерація інтервалів Δ_k узгоджена з нумерацією кутових точок a_k .

Згідно з відомою теоремою [4], індекс оператора $I - G$ рівний індексу оператора $I - G_\sigma$.

Покажемо, що індекс останнього можна числити, враховуючи лише скінченну кількість кутових точок. А саме:

Твердження 2. Для будь-якого малого числа $\rho > 0$ можна підібрати такий номер N , що норма оператора

$$G_\sigma^N u(x) = \sum_{k=N}^{\infty} \int_{\Delta_k} \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, v(x), v(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y) d_y S$$

стане меншою, ніж ρ .

Справедливість цього твердження знову впливає з нерівності(*). У даному випадку на долю константи K припадає залишок ряду

$$I_N(y) = \sum_{k=N}^{\infty} \int_{\Delta_k} \frac{r^\varepsilon(y) r^{-\varepsilon}(x)}{|x-y|} \left| G\left(x, y, v(x), v(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) \right| d_x S.$$

Очевидно, для кожного інтеграла можна скористатися оцінкою (2). Тоді ми одержимо:

$$I_N(y) \leq \frac{2C}{a\varepsilon(1-\varepsilon)} \left\{ 5\varepsilon a \sum_{k=N}^{\infty} l_k^\alpha + a \sum_{k=N}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{|\pi - \omega_k|}{2} \right\}.$$

Число N будемо вважати настільки великим, що

$$\operatorname{tg} \frac{|\pi - \omega_k|}{2} \leq \frac{|\pi - \omega_k|}{2\varepsilon}, \text{ при } k \geq N.$$

Тоді

$$I_N(y) \leq \frac{2C}{a\varepsilon(1-\varepsilon)} \left\{ 5\varepsilon a \sum_{k=N}^{\infty} l_k^\alpha + \frac{a}{2\varepsilon} \sum_{k=N}^{\infty} |\pi - \omega_k| \right\}. \quad (3)$$

Очевидно, можна вибрати таке покриття множини $\bar{M}$, що залишок ряду $\sum_{k=N}^{\infty} l_k^\alpha$ може бути зроблений як завгодно малим, починаючи з деякого N .

Оскільки S — крива з обмеженим обертанням, то підбором N величина $\sum_{k=N}^{\infty} |\pi - \omega_k|$ також може бути зроблена як завгодно малою.

Звідси випливає, що за рахунок N норма оператора G_σ^N може бути зроблена як завгодно малою.

Все це означає, що кутові точки a_k , для яких величина $|\pi - \omega_k|$ досить мала, не впливають на індекс рівняння (1). Це дає можливість відкинути їх і обчислювати індекс лише по скінченній кількості кутових точок, для яких величина $|\pi - \omega_k|$ обмежена знизу.

Покажемо, що індекс рівняння (1) у випадку кривої з обмеженим обертанням можна обчислювати по формулі (В).

Твердження 3. Знайдеться такий номер N , що

$$\int_{-\infty + \varepsilon_i l}^{+\infty + \varepsilon_i l} d\lambda \arg \Delta_k(\lambda) = 0, \text{ якщо } k \geq N.$$

Враховуючи, що $\Delta_k(\lambda)$ також залежить і від кута ω_k , ми запишемо:

$$\Delta_k(\lambda, \omega_k) = \det [E - U_{k+1,k}^{(1,3)}(\lambda, \omega_k) \cdot U_{k,k+1}^{(3,1)}(\lambda, \omega_k)].$$

Переходячи до локальної системи координат (τ_k, ν_k) (див. [1]) і враховуючи оцінку (А), ми одержимо таку оцінку для елементів $u_{ij}(\lambda, \omega_k)$ матриць $U_{k+1,k}^{(1,3)}(\lambda, \omega_k)$, $U_{k,k+1}^{(3,1)}(\lambda, \omega_k)$:

$$|u_{ij}(\lambda, \omega_k)| \leq \frac{2\pi C}{\sin \varepsilon \pi} \sin \frac{|\pi - \omega_k|}{2}$$

і таку оцінку для елементів $w_{ij}(\lambda, \omega_k)$ матриці-добутку $U_{k+1,k}^{(1,3)}(\lambda, \omega_k) \times U_{k,k+1}^{(3,1)}(\lambda, \omega_k)$

$$|w_{ij}(\lambda, \omega_k)| \leq \frac{4\pi^2 C^2 p}{\sin^2 \varepsilon \pi} \sin^2 \frac{|\pi - \omega_k|}{2}, \quad (4)$$

де C — постійна з умови (А), $0 < \varepsilon < 1$.

Число ε вибрано так, щоб на прямий $\operatorname{Im} \lambda = \frac{1}{2} - \varepsilon$ ні один з визначників $\Delta_k(\lambda)$ не перетворювався в нуль, p — порядок матриці. Очевидно, можна записати

$$\Delta_k(\lambda, \omega_k) = 1 - \varphi(\lambda, \omega_k),$$

де $\varphi(\lambda, \omega_k)$ — функція, що одержується після розкриття вказаного визначника.

Використовуючи нерівність Адамара, а також (4), неважко одержати таку оцінку

$$|\varphi(\lambda, \omega_k)| \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i \left[\frac{4\pi^2 C^2 p^{3/2}}{\sin^2 \varepsilon \pi} \cdot \sin^2 \frac{\pi - \omega_k}{2} \right]^{p-i}. \quad (5)$$

Вибравши таке N , щоб при $k \geq N$

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_p^i \left[\frac{4\pi^2 C^2 p^{3/2}}{\sin^2 \varepsilon \pi} \cdot \sin^2 \frac{\pi - \omega_k}{2} \right]^{p-i} < 1, \quad (6)$$

ми переконуємось у справедливості твердження 3.

Висновок. Індекс рівняння (1) можна обчислювати по формулі (В), враховуючи лише ті кутові точки, для яких не виконується умова (6), а їх — скінченна кількість.

Примітка: В даній статті ми не наводимо повного доказу того, що наш оператор — Ф-оператор. Ми це робимо окремо в іншій статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Об одном типе сингулярных интегральных уравнений. Теор. і прикл. мат. Вид. Львівськ. ун-ту, № 2, 1963.
2. И. Радон. О краевых задачах для логарифмического потенциала, УМН I, вып. 3—4, 1946.
3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН XII, вып. 2, 1957.
4. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН XIII, вып. 2, 1958.

Е. М. ПАРАСЮК

Резюме

ОБ ОДНОМ ТИПЕ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуются системы интегральных уравнений, к которым приводятся граничные задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях, ограниченных кривыми, допускающих наличие бесконечного количества угловых точек.

В работе приводится формула для вычисления индекса указанного типа задач.

МЕХАНИКА

С. П. ГАВЕЛЯ, В. М. КОСАРЧИН

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПОЛОГОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ОБМЕЖЕНОЇ ЕЛІПСОМ І ПРЯМОКУТНИКОМ

Використання обґрунтованого в [1] методу розв'язування задач типу Диріхле для системи рівнянь Ляме дозволяє побудувати розв'язки задач про шарнірне і жорстке закріплення прямокутної в плані пологої сферичної оболонки. За допомогою цих результатів нижче будуються алгоритми знаходження розв'язків аналогічних задач для випадку еліптичного контура. При цьому використовуються певні потенціали, які дозволяють зберегти виконання граничних умов і на прямокутнику. В результаті одержуються розв'язки задач для областей, обмежених еліпсом і прямокутником, зокрема: прямокутник з еліптичним вирізом, еліптичний сектор. Слід відмітити, що заміна еліпса іншими аналітичними кривими не викликає принципіальних труднощів.

1. ПРОГИН ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТОЇ ПО КРИВОЛІНІЙНОМУ КОНТУРУ

Спочатку побудуємо в зручному для дальшого вигляді розв'язок задачі:

$$\Delta \Delta w(x) = F(x) \text{ при } x \in \Omega, \quad (1)$$

$$w(x) = \Delta w(x) = 0 \text{ при } x \in S. \quad (2)$$

Тут $x = (x_1, x_2)$ — точка двовимірної області Ω з контуром S , рівняння якого

$$x = x(t) \quad (x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), 0 \leq t \leq 2\pi).$$

Шукана функція $w = w(x)$ може бути інтерпретована як прогин деякої пластинки під дією заданого нормального навантаження $F(x)$.

Нехай

$$\Delta w = v \quad (3)$$

в Ω , так що

$$\Delta v = F \quad (4)$$

в Ω і, крім цього,

$$w|_S = 0 \quad (5)$$

$$v|_S = 0. \quad (6)$$

Розв'язок $v_0 = v_0(x)$ задачі (4), (6) для прямокутної області — $\alpha_1 \leq x_1 \leq \alpha_1$, $-\alpha_2 \leq x_2 \leq \alpha_2$ запишемо у вигляді

$$v_0 = - \sum_{l,m=1,2,3,\dots} \frac{4a_1^2 a_2^2 F_{lm}}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right), \quad (7)$$

якщо

$$F = \sum_{l,m} F_{lm} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right). \quad (7'')$$

Розв'язок $v = v(x)$ задачі (4), (6) представляється у вигляді:

$$v(x) = v_0(x) - \int_0^{2\pi} g_0(x, \xi(t)) \mu(t) dt, \quad (8)$$

де $g_0 = g_0(x, \xi)$ — функція Гріна

$$g_0 = - \sum_{lm} \frac{4a_1 a_2}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{\xi_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{\xi_2}{a_2} + 1 \right) \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right). \quad (9)$$

При цьому має місце також розклад

$$\mu(t) = \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} (\mu_{1n} \cos nt + \mu_{2n} \sin nt). \quad (10)$$

Невідомі коефіцієнти μ_{1n} і μ_{2n} можуть бути, взагалі кажучи, визначені з умови (6), яка набирає вигляду рівняння:

$$-v_0(x(t)) = - \int_0^{2\pi} g_0(x(t), \xi(\tau)) \mu(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Нехай

$$P_{lmn} = \int_0^{2\pi} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{\xi_1(t)}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{\xi_2(t)}{a_2} + 1 \right) \cos nt dt,$$

$$Q_{lmn} = \int_0^{2\pi} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{\xi_1(t)}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{\xi_2(t)}{a_2} + 1 \right) \sin nt dt.$$

Тоді

$$\sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1(t)}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2(t)}{a_2} + 1 \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0,1,2,\dots} (P_{lmn} \cos nt + Q_{lmn} \sin nt).$$

З (11) отримаємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{l,m} \frac{4a_1 a_2 F_{lm}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} \sum_n (P_{lmn} \cos nt + Q_{lmn} \sin nt) = \\ & = \sum_{\substack{l,m; \\ k=0,1,2,\dots}} \frac{4}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} \sum_n (P_{lmn} \cos nt + Q_{lmn} \sin nt) (\mu_{1k} P_{lmk} + \mu_{2k} Q_{lmk}). \end{aligned}$$

Звідси одержуємо систему рівнянь для визначення μ_{1k} , μ_{2k} :

$$\begin{aligned} \sum_{l,m,k} \frac{P_{lmn} P_{lmk}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} \mu_{1k} + \sum_{l,m,k} \frac{P_{lmn} Q_{lmk}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} \mu_{2k} &= \sum_{l,m} \frac{a_1 a_2 P_{lmn}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} F_{lm} \\ \sum_{l,m,k} \frac{Q_{lmn} P_{lmk}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} \mu_{1k} + \sum_{l,m,k} \frac{Q_{lmn} Q_{lmk}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} \mu_{2k} &= \sum_{l,m} \frac{a_1 a_2 Q_{lmn}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} F_{lm}. \end{aligned} \quad (12)$$

Розв'язок цієї системи запишемо у вигляді

$$\mu_{1k} = \sum_n R_{1kn} q_n; \quad \mu_{2k} = \sum_n R_{2kn} q_n. \quad (13)$$

Тут R_{1kn} і R_{2kn} — елементи оберненої матриці системи (12), q_n — стовпчик

$$q_n = \begin{pmatrix} \sum_{l,m} \frac{a_1 a_2 P_{lmn}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} F_{lm} \\ \sum_{l,m} \frac{a_1 a_2 Q_{lmn}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} F_{lm} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тоді розв'язок $v = v(x)$ набере форми

$$\begin{aligned} v(x) = \sum_{l,m} \left\{ -\frac{4a_1^2 a_2^2 F_{lm}}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)} + \frac{4a_1 a_2}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)} \sum_n \left[P_{lmn} \sum_k R_{1nk} q_k + \right. \right. \\ \left. \left. + Q_{lmn} \sum_k R_{2nk} q_k \right] \right\} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Позначаючи далі

$$\sum_n P_{lmn} R_{1nk} = M_{1lmk}; \quad \sum_n Q_{lmn} R_{2nk} = M_{2lmk}, \quad (16)$$

$$\sum_k (M_{1lmk} q_k + M_{2lmk} q_k) = \sum_k (M_{1lmk} + M_{2lmk}) q_k = F_{lm}^*, \quad (17)$$

або

$$F_{lm}^* = \sum_{kn} N_{lmkn} F_{kn}, \quad (18)$$

$$N_{lmkn} = \frac{a_1 a_2}{k^2 a_2^2 + n^2 a_1^2} \sum_{r=1,2,3} (M_{1lmr} P_{knr} + M_{2lmr} Q_{knr}), \quad (19)$$

одержимо $v(x)$ у вигляді

$$v(x) = \sum_{l,m} \left(\frac{F_{lm}^*}{a_1 a_2} - F_{lm} \right) \frac{4a_1^2 a_2^2}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right) \quad (20)$$

або

$$v(x) = \sum_{l,m} v_{lm} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right), \quad (21)$$

де

$$v_{lm} = \left(\frac{F_{lm}^*}{a_1 a_2} - F_{lm} \right) \frac{4 a_1^2 a_2^2}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)}. \quad (21'')$$

Позначимо далі

$$\left(\sum_{l,m} \frac{a_1 a_2 P_{lmn}}{l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2} v_{lm} \right) = q_n^* \quad (22)$$

і

$$\sum_k (M_{1lmk} q_k^* + M_{2lmk} q_k^*) = F_{lm}^{**}. \quad (23)$$

Тоді буде

$$w(x) = \sum_{l,m} w_{lm} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right), \quad (24)$$

де

$$w_{lm} = \left(\frac{F_{lm}^{**}}{a_1 a_2} - v_{lm} \right) \frac{4 a_1^2 a_2^2}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)}. \quad (25)$$

Формули (15), (18), (22''), (23), (24) і (26) складають алгоритм, який визначає коефіцієнти w_{lm} шуканого прогину по довільно заданому нормальному навантаженню.

Підстановка (18) в (22''), а потім в (24) і (26) приводить до виразу

$$G(x, \xi) = \sum_{k,l,m,n} G_{klmn} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right) \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{\xi_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{\xi_2}{a_2} + 1 \right). \quad (26)$$

Цей вираз (26) являє собою розв'язок задачі про прогин $G(x, \xi)$ пластинки під дією сили, зосередженої в точці ξ .

Примітка. Густина $\mu(t) = \mu^*(t) \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}$ потенціалу (11) може бути знайдена також і з інтегрального рівняння другого роду

$$\mu^*(t) = 2\varphi(t) - \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_\xi} (g_0(x(t), \xi(\tau))) \mu^*(\tau) d\tau$$

(n — нормаль, зовнішня до еліпса (тобто внутрішня до області))

$$\varphi(t) = \frac{\partial v_0(x(t))}{\partial n_x}.$$

2. ШАРНІРНЕ ЗАКРІПЛЕННЯ ОБОЛОНКИ

Систему рівнянь, які описують пружну рівновагу тонкої пологої сферичної оболонки, запишемо у вигляді

$$(1 - \kappa) \Delta u + 2\kappa \partial \partial' u = - \frac{4\kappa}{R} \partial w \quad (1.2)$$

$$\Delta \Delta w + \frac{12}{h^2} \cdot \frac{1+\sigma}{R} \partial' u = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} F, \quad (2.2)$$

де

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \partial = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \partial' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \kappa = \frac{1+\sigma}{3-\sigma}.$$

Умови закріплення контура S будуть:

$$u|_S = 0, \quad (3.2)$$

$$w|_S = \Delta w|_S = 0. \quad (4.2)$$

Нехай

$$u = \sum_{l,m} u_{lm} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right), \quad (5.2)$$

$$\cos \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) = \sum_i \gamma_{li}(\alpha_1) \sin \frac{i\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right), \quad (6.2)$$

$$\cos \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right) = \sum_j \gamma_{mj}(\alpha_2) \sin \frac{j\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right), \quad (7.2)$$

$$\sum_l \frac{l\pi}{2a_1} u_{1lm} \gamma_{li}(\alpha_1) = u_{1lm}^*, \quad \sum_m \frac{m\pi}{2a_2} u_{2lm} \gamma_{mj}(\alpha_2) = u_{2lm}^*.$$

Тоді

$$\partial' u = \sum_{lm} (u_{1lm}^* + u_{2lm}^*) \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right).$$

Нехай далі

$$\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} F - \frac{12}{h^2} \frac{1+\sigma}{R} \partial' u = \bar{F};$$

$$\bar{F}_{lm} = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} F_{lm} - \frac{12}{h^2} \frac{1+\sigma}{R} (u_{1lm}^* + u_{2lm}^*), \quad (8.2)$$

$$\bar{q}_{1k} = \sum_{ij} \bar{F}_{ij} \frac{P_{ijk} 4a_1^2 a_2^2}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + j^2 a_1^2)}; \quad \bar{q}_{2k} = \sum_{ij} \bar{F}_{ij} \frac{Q_{ijk} 4a_1^2 a_2^2}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + j^2 a_1^2)};$$

$$\bar{F}_{lm}^* = \sum_k (M_{1lmk} \bar{q}_{1k} + M_{2lmk} \bar{q}_{2k}) \quad (9.2)$$

(P_{ijk} , Q_{ijk} , M_{1lmk} , M_{2lmk} — визначені вище).

Враховуючи викладене в попередньому пункті, одержимо

$$w_{lm} = \left(\frac{\bar{F}_{lm}^*}{a_1 a_2} - v_{lm} \right) \frac{4a_1^2 a_2^2}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)} \quad (10.2)$$

$$v_{lm} = \left(\frac{\bar{F}_{lm}^*}{a_1 a_2} - \bar{F}_{lm} \right) \frac{4a_1^2 a_2^2}{\pi^2 (l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)}. \quad (11.2)$$

Як показано в [1], при заданому $\mathcal{W}$, розв'язок $u = u(x)$ задачі (1.2), (3.2) представляється у вигляді

$$u = \sum_{q=0}^{\infty} x^q u_q,$$

причому коефіцієнти u_{1q} , u_{2q} визначаються задачами

$$\Delta u_q = \Delta u_{q-1} - 2\partial\partial' u_{q-1} - \frac{4}{R} \partial \mathcal{W}_{q-1} \quad (12.2)$$

$$u_q|_S = 0, \quad (13.2)$$

де

$$\mathcal{W} = \sum_{q=0}^{\infty} x^q \mathcal{W}_q.$$

Задачі (12.2), (13.2) запишемо так

$$\Delta u_{1q} = \Phi_{1q-1} \quad (14.2)$$

$$\Delta u_{2q} = \Phi_{2q-1}. \quad (15.2)$$

І якщо

$$\Phi_{l,q-1} = \sum_{lm} \Phi_{lq-1;lm} \sin \frac{l\pi}{2} \left(\frac{x_1}{a_1} + 1 \right) \sin \frac{m\pi}{2} \left(\frac{x_2}{a_2} + 1 \right), \quad (16.2)$$

то

$$\begin{aligned} \Phi_{1,q-1;lm} = & \left(\frac{l^2\pi^2}{4a_1^2} - \frac{m^2\pi^2}{4a_2^2} \right) u_{1q-1;lm} - 2 \sum_{ij} \frac{ij\pi^2}{4a_1a_2} \gamma_{il}(a_1) \gamma_{jm}(a_2) u_{2q-1ij} - \\ & - \frac{4}{R} \sum_i \frac{i\pi}{2a_1} \gamma_{il}(a_1) \mathcal{W}_{q-1,lm}; \end{aligned} \quad (17.2)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2q-1;lm} = & \left(\frac{m^2\pi^2}{4a_2^2} - \frac{l^2\pi^2}{4a_1^2} \right) u_{2q-1;lm} - 2 \sum_{ij} \frac{ij\pi^2}{4a_1a_2} \gamma_{il}(a_1) \gamma_{jm}(a_2) u_{1q-1ij} - \\ & - \frac{4}{R} \sum_i \frac{i\pi}{2a_2} \gamma_{im}(a_2) \mathcal{W}_{q-1,li}. \end{aligned}$$

Згідно з формулою (23) одержуємо

$$u_{l,q;lm} = \left(\frac{\Phi_{lq-1,lm}^*}{a_1a_2} - \Phi_{l,q-1,lm} \right) \frac{4a_1^2a_2^2}{\pi^2(l^2a_1^2 + m^2a_2^2)}, \quad (18.2)$$

де

$$\Phi_{l,q-1,lm}^* = \sum_{kn} N_{lmkn} \Phi_{l,q-1;kn}. \quad (19.2)$$

До цих рекурентних співвідношень слід приєднати також (10.2) і (11.2) або

$$\mathcal{W}_{q;lm} = \sum_{kn} G_{knlm} \bar{F}_{qkn}, \quad (20.2)$$

де

$$G_{knlm} = \sum_{ij} B_{ijlm} B_{knij}; \quad B_{knlm} = \frac{4\alpha_1^2 \alpha_2^2}{\pi^2 (l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2)} \left(\frac{N_{lmkn}}{\alpha_1 \alpha_2} - [kn]_{lm} \right). \quad (21.2)$$

Рекурентні формули (12.2) — (20.2) становлять алгоритм послідовних наближень.

В [1] доведена збіжність рядів $u = \sum_q x^q u_q$ при $x < 1$ (якщо $\frac{1}{R} = 0$).

Оскільки в нашому випадку $x = \frac{1+\sigma}{3-\sigma} \ll 1$, то збіжність застосованого методу буде зберігатись при умові достатньої пологості оболонки (тобто достатньої малості величини $\frac{1}{R}$).

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Об одном методе решения второй основной задачи теории упругости. «Теоретическая и прикладная математика», в. I, 1958.

С. П. ГАВЕЛЯ, В. Н. КОСАРЧИН

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПСОМ И ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ

Резюме

В статье построен алгоритм нахождения перемещений в полой сферической оболочке, ограниченной эллипсом и прямоугольником, находящейся под действием равномерно распределенной по поверхности нормальной нагрузки.

Предварительно решена в удобном для дальнейшего виде аналогичная задача для пластинки.

Перемещения u , v и w получаются в результате решения рекуррентных задач типа Дирихле для уравнения Лапласа. Решения представляются двойными тригонометрическими рядами.

Е. І. ЛУНЬ

ДО ТЕОРІЇ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК*

1. В статті наводяться основні співвідношення пружних оболонок при умові [10, 8], що прямолінійний, нормальний до середньої поверхні, елемент оболонки до деформації зберігає свою довжину, залишаючись прямолінійним, але не нормальним до середньої поверхні після деформації, і що нормальним напруженням σ_{zz} можна нехтувати в порівнянні з іншими компонентами тензора напруження. При цьому маємо три незалежні компоненти пружного зміщення середньої поверхні u , v , w і дві незалежні компоненти кута повороту нормалі до середньої поверхні γ_3 і γ_4 , де γ_3 — кут повороту нормалі в сторону вектора $\vec{\tau}_\alpha$, γ_4 — кут повороту нормалі в сторону вектора $\vec{\tau}_\beta$. Векторизований кут повороту пружного середовища має вигляд:

$$\omega = \omega_\alpha \vec{\tau}_\alpha + \omega_\beta \vec{\tau}_\beta + \omega_n \vec{n},$$

де

$$\omega_\alpha = \frac{\gamma_2 - \gamma_4}{2}, \quad \omega_\beta = \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{2}, \quad \omega_n = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2};$$

γ_1 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\alpha$ в сторону вектора $\vec{n}$,
 γ_2 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\beta$ в сторону вектора $\vec{n}$,
 ω_1 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\alpha$ в сторону $\vec{\tau}_\beta$,
 ω_2 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\beta$ в сторону $\vec{\tau}_\alpha$.

Компоненти зміщення на еквідистантній поверхні мають вигляд:

$$u^* = u + z \gamma_3, \quad v^* = v + z \gamma_4, \quad w^* = w, \quad (1.1)$$

а компоненти деформації на еквідистантній поверхні так виражаються через компоненти деформації середньої поверхні:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha}^* &= \frac{e_{\alpha\alpha} + z \chi_1}{1 + \frac{z}{R_1}}, & e_{\beta\beta}^* &= \frac{e_{\beta\beta} + z \chi_2}{1 + \frac{z}{R_2}}, \\ e_{\alpha n}^* &= \frac{e_{\alpha n}}{1 + \frac{z}{R_1}}, & e_{\beta n}^* &= \frac{e_{\beta n}}{1 + \frac{z}{R_2}}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

* Науковий керівник — проф. М. П. Шереметьєв.

$$e_{\alpha\beta}^* = \frac{e_{\alpha\beta} + z \left[\frac{\omega_1}{R_2} + \frac{\omega_2}{R_1} + \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \tau_1 + \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \tau_2 \right]}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)}.$$

Зв'язок між компонентами деформації середньої поверхні і компонентами її зміщення та кутами повороту має вигляд:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{v}{AB} + \frac{w}{R_1}, \quad e_{\beta\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{u}{AB} + \frac{w}{R_2}, \\ e_{\alpha\beta} &= \omega_1 + \omega_2 = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right), \\ e_{\alpha n} &= \gamma_3 + \gamma_1 = \gamma_3 + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}, \\ e_{\beta n} &= \gamma_4 + \gamma_2 = \gamma_4 + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}, \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\gamma_4}{AB}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \gamma_4}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\gamma_3}{AB}, \\ \tau_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_4}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\gamma_3}{AB}, \quad \tau_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \gamma_3}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\gamma_4}{AB}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Введемо нові компоненти деформації

$$\tau_1^* = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1}, \quad \tau_2^* = \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2}, \quad (1.4)$$

тоді

$$e_{\alpha\beta}^* = \frac{\left(1 - \frac{z^2}{R_1 R_2}\right) e_{\alpha\beta} + z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \tau_1^* + z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \tau_2^*}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \quad (1.5)$$

і одержуємо, що компоненти деформації $e_{\alpha\alpha}^*$, $e_{\beta\beta}^*$, $e_{\alpha\beta}^*$, $e_{\alpha n}^*$, $e_{\beta n}^*$ в довільній точці оболонки виражаються через компоненти деформації середньої поверхні оболонки $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, κ_1 , κ_2 , τ_1^* і τ_2^* .

Зв'язок між компонентами деформації середньої поверхні оболонки при прийнятій умові виражається такими чотирма рівняннями нерозривності деформації:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A \tau_1^*}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \tau_2^* + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \kappa_1 - \frac{\partial B \kappa_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial B e_{\beta\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} e_{\alpha\alpha} - \frac{\partial A e_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \right. \\ \left. - \frac{R_1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} e_{\alpha\beta} - \frac{AB}{R_2} e_{\alpha n} \right) = 0, \\ \frac{\partial B \tau_2^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tau_1^* + \frac{\partial A}{\partial \beta} \kappa_2 - \frac{\partial A \kappa_1}{\partial \beta} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial A e_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} e_{\beta\beta} - \frac{\partial B e_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \right. \\ \left. - \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} e_{\alpha\beta} - \frac{AB}{R_1} e_{\beta n} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{R_2} + \frac{x_2}{R_1} + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial B e_{\beta\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} e_{\alpha\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} e_{\alpha\beta} - \frac{A}{2} \frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{AB}{R_2} e_{\alpha n} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\partial A e_{\alpha\alpha}}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} e_{\beta\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} e_{\alpha\beta} - \frac{B}{2} \frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{AB}{R_1} e_{\beta n} \right) \right] \right\} = 0, \\ \tau_2^* - \tau_1^* + \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B e_{\beta n}}{\partial \alpha} - \frac{\partial A e_{\alpha n}}{\partial \beta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Якщо в (1.6) покласти $e_{\alpha n} = e_{\beta n} = 0$, то одержимо рівняння нерозривності деформації, які відповідають гіпотезі Кірхгофа—Лява.

Виходячи з шостого рівняння рівноваги

$$S_1 - S_2 + \frac{H_1}{R_1} - \frac{H_2}{R_2} = 0,$$

введемо нову величину

$$S_{\alpha\beta} = S_1 - \frac{H_2}{R_2} = S_2 - \frac{H_1}{R_1}, \quad (1.7)$$

тоді для зусиль S_1 і S_2 матимемо

$$S_1 = S_{\alpha\beta} + \frac{H_2}{R_2}, \quad S_2 = S_{\alpha\beta} + \frac{H_1}{R_1}, \quad (1.8)$$

і шосте рівняння рівноваги перетворюється в тотожність незалежно від виразів для $S_{\alpha\beta}$, H_1 і H_2 .

П'ять диференціальних рівнянь рівноваги для компонентів T_1 , T_2 , $S_{\alpha\beta}$, N_1 , N_2 , G_1 , G_2 , H_1 і H_2 набирають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B T_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A \left(S_{\alpha\beta} + \frac{H_1}{R_1} \right) \right] + \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(S_{\alpha\beta} + \frac{H_2}{R_2} \right) + \frac{AB}{R_1} N_1 + ABX = 0, \\ \frac{\partial A T_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[B \left(S_{\alpha\beta} + \frac{H_2}{R_2} \right) \right] + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(S_{\alpha\beta} + \frac{H_1}{R_1} \right) + \frac{AB}{R_2} N_2 + ABY = 0, \\ \frac{\partial B N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A N_2}{\partial \beta} - AB \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) + ABZ = 0, \\ \frac{\partial B H_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} H_2 + \frac{\partial A G_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} G_1 - AB N_2 - ABE = 0, \\ \frac{\partial A H_2}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} H_1 + \frac{\partial B G_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} G_2 - AB N_1 + ABF = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Варіація пружного потенціалу оболонки представляється у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W = T_1 \delta e_{\alpha\alpha} + T_2 \delta e_{\beta\beta} + S_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + N_1 \delta e_{\alpha n} + N_2 \delta e_{\beta n} + \\ + G_1 \delta x_1 + G_2 \delta x_2 + H_1 \delta \tau_1^* + H_2 \delta \tau_2^*, \end{aligned} \quad (1.10)$$

звідки одержуємо формули, аналогічні формулам Гріна теорії пружності для написання співвідношень пружності для оболонки:

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\alpha}}, \quad T_2 = \frac{\partial W}{\partial e_{\beta\beta}}, \quad S_{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\beta}}, \quad N_1 = \frac{\partial W}{\partial e_{\alpha n}}, \quad H_2 = \frac{\partial W}{\partial e_{\beta n}}, \\ G_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad G_2 = \frac{\partial W}{\partial x_2}, \quad H_1 = \frac{\partial W}{\partial \tau_1^*}, \quad H_2 = \frac{\partial W}{\partial \tau_2^*}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Вираз пружного потенціалу для ізотропної пружної оболонки при прийнятих нами умовах і позначеннях має вигляд:

$$W = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \left[\frac{E}{1-\nu^2} (e_{\alpha\alpha}^{*2} + e_{\beta\beta}^{*2}) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} e_{\alpha\alpha}^* e_{\beta\beta}^* + \frac{E}{2(1+\nu)} (e_{\alpha\beta}^{*2} + e_{\alpha n}^{*2} + e_{\beta n}^{*2}) \right] \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz. \quad (1.12)$$

Підставивши в (1.12) вирази $e_{\alpha\alpha}^*$, $e_{\beta\beta}^*$, $e_{\alpha n}^*$ і $e_{\beta n}^*$ із (1.2) і $e_{\alpha\beta}^*$ із (1.5), проінтегрувавши по z і відкидаючи в розкладах одержаних при цьому логарифмів члени, порядку $\frac{h^2}{R_i^2}$ і вищого в порівнянні з одиницею, одержимо:

$$W = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[e_{\alpha\alpha}^2 + e_{\beta\beta}^2 + \frac{h^2}{3} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{2h^2}{3} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) (e_{\alpha\alpha} x_1 - e_{\beta\beta} x_2) \right] + \\ + \frac{2E\nu h}{1-\nu^2} \left(e_{\alpha\alpha} e_{\beta\beta} + \frac{h^2}{3} x_1 x_2 \right) + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left\{ e_{\alpha\beta}^2 + e_{\alpha n}^2 + e_{\beta n}^2 + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{3} \left[(\tau_1^* + \tau_2^*)^2 + \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) e_{\alpha\beta}^2 - \frac{2}{R_1} e_{\alpha\beta} \tau_1^* - \frac{2}{R_2} e_{\alpha\beta} \tau_2^* \right] \right\}. \quad (1.13)$$

Співвідношення пружності, які одержуються з (1.13) за формулами (1.11), мають вигляд

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[e_{\alpha\alpha} + \nu e_{\beta\beta} + \frac{h^2}{3} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) x_1 \right], \\ T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[e_{\beta\beta} + \nu e_{\alpha\alpha} - \frac{h^2}{3} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) x_2 \right], \\ S_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left\{ \left[1 + \frac{h^2}{3} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \right] e_{\alpha\beta} - \frac{h^2}{3} \left(\frac{\tau_1^*}{R_1} + \frac{\tau_2^*}{R_2} \right) \right\}, \\ N_1 = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\alpha n}, \quad N_2 = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\beta n}, \\ G_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left[x_1 + \nu x_2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) e_{\alpha\alpha} \right], \\ G_2 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left[x_2 + \nu x_1 - \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) e_{\beta\beta} \right], \\ H_1 = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)} \left(\tau_1^* + \tau_2^* - \frac{e_{\alpha\beta}}{R_1} \right), \\ H_2 = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)} \left(\tau_1^* + \tau_2^* - \frac{e_{\alpha\beta}}{R_2} \right). \quad (1.14)$$

Співвідношення пружності (1.14) не є остаточними. Їх вигляд залежить від форми оболонки і від виду її завантаження. Вигляд співвідношень пружності в кожному окремому випадку може бути встановлений експериментально або іншими способами дослідження. Найбільш прості співвідношення пружності, запропоновані В. В. Новожиловим і Л. І. Балабухом, з доданими до них співвідношеннями для N_1 і N_2 мають вигляд:

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (e_{\alpha\alpha} + \nu e_{\beta\beta}), \quad T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (e_{\beta\beta} + \nu e_{\alpha\alpha}),$$

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta} &= \frac{Eh}{1+\nu} e_{\alpha\beta}, \quad N_1 = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\alpha n}, \quad N_2 = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\beta n}, \\
G_1 &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu\kappa_2), \quad G_2 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu\kappa_1), \\
H_1 &= H_2 = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)} (\tau_1^* + \tau_2^*).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Підставивши вирази зусиль і моментів з співвідношень пружності в рівняння рівноваги (1. 9) і замінивши компоненти деформації через u, v, w, γ_3 і γ_4 згідно з (1. 3) і (1. 4), одержимо п'ять рівнянь рівноваги оболонки в компонентах u, v, w, γ_3 і γ_4 . Якщо, наприклад, співвідношення пружності взяти у вигляді (1. 15), то вказані рівняння будуть такі:

$$\begin{aligned}
&\left\{ AB\Delta - \nu \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{AB}{R_1} - \frac{1}{AB} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^2 \right] - \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{AB}{R_1^2} \right] \right\} u + \left[\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3-\nu}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] v + \\
&\quad + \left[\left(\frac{\nu}{R_2} + \frac{3-\nu}{2R_1} \right) B \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_2} \right) - \frac{1}{R_1} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] w + \frac{1-\nu}{2} \frac{AB}{R_1} \gamma_3 + X^* = 0, \\
&\left\{ AB\Delta + \nu \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{AB}{R_2} - \frac{1}{AB} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^2 \right] - \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{AB}{R_2^2} \right] \right\} v + \left[\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{3-\nu}{2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \right] u + \\
&\quad + \left[\left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{3-\nu}{2R_2} \right) A \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_1} \right) - \frac{1}{R_2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] w + \frac{1-\nu}{2} \frac{AB}{R_2} \gamma_4 + Y^* = 0, \tag{1.16} \\
&\left[\frac{1-\nu}{2} AB\Delta - \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) AB \right] w - \left[\left(\frac{\nu}{R_2} + \frac{3-\nu}{2R_1} \right) B \frac{\partial}{\partial \alpha} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_1} \right) + \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] u - \left[\left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{3-\nu}{2R_2} \right) A \frac{\partial}{\partial \beta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_2} \right) + \left(\frac{\nu}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] v + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial B \gamma_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial A \gamma_4}{\partial \beta} \right) + Z^* = 0, \\
&\left\{ AB\Delta - \nu \frac{AB}{R_1 R_2} - \frac{1}{AB} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^2 \right] - \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{3(1-\nu)}{h^2(1+\nu)} AB \right] \right\} \gamma_4 + \left[\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3-\nu}{2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \right] \gamma_3 - \\
&\quad - \frac{3(1-\nu)}{2h^2} \left(A \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{AB}{R_2} v \right) + E^* = 0.
\end{aligned}$$

$$\left\{ AB\Delta - \nu \frac{AB}{R_1 R_2} - \frac{1}{AB} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^2 \right] - \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{3(1-\nu)}{h^2(1+\nu)} AB \right] \gamma_3 + \left[\frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3-\nu}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] \gamma_4 - \right. \\ \left. - \frac{3(1-\nu)}{2h^2} \left(B \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{AB}{R_1} u \right) + F^* = 0, \right.$$

де $\Delta = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]$ — оператор Лапласа в криволінійних координатах,

$$X^* = \frac{(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h} X,$$

$$Y^* = \frac{(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h} Y, \quad Z^* = \frac{(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h} Z,$$

$$E^* = -\frac{3(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h^3} E, \quad F^* = \frac{3(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h^3} F.$$

Замінивши в рівняннях нерозривності (1. 5) компоненти деформації через зусилля і моменти, користуючись співвідношеннями пружності і перетворивши одержані рівності за допомогою рівнянь рівноваги (1. 9), одержимо рівняння нерозривності деформації в зусиллях і моментах. Якщо, наприклад, в співвідношеннях пружності (1. 14) у виразах для T_1 і T_2 відкинути ε_1 і ε_2 , то одержані при цьому відповідні рівняння нерозривності деформації в зусиллях і моментах матимуть вигляд:

$$2(1+\nu) \left\{ \frac{\partial AH_1}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial BG_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} G_2 \right) + \frac{h^2}{6R_1} \left[A \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{AH_1}{R_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{H_2}{R_1} - \left(\frac{2}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) ABN_1 \right] + A \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{S_{\alpha\beta}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + \frac{3}{h^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{H_2 - H_1}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{R_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^2} \left(\frac{H_1}{R_2} - \frac{H_2}{R_1} \right) \right] \right\} - B \frac{\partial(G_1 + G_2)}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{3} \left(\frac{1}{R_1} \frac{\partial BT_1}{\partial \alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{T_1}{R_2} + \frac{B}{R_1} \frac{\partial T_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial BT_2}{\partial \alpha} \frac{1}{R_2} + \frac{\partial BT_2}{\partial \alpha} \frac{1}{R_1} \right) + \frac{(1+\nu)h^2}{6R_1} ABX = 0,$$

$$2(1+\nu) \left\{ \frac{\partial BH_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial AG_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} G_1 \right) + \frac{h^2}{6R_2} \left[B \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{BH_2}{R_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{H_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{2}{R_1} \right) ABN_2 \right] - B \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{S_{\alpha\beta}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + \frac{3}{h^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{H_2 - H_1}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^2} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{R_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^2} \left(\frac{H_2}{R_1} - \frac{H_1}{R_2} \right) \Bigg] - A \frac{\partial(G_1 + G_2)}{\partial \beta} + \frac{h^2}{3} \left(\frac{1}{R_2} \frac{\partial AT_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A T_2}{\partial \beta} \frac{1}{R_1} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{A}{R_2} \frac{\partial T_1}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{AT_1}{R_1} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{AT_1}{R_2} \right) + \frac{(1+\nu)h^2}{6R_2} ABY = 0, \quad (1.17) \\
& \quad \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (G_1 + G_2) - \frac{h^2}{3} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \left(\frac{T_1}{R_2} - \frac{T_2}{R_1} \right) - (1+\nu) \left(\frac{G_1}{R_1} + \frac{G_2}{R_2} \right) + \\
& \quad + \frac{(1+\nu)h^2}{3AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{AH_1}{R_1} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{AH_2}{R_2} - AB \left(\frac{2}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) N_1 + \frac{B}{1+\nu} \frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial \alpha} \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{BH_2}{R_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{BH_1}{R_1} - AB \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) N_2 + \frac{A}{1+\nu} \frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial \beta} \right] + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BX) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) \right\} = 0, \\
& \quad \frac{6}{h^2} \frac{H_1 - H_2}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^2} - \frac{2S_{\alpha\beta}}{R_2 - R_1} + \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^2} \left(\frac{H_2}{R_1} - \frac{H_1}{R_2} \right) + \\
& \quad + \frac{h^2}{3AB} \left(\frac{\partial BN_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial AN_1}{\partial \beta} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Рівняння для циліндричної оболонки одержуються з наведених, якщо в них покласти $R_2 = R$, $R_1 \rightarrow \infty$.

2. Сферична оболонка. Співвідношення сферичної оболонки одержуємо, покладаючи $R_1 = R_2 = R$, де R — радіус кривини середньої поверхні оболонки.

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$B \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (T_1 - T_2) + A \frac{\partial S}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial A}{\partial \beta} S + \frac{AB}{R} N_1 + ABX = 0, \quad (2.1)$$

$$A \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (T_2 - T_1) + B \frac{\partial S}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} S + \frac{AB}{R} N_2 + ABY = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial BN_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial AN_2}{\partial \beta} - \frac{AB}{R} T - ABZ = 0, \quad (2.3)$$

$$B \frac{\partial H}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} H + A \frac{\partial G_2}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (G_2 - G_1) - ABN_2 - ABE = 0, \quad (2.4)$$

$$A \frac{\partial H}{\partial \beta} + 2 \frac{\partial A}{\partial \beta} H + B \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (G_1 - G_2) - ABN_1 + ABF = 0, \quad (2.5)$$

де

$$S = S_1 = S_2, \quad H = H_1 = H_2, \quad T = T_1 + T_2, \quad G = G_1 + G_2.$$

Питома потенціальна енергія сферичної оболонки

$$\begin{aligned}
W_0^{(сф)} = & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[e_{\alpha\alpha}^2 + e_{\beta\beta}^2 + \frac{h^2}{3} (x_1^2 + x_2^2) \right] + \frac{2E\nu h}{1-\nu^2} \left(e_{\alpha\alpha} e_{\beta\beta} + \frac{h^2}{3} x_1 x_2 \right) + \\
& + \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(e_{\alpha\beta}^2 + e_{\alpha n}^2 + e_{\beta n}^2 + \frac{h^2}{3} \tau^2 \right), \quad (2.6)
\end{aligned}$$

де $\tau = \tau_1 + \tau_2$. Із (2. 6), користуючись формулами (1. 11), одержуємо співвідношення пружності сферичної оболонки.

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} (e_{\alpha\alpha} + \nu e_{\beta\beta}), \quad T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (e_{\beta\beta} + \nu e_{\alpha\alpha}), \\ S_1 &= S_2 = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\alpha\beta}, \quad N_1 = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\alpha n}, \quad N_2 = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\beta n}, \\ G_1 &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad G_2 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu \kappa_1), \\ H_1 &= H_2 = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)} \tau. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рівняння нерозривності деформації в зусиллях і моментах можна представити в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{1+\nu}{R} N_1 + \frac{3R}{h^2} \left[(1+\nu) N_1 - \frac{1}{A} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right] + (1+\nu) \frac{R}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BN_2}{\partial \alpha} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial AN_1}{\partial \beta} \right) \right] + (1+\nu) \left(X - \frac{3R}{h^2} F \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{1+\nu}{R} N_2 + \frac{3R}{h^2} \left[(1+\nu) N_2 - \frac{1}{B} \frac{\partial G}{\partial \beta} \right] + (1+\nu) \frac{R}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial AN_1}{\partial \beta} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial BN_2}{\partial \alpha} \right) \right] + (1+\nu) \left(Y + \frac{3R}{h^2} E \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} (1-\nu) \frac{3R}{h^2} G + \frac{R^2}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[B \left(\frac{1}{A} \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{1+\nu}{R} N_1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[A \left(\frac{1}{B} \frac{\partial T}{\partial \beta} - \frac{1+\nu}{R} N_2 \right) \right] \right\} + \\ + \frac{(1+\nu)R^2}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BX) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Наведемо ще вирази зусиль і моментів через чотири функції напружень.

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\varphi_2}{AB}, \quad T_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\varphi_1}{AB}, \\ S_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\varphi_1}{AB} + \frac{\varphi_3}{R}, \quad S_2 = -\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\varphi_2}{AB} - \frac{\varphi_3}{R}, \\ N_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta} - \frac{\varphi_2}{R}, \quad N_2 = -\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} + \frac{\varphi_1}{R}, \\ G_1 &= R \left[\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) \right] + \frac{\psi_3}{R}, \\ G_2 &= R \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) \right] + \frac{\psi_3}{R}, \\ H_1 &= R \left[-\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) \right] - \varphi_3, \\ H_2 &= R \left[-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) \right] + \varphi_3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Формулами (2.11) однорідні рівняння рівноваги перетворюються в тотожності, якими б не були функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ і ψ_3 . При цьому у випадку сферичної оболонки рівності $S_1=S_2$ і $H_1=H_2$ накладають на функції напружень умову

$$\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A \varphi_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B \varphi_1}{\partial \alpha} \right) + \frac{2\varphi_3}{R} = 0. \quad (2.12)$$

Зведемо повну систему однорідних рівнянь сферичної оболонки в зусиллях і моментах до рівняння, спосіб інтегрування якого відомий.

Оскільки однорідні рівняння рівноваги функціями напружень задовольняються, то шукані функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ і ψ_3 повинні бути такими, щоб задовольнялись рівняння нерозривності деформації (2.8), (2.9), (2.10) і умова (2.12).

В (2.11) збережемо з чотирьох довільних функцій $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ і ψ_3 три, поклавши $\varphi_3 = 0$. Тоді формули (2.11) наберуть вигляду:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\varphi_2}{AB}, \quad T_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\varphi_1}{AB}, \\ S_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\varphi_1}{AB}, \quad S_2 = -\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\varphi_2}{AB}, \\ N_1 &= -\frac{\varphi_2}{R}, \quad N_2 = \frac{\varphi_1}{R}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{R}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) + \frac{R}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) + \frac{\psi_3}{R}, \\ G_2 &= \frac{R}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) + \frac{R}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) + \frac{\psi_3}{R}, \\ H_1 &= -\frac{R}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) + \frac{R}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} - \varphi_1 \right), \\ H_2 &= -\frac{R}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) + \frac{R}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right), \end{aligned}$$

а умова (2.12) стає такою:

$$\frac{\partial A \varphi_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B \varphi_1}{\partial \alpha} = 0. \quad (2.14)$$

Вирази N_1 і N_2 із (2.13) підставимо в рівняння (2.8) і (2.9), звідки, враховуючи (2.14), одержуємо такі вирази для функцій φ_1 і φ_2 через T і G :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{R^2 h^2}{(1+\nu)(3R^2-h^2)} \left(-\frac{1}{B} \frac{\partial T}{\partial \beta} + \frac{3R}{h^2 B} \frac{\partial G}{\partial \beta} \right), \\ \varphi_2 &= \frac{R^2 h^2}{(1+\nu)(3R^2-h^2)} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{3R}{h^2 A} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Враховуючи (2.3), рівняння нерозривності деформації (2.10) запишемо у вигляді:

$$\frac{R^2}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) \right] - (1+\nu)T + (1-\nu) \frac{3R}{h^2} G = 0,$$

або

$$R^2 \Delta T - (1+\nu)T + (1-\nu) \frac{3R}{h^2} G = 0. \quad (2.16)$$

Підставивши в (2.3) замість N_1 і N_2 їх вирази із (2.13) і враховуючи (2.15), одержимо друге рівняння для визначення T і G :

$$\frac{3R^3}{h^2} \Delta G - R^2 \Delta T - (1 + \nu) \left(\frac{3R^2}{h^2} - 1 \right) T = 0. \quad (2.17)$$

Рівняння (2.17) замінюємо сумою (2.16) і (2.17), що після перемноження на $\frac{h^2}{3R^3}$ дає

$$R \Delta G + \frac{1-\nu}{R} G - (1 + \nu) T = 0. \quad (2.18)$$

Отже, для визначення T і G маємо систему двох рівнянь

$$R^2 \Delta T - (1 + \nu) T + (1 - \nu) \frac{3R}{h^2} G = 0, \quad (2.19)$$

$$R \Delta G + \frac{1-\nu}{R} G - (1 + \nu) T = 0.$$

Систему (2.19) можна записати у вигляді одного комплексного рівняння:

$$R^2 \Delta U + (1 + ik) U = 0, \quad (2.20)$$

де

$$U = (-\nu + ik) \frac{G}{R} + (1 + \nu) T, \quad k^2 = \left(1 + \frac{3R^2}{h^2} \right) (1 - \nu^2) - 1. \quad (2.21)$$

Рівняння (2.20) (отже, і система рівнянь (2.19)) співпадає з рівнянням А. Л. Гольденвейзера [3]. Спосіб інтегрування цього рівняння дав І. Н. Векуа [4], [5].

Через інтеграли системи (2.19) T і G виразимо пружні зусилля і моменти так, щоб задовольнялась повна система рівнянь сферичної оболонки. Зусилля і моменти, представлені формулами (2.13), задовольняють однорідні рівняння рівноваги (2.1) — (2.5), якими б не були функції φ_1 , φ_2 і φ_3 . Рівняння нерозривності деформації (2.8) і (2.9) та умова (2.14) задовольняються, якщо φ_1 і φ_2 визначені по (2.15). Залишається підібрати функцію φ_3 так, щоб задовольнялось рівняння нерозривності деформації (2.10). Виявляється [3], що (2.10) задовольняється, якщо взяти функцію φ_3 у вигляді:

$$\varphi_3 = \frac{R}{1+\nu} G. \quad (2.22)$$

Тоді одержуємо

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\varphi_2}{AB}, \quad T_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\varphi_1}{AB}, \\ S_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\varphi_1}{AB}, \quad S_2 = -\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\varphi_2}{AB}, \\ N_1 &= -\frac{\varphi_2}{R}, \quad N_2 = \frac{\varphi_1}{R}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$G_1 = \frac{R}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{R}{(1+\nu)B} \frac{\partial G}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) + \frac{R}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{R}{(1+\nu)A} \frac{\partial G}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) + \frac{G}{1+\nu},$$

$$G_2 = \frac{R}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{R}{(1+\nu)A} \frac{\partial G}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) + \frac{R}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{R}{(1+\nu)B} \frac{\partial G}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) + \frac{G}{1+\nu},$$

$$H_1 = -\frac{R}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{R}{(1+\nu)A} \frac{\partial G}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right) + \frac{R}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\frac{R}{(1+\nu)B} \frac{\partial G}{\partial \beta} - \varphi_1 \right),$$

$$H_2 = -\frac{R}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{R}{(1+\nu)B} \frac{\partial G}{\partial \beta} - \varphi_1 \right) + \frac{R}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{R}{(1+\nu)A} \frac{\partial G}{\partial \alpha} + \varphi_2 \right).$$

Визначені за цими формулами зусилля і моменти задовольняють однорідні рівняння рівноваги при довільних φ_1 , φ_2 і G ; перші два рівняння нерозривності задовольняються, якщо φ_1 і φ_2 визначені по (2.15), і третє рівняння нерозривності задовольняється, якщо T і G є інтегралами системи (2.19) (при цьому також виконується умова (2.14)). Аналіз напруженого стану сферичної оболонки дається в роботі [3].

Зусилля і моменти, вираховані за формулами (2.23), відрізнятимуться від зусиль і моментів, вирахованих за формулами (2.10), поданих в роботі [3], бо коефіцієнти у формулах (2.15) відмінні від коефіцієнтів у формулах (2.1) роботи [3].

Примітка. Якщо не приймати умови, що $\sigma_{zz}=0$, то інший вигляд матимуть тільки деякі постійні коефіцієнти у виразі W формули (1.12) і у відповідних наступних формулах (див. [8]).

ЛІТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, т. VIII, в. 6, 1944.
4. Векуа И. Н. Интегрирование уравнений сферической оболочки. ПММ, т. IX, в. 5, 1945.
5. Векуа И. Н. Общее представление решений дифференциального уравнения сферических функций. ДАН СССР, т. 49, № 5, 1945.
6. Нигул У. К. Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек. ПММ, т. 26, в. 5, 1962.
7. Даревский В. М. Об соотношениях теории тонких оболочек. ПММ, т. 25, в. 3, 1961.
8. Шереметьев М. П., Пелех Б. Л. До питання про варіаційні принципи в теорії оболонок. Теоретична і прикладна математика, в. 2. Вид. Львівськ. ун-ту, 1962.
9. Шереметьев М. П. До питання про функції напружень в оболонках. Питання математики і механіки, в. 9. Вид. Львівськ. ун-ту, 1962.
10. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. Journal of mathematics and physics, vol. 23, p.p. 184—191, 1944.

Э. И. ЛУНЬ

К ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Резюме

В статье приводятся основные уравнения теории упругих оболочек при условии, что прямолинейный, нормальный к срединной поверхности элемент оболочки до деформации сохраняет свою длину, оставаясь прямолинейным, но не нормальным к срединной поверхности после деформации. В случае сферической оболочки полная система однородных уравнений в усилиях и моментах сводится к разрешающему уравнению, способ решения которого известен. Полученные результаты сравниваются с данными А. Л. Гольденвейзера, которые получены им в случае выполнения гипотезы Кирхгофа—Лява. Оказывается, что разрешающие уравнения в обоих случаях одинаковые, но усилия и моменты будут различны вследствие различия коэффициентов в выражениях, определяющих функции напряжения.

Д. Г. ЖЛЕБНИКОВ

ДО ПИТАННЯ ПРО ГРАНИЧНІ УМОВИ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПЛАСТИНОК З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ*

М. П. Шереметьєв [1, 2] вперше сформулював у функціях комплексної змінної граничні умови плоскої задачі для пластинки, край якої підкріплено тонким пружним стержнем. У припущенні, що підкріпний стержень працює лише на розтяг, а його згинна жорсткість дорівнює нулю, Г. М. Савіним та Н. П. Флейшманом [3, 4] одержано зм'якшені граничні умови, що зводять задачу безпосередньо до граничної проблеми для комплексних потенціалів Колосова—Мусхелішвілі. На основі цих результатів у даній роботі виводяться граничні умови такого ж типу, проте без обмеження відносно жорсткості стержня на згин. Одержані умови можуть бути використані для розв'язку ряду конкретних задач. Як найпростіший приклад одержано відомий [1, 2] розв'язок задачі про пружну рівновагу нескінченної пластинки з підкріпленням круговим отвором.

§ 1. Розглянемо тонку ізотропну пластинку, що займає в площині $z=x+iy$ область, яка обмежена контуром L . Край пластинки підкріплено тонким пружним криволінійним стержнем змінної жорсткості. Припускається, що стержень спаяно з пластинкою вздовж його осі, тобто стержень розглядається як пружна крива, що працює на розтяг та згин. За додатний напрямок відрахунку дуги s на L вважаємо такий, що залишає область пластинки зліва.

На контурі спаю пластинки і стержня, крім рівності напружень, має місце також умова рівності зміщень:

$$u = u_0, \quad (1.1)$$

де $u = u_n + iu_t$, $u_0 = u_n^0 + iu_t^0$, причому u_n і u_t — проекції вектора зміщення точок края пластинки на зовнішню нормаль та дотичну, u_n^0 і u_t^0 — ті ж самі величини для стержня.

Нехай далі $p_x = p_x(s)$ і $p_y = p_y(s)$ — проекції на осі координат заданого зовнішнього навантаження, прикладеного до стержня, σ_n і τ_n — нормальний та дотичний компоненти напружень в пластинці на контурі спаю, t — афікс точки контура L , $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$, h — товщина пластинки. Тоді нормальна $q = q(s)$ та дотична $n = n(s)$ складові зусиль, що діють на стержень, запишуться

$$q + in = i\dot{t}(p_x + ip_y) - h(\sigma_n + i\tau_n). \quad (1.2)$$

* Науковий керівник — проф. М. П. Шереметьєв.

Напружено-деформований стан плоского криволінійного стержня характеризується такими рівностями [2]:

а) рівняння рівноваги:

$$\frac{dN}{ds} = -n \mp \frac{Q}{r}, \quad \frac{dQ}{ds} = -q \pm \frac{N}{r}, \quad \frac{dM}{ds} = Q, \quad (1.3)$$

б) закон Гука:

$$\varepsilon = \frac{N}{G_1} \pm \frac{M}{rG_1}, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{G_2} \pm \frac{N}{rG_1} + \frac{M}{r^2G_1}, \quad (1.4)$$

в) співвідношення між деформаціями та переміщеннями:

$$\varepsilon = \frac{du_t^0}{ds} \pm \frac{u_n^0}{r}, \quad \theta = \pm \frac{u_t^0}{r} - \frac{du_n^0}{ds}. \quad (1.5)$$

Тут N , Q , M — поздовжня і перерізуюча сили та згинаючий момент; ε — відносне видовження осі стержня, θ — кут повороту, r — радіус кривини, G_1 , G_2 — жорсткості на розтяг та згин. У формулах (1.3) — (1.5) і далі верхній (нижній) знак перед $\frac{1}{r}$ відноситься до випадку, коли зовнішня нормаль направлена від (до) центра кривини осі стержня.

Якщо ввести лінійний оператор A ($f=f(s)$ — деяка функція)

$$Af = \left(\pm \frac{1}{r} + i \frac{d}{ds} \right) f = i \dot{t} \frac{d}{ds} (\dot{t} f) \quad (1.6)$$

і комплексно-спряжений $\bar{A}$

$$\bar{A}f = \left(\pm \frac{1}{r} - i \frac{d}{ds} \right) f = -i \dot{t} \frac{d}{ds} (\dot{t} f), \quad (1.7)$$

то з (1.3) — (1.5) випливає:

$$q + in = \bar{A}(N - iQ), \quad N - iQ = G_1 \varepsilon - AM \quad (1.8)$$

$$\varepsilon + i\theta = \bar{A}u_0, \quad M = -G_2 \operatorname{Re}(A\bar{A}u_0).$$

Тому

$$q + in = \bar{A}[G_1 \operatorname{Re}(\bar{A}u_0)] + \bar{A}A[G_2 \operatorname{Re}(A\bar{A}u_0)]. \quad (1.9)$$

Виражаючи тепер напруження $\sigma_n + i\tau_n$ та зміщення $u_n + iu_t$ через комплексні потенціали $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ за відомими формулами [5] та враховуючи (1.1) та (1.2), одержимо з (1.9) після інтегрування по s граничну умову для функцій $\varphi(z)$ та $\psi(z)$:

$$\begin{aligned} & \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - iK_1 t \operatorname{Re} \left(\dot{t} \frac{d}{ds} [x\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] \right) + \\ & + i^2 \frac{d}{ds} \left(\dot{t} K_2 \operatorname{Re} \left[i \dot{t} \frac{d}{ds} \left\{ \dot{t}^2 \frac{d}{ds} [x\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] \right\} \right] \right) = f_0(t) \text{ на } L, \end{aligned} \quad (1.10)$$

де

$$f_0(t) = \frac{i}{h} \int_0^s (p_x + ip_y) ds + C, \quad K_j = \frac{G_j}{2\mu h} \quad (j=1,2), \quad (1.11)$$

κ , μ — пружні константи пластинки, C — стала інтегрування.

Зокрема, якщо вважати, що підкріпний стержень працює лише на розтяг, то при $K_2=0$ з (1.10) випливає зм'якшена гранична умова, що дана в роботах [3, 4].

Гранична умова (1.10) дозволяє врахувати вплив жорсткості стержня на згин. Шукані функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ можна представити у вигляді:

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z), \quad (1.12)$$

де $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функції, які характеризують напружений стан невідкріпленої пластинки, а $\varphi_c(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$ та $\psi_c(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z)$ — голоморфні всюди в області пластинки функції, що характеризують вплив підкріпного стержня, причому функції $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ враховують вплив розтягливості стержня, а $\varphi_2(z)$ та $\psi_2(z)$ — вплив його згинності. Функції $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ можуть бути знайдені методом, викладеним в [4], а для відшукування $\varphi_2(z)$ та $\psi_2(z)$ одержимо після підстановки (1.12) в (1.10) таку граничну умову:

$$(1 + \kappa)\varphi_2(t) - U_2(t, \bar{t}) - iK_1 t \operatorname{Re} \left[\dot{t} \frac{d}{ds} U_2(t, \bar{t}) \right] + \\ + i^2 \frac{d}{ds} \left(\dot{t} K_2 \operatorname{Re} \left[i \dot{t} \frac{d}{ds} \left\{ \dot{t}^2 \frac{d}{ds} U_2(t, \bar{t}) \right\} \right] \right) = F(t) \text{ на } L, \quad (1.13)$$

де позначено

$$F(t) = -i^2 \frac{d}{ds} \left(\dot{t} K_2 \operatorname{Re} \left[i \dot{t} \frac{d}{ds} \left\{ \dot{t}^2 \frac{d}{ds} [U_0(t, \bar{t}) + U_1(t, \bar{t})] \right\} \right] \right), \quad (1.14)$$

$$U_k(t, \bar{t}) = \kappa \varphi_k(t) - t \overline{\varphi'_k(t)} - \overline{\psi_k(t)} \quad (k=0, 1, 2). \quad (1.15)$$

§ 2. Нехай функція $z = \omega(\zeta)$ відображає на скінченну (або нескінченну) область D , зайняту пластинкою, внутрішність (зовнішність) кола γ радіуса $\rho=1$ в площині $\zeta = \xi + i\eta$, якщо область D є однозв'язною, або кругове кільце у випадку двозв'язної області. В дальших формулах верхній (нижній) знак відповідає випадку, коли область D знаходиться всередині (зовні) контура L .

Позначаючи

$$\varphi_2(z) = \varphi_2[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta), \quad \psi_2(z) = \psi_2[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta),$$

$$U_2(t, \bar{t}) = U(\sigma), \quad F(t) = F[\omega(\sigma)] = f(\sigma), \quad (2.1)$$

де $\sigma = \rho e^{i\theta}$ — афікс точки контура γ , та враховуючи, що на γ

$$i = \pm \frac{i\sigma}{\rho} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}, \quad \frac{d}{ds} = \pm \frac{i\sigma}{\rho |\omega'(\sigma)|} \frac{d}{d\sigma}, \quad (2.2)$$

запишемо граничну умову (1.13) в перетвореній області:

$$(1 + \kappa)\varphi(\sigma) - U(\sigma) \pm K_1 \frac{\sigma}{\rho} \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \operatorname{Re} \frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \pm \\ \pm \frac{\sigma^2}{\rho^2} \frac{|\omega'(\sigma)|}{|\omega'(\sigma)|^2} \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|} K_2 \operatorname{Re} \left(\frac{\sigma^2}{\omega'(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} \frac{|\omega'(\sigma)| U'(\sigma)}{\sigma [\omega'(\sigma)]^2} \right) \right] = f(\sigma) \text{ на } \gamma, \quad (2.3)$$

причому

$$U(\sigma) = \kappa \varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)}. \quad (2.4)$$

Наведемо також дещо видозмінений запис граничної умови. Для цього зауважимо, що

$$\pm \frac{1}{r} = -i\dot{t}\dot{t} = -\frac{i}{2}\dot{t}^2 \frac{d}{ds} \dot{t}^2 = \pm \frac{1}{\rho|\omega'(\sigma)|} \pm \frac{\sigma|\omega'(\sigma)|}{2\rho[\omega'(\sigma)]^2} \frac{d}{d\sigma} \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}, \quad (2.5)$$

і, отже, з (1.6)

$$Af = \pm \frac{1}{\rho|\omega'(\sigma)|} \left(1 + \frac{\sigma\overline{\omega'(\sigma)}}{2\omega'(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} - \sigma \frac{d}{d\sigma} \right) f. \quad (2.6)$$

Тому, виходячи з (1.13), граничну умову на γ можна записати:

$$(1 + \kappa)\varphi(\sigma) - U(\sigma) \pm \delta_1(\sigma)\sigma\omega'(\sigma) \operatorname{Re} \frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \pm \pm \frac{\sigma}{\omega'(\sigma)} B \left[\delta_2(\sigma) \operatorname{Re} \left(B \frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right) \right] = f(\sigma). \quad (2.7)$$

Тут позначено:

$$Bf = \left(1 + \frac{\sigma\overline{\omega'(\sigma)}}{2\omega'(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} \frac{\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} - \sigma \frac{d}{d\sigma} \right) f \quad (2.8)$$

і

$$\delta_1(\sigma) = \frac{K_1}{\rho|\omega'(\sigma)|}, \quad \delta_2(\sigma) = \frac{K_2}{\rho^2|\omega'(\sigma)|}. \quad (2.9)$$

Гранична умова в формі (2.7) може бути ефективно використана, якщо $\omega(\zeta)$ — раціональна функція, наприклад, при розв'язанні плоскої задачі для пластинки з підкріпленням еліптичним отвором. При цьому у випадку сталих жорсткостей G_1 та G_2 розв'язок може бути побудований методом послідовних наближень, розвиненим в роботах [2, 6] при розв'язанні аналогічних задач згину плит.

У випадку, коли контур L в площині z являє собою коло радіуса R ,

$$Af = \pm \left(\frac{1}{R} - \frac{\sigma}{\rho|\omega'(\sigma)|} \frac{d}{d\sigma} \right) f \quad (2.10)$$

і гранична умова на γ при $K_2 = \text{const}$ може бути записана так:

$$(1 + \kappa)\varphi(\sigma) - U(\sigma) \pm \left(K_1 + \frac{K_2}{R^2} \right) \frac{\sigma\omega'(\sigma)}{\rho|\omega'(\sigma)|} \operatorname{Re} \frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \pm \pm K_2 \frac{\sigma^2}{\rho^2\omega'(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{i\sigma}{\rho|\omega'(\sigma)|} \frac{d}{d\sigma} \left(\operatorname{Im} \frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right) - \frac{1}{R} \frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right] = f(\sigma). \quad (2.11)$$

§ 3. Як приклад розглянемо задачу про пружну рівновагу нескінченної пластинки з підкріпленням круговим отвором радіуса R . В цьому випадку

$$\omega(\zeta) = R\zeta, \quad \omega'(\zeta) = R, \quad \rho = 1, \quad (3.1)$$

і умова (2.11) буде мати вигляд:

$$(1 + \kappa)\varphi(\sigma) - U(\sigma) - l_1 \sigma \operatorname{Re} U'(\sigma) - l_2 \left\{ i\sigma \operatorname{Im} \left(\sigma \frac{d}{d\sigma} [\sigma U''(\sigma)] \right) - \sigma^2 U'''(\sigma) \right\} = f(\sigma) \text{ на } \gamma, \quad (3.2)$$

де

$$U(\sigma) = \kappa\varphi(\sigma) - \sigma\overline{\varphi'(\sigma)} - \psi(\sigma) \quad (3.3)$$

та

$$l_1 = \frac{1}{R} \left(K_1 + \frac{K_2}{R^2} \right), \quad l_2 = \frac{K_2}{R^3}. \quad (3.4)$$

Нехай

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{-n}, \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n} \\ U(\sigma) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \sigma^n, \quad f(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \sigma^n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Підставляючи ці розклади в (3.2) та (3.3) та порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ , одержимо:

$$\begin{aligned} [2 + l_1(n+2) + l_2(n^2-1)(n+2)]\bar{a}_{n+2} + [l_2(n+1)^2 - l_1]n\alpha_{-n} &= \\ = -2\bar{A}_{n+2} \quad (n \geq -1), \\ [l_2(n+1)^2 - l_1](n+2)\bar{a}_{n+2} + \left[\frac{2}{\kappa} + nl_1 + l_2n(n+1)(n+3) \right] \alpha_{-n} &= \\ = 2A_{-n} \quad (n > 0), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\alpha_1 = -\bar{b}_1, \quad \alpha_n = (n-2)\bar{a}_{n-2} - \bar{b}_n \quad (n \geq 2), \quad \alpha_{-n} = \kappa a_n \quad (n > 0).$$

Звідси визначаємо

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{(l_1+2)\bar{A}_1 - l_1 A_1}{2(1+l_1)}, \\ a_n &= \frac{1}{\Delta_n} \{ [2 + l_1(n+2) + l_2(n^2-1)(n+2)]A_{-n} + [l_2(n+1)^2 - \\ &\quad - l_1](n+2)\bar{A}_{n+2} \} \quad (n > 0), \\ b_{n+2} &= \frac{1}{\Delta_n} \{ [2 + l_1(n+2-\kappa) + l_2((n+1)^2\kappa + (n^2-1)(n+2))]nA_{-n} + \\ &\quad + [2 - l_1n(n+2-\kappa) + l_2n(n+1)((n+3)\kappa + (n+1) \\ &\quad (n+2))] \bar{A}_{n+2} \} \quad (n \geq 0), \end{aligned} \quad (3.7)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_n &= 2 + l_1(n\kappa + n+2) + l_2(n+1)[n(n+3)\kappa + (n-1)(n+2)] + \\ &\quad + 2l_2(l_2 - l_1)n(n+1)^2(n+2)\kappa. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Якщо, зокрема, пластинка розтягається зусиллями $\sigma_x^{(\infty)} = p$ та $\sigma_y^{(\infty)} = q$, а підкріплений круговий контур є вільним від зовнішнього навантаження, то напружений стан пластинки визначається функціями

$$\varphi^*(\zeta) = \frac{p+q}{4} R\zeta + \varphi(\zeta), \quad \psi^*(\zeta) = \frac{q-p}{2} R\zeta + \psi(\zeta), \quad (3.9)$$

а

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \frac{R}{4} \{ (l_1 + 8l_2 - 2)(q-p)\sigma^{-1} + [l_1(\kappa-1) - 2](p+q)\sigma + \\ &\quad + (l_1 - 4l_2)(q-p)\sigma^3 \}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тому з (3.5) та (3.7) знаходимо

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{[1+l_1-4l_2-12l_2(l_1-l_2)](p-q)R}{2+l_1(x+3)+8l_2x+24l_2(l_1-l_2)x}, \\ b_1 &= \frac{l_1(x-1)-2}{1+l_1} \cdot \frac{(p+q)R}{4}, \\ b_3 &= \frac{2+(4l_2-l_1)(x-1)-24l_2(l_1-l_2)}{2+l_1(x+3)+8l_2x+24l_2(l_1-l_2)x} \cdot \frac{(p-q)R}{2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

причому інші коефіцієнти рівні нулю. Це співпадає з результатом М. П. Шереметьєва [2], одержаним іншим шляхом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шереметьєв М. П. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сборник, т. 14, 1953.
2. Шереметьєв М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд. Львовск. ун-та, 1960.
3. Флейшман Н. П. Замечания к одной статье М. П. Шереметьєва. Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-ту, в. 7, ч. III, 1957.
4. Савін Г. М., Флейшман Н. П. Пластинки, край яких підкріплені тонкими ребрами. «Прикладна механіка», т. VII, в. 4, 1961.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
6. Шереметьєв М. П., Мартинович Т. Л. Згин нескінченної пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. «Прикладна механіка», т. III, в. 2, 1957.

Д. Г. ХЛЕБНИКОВ

К ВОПРОСУ О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛАСТИНОК С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

Резюме

Плоская задача об упругом равновесии пластинки, криволинейный край которой подкреплен тонким упругим стержнем, обладающим жесткостями на растяжение и на изгиб, приведена к граничной задаче для комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили. Полученные граничные условия (1.10) и в преобразованной области (2.7) могут быть использованы при решении ряда конкретных задач. В качестве примера дано известное решение задачи для бесконечной пластинки с подкрепленным круговым отверстием.

XIMIA

1

2

3

4

5

6

7

8

9

О. С. БАНАХ

ОДЕРЖАННЯ СИНТЕТИЧНОГО ЦЕОЛІТУ ТИПУ МОЛЕКУЛЯРНИХ СИТ*

Дослідження методів синтезу молекулярних сит та їх впровадження для цілей селективної адсорбції відкривають широкі перспективи в розвитку адсорбції. Молекулярні сита завоювали визнання як найефективніші осушувачі газів та рідин, особливо в області малих відносних концентрацій вологості: вони в 7—10 разів ефективніші за силікагель. За їх допомогою можна добитися більшої глибини осушки, ніж хімічними методами (10). Широко починають впроваджуватись молекулярні сита в переробку нафти, для підвищення октанового числа бензину, хроматографічного розділення сумішей газів та рідин і одержання чистих вуглеводів (1), для вловлювання цінних домішок у попутних і відхідних газах (етилен, пропілен, ацетилен тощо), для поліпшення якостей трансформаторних масел (8) і т. д. Цей далеко не повний перелік областей застосування молекулярних сит ставить завдання синтезу різноманітних видів цих адсорбентів з різною кристалічною структурою, зокрема розміром вхідних «вікон». Рентгеноструктурним аналізом доведено, що основною структурною одиницею молекулярних сит типу А та типу Х, які найширше використовуються, є кубооктаедр (гептапаралеледр), який утворюється при зрізуванні вершин октаедра гранями куба; кубооктаедри складені з елементарних тетраедрів SiO_4^{-4} та AlO_4^{-5} (5). Основна відмінність між цеолітами (молекулярними ситами) полягає в тому, як з'єднуються кубооктаедри, утворюючи просторову сітку. Цеоліти типу А з'єднуються чотиричленими кисневими мостиками (у формі чотиригранної призми) і утворюють примітивну кубічну структуру. В молекулярних ситах типу Х основні структурні одиниці (кубооктаедри) об'єднуються між собою через шестичлени кисневі мостики (у формі шестигранної призми) і утворюють просторову сітку, яка нагадує структуру алмазу (4). Внаслідок неодинакового способу поєднання кубооктаедрів молекулярні сита типу А мають діаметр вхідних вікон порядку 3—5 Å, а сита типу Х — 10—13 Å. При ізоморфному заміщенні частини атомів кремнію на Al в елементарних тетраедрах утворений надлишковий негативний заряд аніона AlO_4^{-5} компенсується іонами Na^+ або Ca^{++} , які займають місце у вхідних «вікнах» цеолітів. Обміном цих катіонів модифікують молекулярні сита.

Численні дослідження синтетичних цеолітів, проведені Р. Баррером та його школою, загальновідомі (2). Оpubліковані результати синтезу молекулярних сит у Радянському Союзі (6, 9, 11). Результати С. П. Жданова та М. М. Бунтаря показують, що цеоліти кристалізуються

* Науковий керівник — доц. Т. М. Полонський.

в основному з гелів, у яких є співвідношення $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 \leq 2$ (тип А) та $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 \leq 15$ (тип Х). Але цеоліти типу Х можуть кристалізуватися з різних гелів, маючи склад кристалів, дуже залежний від співвідношення $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ у вихідному розчині та через це — неодинакові сорбційні властивості (7).

У даній роботі було вивчено вплив тривалості нагрівання гелів, концентрацій вихідних речовин та дії надлишку катіонів Na^+ при невисоких температурах на вихід цеоліту.

Для роботи виготовлялися розчини силікату натрію, виходячи з $\text{Na}_2\text{SiO}_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ марки «ЧДА», та алюмінату натрію, який виготовляли взаємодією металічного Al (кваліфікація «ХЧ») з розчином лугу NaOH з таким розрахунком, щоб одержати 0,5-молярний розчин в перерахунку на Al_2O_3 . Для усунення гідролізу при зберіганні до одержаного розчину алюмінату додавали надлишок лугу, щоб одержати співвідношення $\text{Na}_2\text{O} : \text{Al}_2\text{O}_3 = 2 : 1$.

З метою вияснення можливості одержання кристалів цеоліту при невисоких температурах (100°C) нагрівали у термостаті суміші розчину NaAlO_2 , порошку кремнезему SiO_2 та надлишку (50%) лугу. Суміш закладали в ампули, збовтували протягом години на механічній мішалці та ставили в термостат на кристалізацію. При дводобовому нагріванні нам не вдалося одержати кристалічного осаду. Розглядаючи краплі суспензії в поляризаційному мікроскопі при максимальному збільшенні, спостерігаємо аморфний осад, очевидно, кремнекислоти, яка не кристалізувалася в наших умовах.

Інші результати одержані, якщо виходити з розчинів Na_2SiO_3 та NaAlO_2 і надлишку лугу. При змішуванні концентрованих розчинів (0,5—1,0 N) силікату та алюмінату натрію випадає осад зразу і кількість його зростає в міру додавання одного реагента до взятої кількості другого. При цьому, очевидно, утворений осад захоплює з собою певну кількість речовини, яка міститься в надлишку. Ясно, що склад такого геля, який потім йшов на кристалізацію, міг бути неоднорідний. Щоб уникнути цього, ми підбирали трохи нижчі концентрації вихідних речовин, щоби при змішуванні потрібних кількостей Na_2SiO_3 і NaAlO_2 осад випадав не зразу. Це досягається при концентраціях порядку 0,1 M. Після півгодинного збовтування вмісту із запайними ампулами їх вносили на кристалізацію при 100°C .

Попередніми дослідями встановлено, що з таких розчинів осад викристалізовується повільно (через 2—3 доби) і випадає невелика кількість кристалів. Тому в дальшому досліді проводили так, що одержували спочатку некристалічний осад у момент змішування реагуючих речовин, переносили його в ампули, запаювали і старанно збовтували одержаний гель в апараті для змішування. Через півгодини нагрівали осад у термостаті до повної кристалізації, кінець якої визначали по утворенню нестійкої суспензії, яка при струшуванні ампули швидко осідала, а під мікроскопом не спостерігалася аморфна маса.

На відміну від викристалізованого алюмосилікату, аморфний гель давав значну опалесценцію і не осідав, а під мікроскопом спостерігався об'ємистий аморфний осад. Згідно з результатами робіт Р. Баррера та ін. (3) надлишок катіонів Na^+ (з лугу) прискорює кристалізацію. Враховуючи це, ми одержали дані дослідів, які зведено в таблицю I. Ми виходили з різних початкових концентрацій NaAlO_2 та Na_2SiO_3 , але підбирали такі кількості розчинів, щоб співвідношення у них $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 =$

Таблиця 1

Залежність часу кристалізації цеоліту при співвідношенні $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 = 1 : 1$
з різних концентрацій при додаванні й без додавання луку

Концент- рація вихід- ного роз- чину NaAlO_2	Взято NaAlO_2 для кристалізації		Концентрація вихідного розчину Na_2SiO_3	Взято Na_2SiO_3 для кристалізації		Час повної кристалізації	
	розчину	мілі- молів		розчину	мілі- молів	без до- давання NaOH	з дода- ванням 5 мілімо- лів NaOH
(М)	(мл)		(М)	(мл)		(год.)	(год.)
0,50	4,7	2,35	0,1710	6,87	1,175	14	2
0,25	9,4	2,35	0,1710	6,87	1,175	23	4
0,25	9,4	2,35	0,0855	13,74	1,175	57	5
0,50	4,7	2,35	0,0855	13,74	1,175	23	4
0,167	14,1	2,35	0,1710	6,87	1,175	50	5
0,167	14,1	2,35	0,0855	13,74	1,175	66	12
0,25	9,4	2,35	0,0570	20,61	1,175	63	9
0,167	14,1	2,35	0,0570	20,61	1,175	> 70	> 14

Таблиця 2

Залежність часу кристалізації цеоліту
від різних співвідношень $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ та $\text{Na}_2\text{O} : \text{SiO}_2$

Взято для кристалізації				Співвідношення		Час повної криста- лізації	Над- ли- шок NaOH	Співвід- ношення $\frac{\text{Na}_2\text{O}}{\text{SiO}_2}$	Час пов- ної криста- лізації
0,5-М NaAlO_2		0,25-М Na_2SiO_3		$\frac{\text{SiO}_2}{\text{Al}_2\text{O}_3}$	$\frac{\text{Na}_2\text{O}}{\text{SiO}_2}$				
розчину	чистого	розчину	чистого						
(мл)	(м-моль)	(мл)	(м-моль)			год.	м-моль		год.
9,0	4,50	4,50	1,13	0,50	5,00	3	9,35	13,40	3
8,0	4,00	4,57	1,14	0,57	4,50	3	8,35	11,80	3
7,0	3,50	4,67	1,17	0,67	3,98	6	7,45	10,38	6
6,0	3,00	4,80	1,20	0,80	3,50	6	6,55	8,96	7
5,0	2,50	6,25	1,56	1,25	2,60	4	6,35	6,66	2
5,0	2,50	7,50	1,88	1,50	2,33	5	6,70	5,91	2
5,0	2,50	8,75	2,19	1,75	2,14	5	7,25	5,85	1
5,0	2,50	10,00	2,50	2,00	2,00	8	7,90	5,20	1

= 1 : 1. Паралельно ставили ампули з тими ж гелями, але додавали ще надлишок (5 мілімолів) NaOH , що зменшило час кристалізації у 5—10 разів. Крім цього, ми визначали тривалість кристалізації гелю з різними співвідношеннями $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ при наявності лише тих катіонів Na^+ , які є у вихідних розчинах, а також при додаванні надлишку луку, в ре-

зультаті чого у гелях створювалися різні співвідношення $\text{Na}_2\text{O} : \text{SiO}_2$. Дані цих дослідів зведені в таблиці 2.

З одержаних даних видно, що при взаємодії розведених розчинів NaAlO_2 та Na_2SiO_3 викристалізовується при 100°C цеоліт значно пізніше, ніж із концентрованих гелів. При співвідношенні $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 = 1$ час кристалізації набагато зменшується від додавання надлишку NaOH . У випадку трикратного надлишку лугу час кристалізації цеоліту із $0,1\text{—}0,5\text{ M}$ розчинів алюмінату й силікату зменшується в декілька разів.

При різних співвідношеннях $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ у вихідних гелях час кристалізації цеоліту значно менший, ніж для співвідношення $1 : 1$. Виявляється, що для співвідношення $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 < 1$ навіть при трикратному надлишку лугу час кристалізації не знижувався. Це, на нашу думку, зв'язане з тим, що у таких гелях без додавання надлишку NaOH уже була відносно велика кількість катіонів Na^+ , які прискорюють кристалізацію в розчині алюмінату, що виготовлявся з двократним надлишком. При співвідношенні $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 > 1$ у розчині алюмосилікату була менша відносна кількість лугу (відповідно й Na^+), тому додавання його сприяє кристалізації.

ВИСНОВКИ

1. Кристалізація цеоліту при 100°C відбувається легше з концентрованих розчинів NaAlO_2 та Na_2SiO_3 . Для однакового співвідношення $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ у гелях час кристалізації різко зменшується від додавання надлишку NaOH .

2. При різних співвідношеннях $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ надлишок лугу прискорює кристалізацію цеоліту лише в гелях з високим вмістом кремнезему.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андреев Ю. К., Кельцев Н. В., Старовойтова А. Ф., Торочешников Н. С. V Всесоюзная конф. по колл. химии. Изд. АН СССР, М., 145, 1962.
2. Bagger R. M. J. Chem. Soc., 1948, 2158.
3. Bagger R. M., Bultitude F. W., Meier W. M., J. Chem. Soc., 1959, 195.
4. Белов Н. В. Кристаллохимия силикатов с крупными катионами. Изд. АН СССР, М., 44, 1961.
5. Дубинин М. М. Синтетические цеолиты. Изд. АН СССР, М., 87, 1962.
6. Жданов С. П., Бунтарь Н. Н. Синтетические цеолиты. Изд. АН СССР, М., 1962.
7. Жданов С. П., Бунтарь Н. Н. ДАН СССР, 147, 1118, 1962.
8. Кельцев Н. В., Назаров Б. Г., Торочешников Н. С. Хим. и технол. топлив и масел, 1962, № 6, 7—11.
9. Мирский Я. В., Митрофанов М. Г., Попков Б. П., Болотова Л. Т., Межлумова А. И. Синтетические цеолиты. Изд. АН СССР, М., 1962.
10. Николина В. Я., Неймарк И. Е., Пионтковская М. А. Успехи химии, 29, 1089, 1960.
11. Цицишвили Г. В., Андроникашвили Т. Г. Синтетические цеолиты. Изд. АН СССР, М., 1962.

О. С. БАНАХ

ПОЛУЧЕНИЕ СИНТЕТИЧЕСКОГО ЦЕОЛИТА ТИПА МОЛЕКУЛЯРНЫХ СИТ

Резюме

В данной работе исследована зависимость продолжительности нагревания гелей при получении цеолитов от концентраций исходных растворов силиката и алюмината натрия, а также от действия избытка щелочи.

Показано, что при использовании разбавленных растворов Na_2SiO_3 и NaAlO_2 порядка 0,1 М осадок, выпадающий несколько минут спустя после смешивания этих растворов, очень медленно кристаллизуется при 100°C (через 2—3 суток).

Кристаллизация проводилась в запаянных ампулах. Время окончания ее устанавливалось после образования неустойчивой суспензии, быстро осаждающейся, а под микроскопом вместо аморфной массы уже наблюдались кристаллы цеолита.

Показано, что при соотношении $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 = 1$ в гелях, полученных взаимодействием растворов NaSiO_3 и NaAlO_2 , время полной кристаллизации значительно уменьшается с прибавлением 3-кратного избытка NaOH по сравнению с теми же гелями, не содержащими такого избытка щелочи.

При кристаллизации гелей алюмосиликатов с различными значениями соотношения $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3$ в пределах 0,5—2,0 время кристаллизации заметно увеличивается с возрастанием относительного количества SiO_2 в геле, уменьшаясь от прибавления избытка NaOH .

З. Г. ГАЛАНЕЦЬ

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕАКЦІЙ КОМПЛЕКСОУТВОРЕННЯ ІОНІВ МІДІ З ІОНАМИ ЛИМОННОЇ КИСЛОТИ *

Комплексні сполуки іонів лимонної кислоти з металкатіонами застосовуються в аналітичній хімії і технології для відокремлення близьких за властивостями катіонів і їх очистки.

Склад і стійкість лимоннокислих комплексів залежить від рН середовища.

Лимоннокислі комплекси міді вивчалися рядом авторів (1—5). П. К. Мігаль і А. Я. Сичов (4) досліджували ці комплекси методами електропровідності, фотометричним, вимірювання рН і методом потенціометричного титрування і прийшли до висновку, що в не дуже кислому середовищі утворюється комплексний іон $\text{CuC}_6\text{H}_5\text{O}_7^-$, а в лужному середовищі — $\text{CuC}_6\text{H}_4\text{O}_7^{2-}$, логарифм константи стійкості якого дорівнює 13,22.

О. Д. Талалаєва і А. С. Тихонов (5) вивчали лимоннокислі комплекси фотометрично, методом розчинності і візуальним титруванням.

Ці автори вважають, що при рН 2—3 в розчині існують іони $\text{CuH}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^+$, при рН 3—5 іони $[\text{Cu}(\text{H}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7)(\text{HC}_6\text{H}_5\text{O}_7)]^-$ з константою нестійкості $1 \cdot 10^{-4}$, при рН 7—11,5 іони $\text{CuONC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$ з константою нестійкості $4,5 \cdot 10^{-17}$, а при рН більше 12 $[\text{Cu}(\text{OH})_2(\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7)_2]^{6-}$ з константою нестійкості $1,7 \cdot 10^{-19}$.

Р. Дас, Р. Паттанайк, С. Пані (2) вивчали комплексоутворення між іонами Cu^{2+} і лимонною кислотою методом вимірювання рН і кондуктометричного титрування і знайшли, що при малих значеннях рН утворюється комплекс $\text{CuHC}_6\text{H}_5\text{O}_7$. При рН > 3,3 утворюється $\text{CuC}_6\text{H}_5\text{O}_7^-$, а при високих значеннях рН — $\text{CuC}_6\text{H}_4\text{O}_7^{2-}$.

Як видно з наведених літературних даних, різні автори дають різний склад цитратних сполук міді.

Метою нашої роботи було дослідження складу і стійкості лимоннокислих комплексів міді в залежності від рН середовища полярографічним методом.

Ми користувалися полярографом заводу «Геоприборцветмет». Характеристика капіляра $m^{2/3}t^{1/6} = 1,29 \text{ мг.}^{2/3} \text{ сек.}^{-1/2}$. Як електрод порівняння вживався насичений каломелевий електрод. Досліди проводились при температурі $25 \pm 0,2^\circ\text{C}$. Кисень видалявся пропусканням електролітичного водню протягом 35 хв. Максимуми усували 0,1-проц. розчином декстрину. Для створення фону застосовували розчин азотнокислого натрію, який приливали в такий кількості, щоб іонна сила полярографова-

* Науковий керівник — доц. В. К. Золотухін.

ного розчину дорівнювала двом. Потенціал півхвилі відновлення міді на фоні 1 М розчину NaNO_3 дорівнює $+0,02$ в.

Введення в розчин солі міді іонів лимонної кислоти змінює потенціал півхвилі в сторону від'ємних значень. Величина потенціалу півхвилі не змінюється з часом. Концентрація $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$ в усіх досліджуваних розчинах була постійною і дорівнювала $3,0 \cdot 10^{-2}$ мол/л. Загальна концентрація лимонної кислоти змінювалась від 0,02 до 0,32 мол/л. До досліджуваних розчинів приливали розчин КОН до потрібного значення рН, який визначався скляним електродом на потенціометрі ЛП-5.

У кислому середовищі, тобто при рН нижче 7, в розчині можуть існувати такі форми лимонної кислоти: $\text{H}_3\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7$, $\text{H}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^-$, $\text{HC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$, $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}$. Концентрація кожної форми залежить від загальної концентрації цитрату і від рН середовища і розраховувалась за формулами, виведеними з констант іонізації лимонної кислоти (5).

Число іонів аденда визначали на основі графіка залежності $E_{1/2}$ від $\lg C$. Згідно з рівнянням прямої $E_{1/2} = \frac{0,059}{n} p \lg C$ тангенс кута нахилу для двовалентних катіонів при $p=1$ повинен дорівнювати 0,029, при $p=2$ 0,059 і т. д.

Тангенс кута нахилу прямої для рН 4,0; 5,0; 10,0 дорівнює відповідно 0,032; 0,031; 0,035. Отже, кількість іонів аденда в усіх трьох випадках дорівнює одиниці.

Константу нестійкості комплексної сполуки розраховували за формулою:

$$\lg K = \frac{\Delta E_{1/2} \cdot n}{0,059} + p \lg C,$$

де: $\Delta E_{1/2}$ — різниця потенціалів півхвилі відновлення комплексного і простого іонів металу,

n — кількість електронів, що беруть участь у відновленні,

p — кількість іонів аденда.

C — концентрація іонів аденда.

Нами досліджувались також цитратно-мідні розчини при рН 7. У цих розчинах спостерігається значне зміщення потенціалу півхвилі відновлення міді в сторону від'ємних значень у порівнянні з величиною потенціалу півхвилі відновлення міді з простого іона. Величина зміщення майже такого порядку як при рН 10,0. Але розрахунок координаційного числа і константи нестійкості затруднений, тому що нема достатньої сходимості результатів; на графіку залежності $E_{1/2}$ від $\lg C$ спостерігається розсіювання точок. Можна допустити, що тут відбувається перехід одного виду комплексів в другий.

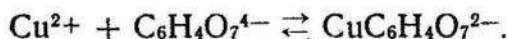
ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Результати полярографічного дослідження лимоннокислих сполук міді показують, що в кислому середовищі утворюються комплекси, які складаються з одного іона міді і одного іона лимонної кислоти. Це співпадає з більшістю результатів, одержаних іншими авторами при дослідженні цитратів міді.

З таблиці 2 видно, що константи нестійкості цитратних комплексів міді, які утворюються в розчині при рН 4,0 і при рН 5,0, відрізняються між собою тільки на один порядок, а від константи нестійкості сполук, що

утворюються при рН 10,0 відрізняються на 9—10 порядків. При рН 4,0 лимоннокислого розчину в ньому існують іони $\text{H}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^-$ (55%) і іони $\text{HC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$ (40%). В розчині з рН 5,0 переважають іони $\text{HC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$ (77%) і при рН 10,0 існують практично тільки іони $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}$.

Виходячи з того, що при титруванні суміші солі міді і лимонної кислоти в еквімолярних кількостях їдким лугом витрачається чотири еквіваленти луку, деякі дослідники (2,4) вважають, що при цьому титрується іон водню гідроксильної групи цитрат-іона і що в нейтральній і лужній областях домінуючим процесом є реакція:



Інші вчені (5) вважають, що луг витрачається на утворення іонів CuOH^+ і що в нейтральному і лужному середовищах утворюється $\text{CuONC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$.

При комплексоутворенні має місце зміщення потенціалу півхвилі відновлення міді з комплексного іона із зміною концентрації аденда, що й лежить в основі полярографічного визначення складу і стійкості комплексів.

Іон $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}$ помітно не дисоціює за рівнянням



у нейтральному і слаболужному середовищі (константа іонізації гідроксильної групи лимонної кислоти $K_4 = 2,5 \cdot 10^{-12}$) (4).

Якщо іони Cu^{2+} збільшують ступінь дисоціації водню гідроксильної групи цитрат-іонів (4), то тільки тих іонів, з якими вони вступають в реакцію; решта іонів $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}$ залишаються без зміни. Тому зміщення

Таблиця 1

Середні результати вимірювань потенціалів півхвилі відновлення міді з лимоннокислого комплексу при різних значеннях рН

Концентрація лимонної кислоти мол./л.	рН=4,0		рН=5,0		рН=10,0	
	$[\text{H}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^-]$ мол./л.	$E_{1/2^6}$	$[\text{HC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}]$ мол./л.	$E_{1/2^6}$	$[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}]$ мол./л.	$E_{1/2^6}$
0,020	0,011	— 0,081	0,016	— 0,123	0,020	— 0,403
0,040	0,022	— 0,090	0,031	— 0,131	0,040	— 0,411
0,080	0,044	— 0,102	0,062	— 0,141	0,080	— 0,421
0,160	0,088	— 0,112	0,124	— 0,157	0,160	— 0,427
0,320	0,176	— 0,123	0,248	— 0,165	0,320	— 0,437

$E_{1/2}$ при дальшому збільшенні концентрації $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}$ при рН 10,0 (табл. 1) підтверджує, що реакція комплексоутворення іонів міді йде з іонами $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}$, а не з іонами $\text{C}_6\text{H}_4\text{O}_7^{4-}$. Тут слід зазначити, що за даними потенціометричного рН-титрування цитратно-мідних сумішей лугом добавка одного еквіваленту луку підвищує рН від 5 до 7 і супроводжується далі різким стрибком до рН більше 10. Із сказаного вище зрозуміло, що в нейтральному і слаболужному середовищах утворюється не $\text{CuC}_6\text{H}_4\text{O}_7^{2-}$, а $\text{CuONC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$, константа нестійкості якого

$$K = \frac{[\text{CuOH}^+][\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}]}{[\text{CuOH}\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7]} = 1 \cdot 10^{-16}$$
. Ця величина не дуже відрізняється від величини $K_{\text{нейстйк. CuC}_6\text{H}_4\text{O}_7^{2-}}$, знайденої іншими методами і оціненої в $1 \cdot 10^{-13,22}$ і $1 \cdot 10^{-14}$ (4).

Як нами вказано вище, величина $E_{1/2}$ для цитратно-мідних розчинів з рН 7 приблизно такого ж порядку, як для розчинів з рН 10. Це свідчить про те, що утворення сполук $\text{CuOH}\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$ відбувається вже в нейтральному середовищі (концентрація іонів $\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}$ в розчині 94%).

При рН 4,0 в лимоннокислому розчині існує 55% $\text{H}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^-$ і 40% $\text{HC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$ іонів, тому при цьому значенні рН в цитратно-мідному розчині, очевидно, існує суміш $\text{CuH}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^+$ і $\text{CuHC}_6\text{H}_5\text{O}_7$. В розчині з рН 5,0 переважають іони $\text{HC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$, тому тут в основному утворюється комплекс $\text{CuHC}_6\text{H}_5\text{O}_7$. Константи нестійкості комплексів, розраховані за концентраціями домінуючих при рН 4 і 5 іонних форм лимонної кислоти, відрізняються дещо більше, як на один порядок (табл. 2).

Таблиця 2

Результати обчислення констант нестійкості

рН=4,0			рН=5,0			рН=10,0		
$\lg[\text{H}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^-]$	$\Delta E_{1/2}$ в	$K \cdot 10^6$	$\lg[\text{HC}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}]$	$\Delta E_{1/2}$ в	$K \cdot 10^7$	$\lg[\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{3-}]$	$\Delta E_{1/2}$ в	$K \cdot 10^{16}$
-1,9586	-0,101	4,1	-1,7959	-0,143	2,2	-1,6990	-0,423	0,9
-1,6576	-0,110	4,1	-1,5087	-0,151	2,4	-1,3979	-0,431	1,0
-1,3565	-0,122	3,2	-1,2076	-0,161	2,2	-1,0969	-0,441	0,9
-1,0555	-0,132	3,0	-0,9066	-0,177	1,3	-0,7959	-0,447	1,1
-0,7545	-0,143	2,5	-0,6058	-0,185	1,3	-0,4949	-0,457	1,0
		3,4			1,9			1,0

Тому можна вважати, що константи нестійкості $\text{CuH}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^+$ і $\text{CuHC}_6\text{H}_5\text{O}_7$ відрізняються між собою на один порядок і що вони є величинами порядку 10^{-6} , 10^{-7} .

ВИСНОВКИ

1. Проведено дослідження лимоннокислих сполук міді в розчинах з рН 4, 5, 7, 10 полярографічним методом.

2. Показано, що в розчинах з рН 4, 5, 10 утворюються сполуки, які складаються з одного іона міді і одного іона лимонної кислоти.

3. На основі аналізу одержаного експериментального матеріалу і літературних даних запропоновані формули цитратних комплексних сполук міді, які утворюються в розчинах з рН 4, 5, 10.

4. Константа нестійкості $\text{CuOH}\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^{2-}$ дорівнює $1 \cdot 10^{-16}$, а константи нестійкості $\text{CuH}_2\text{C}_6\text{H}_5\text{O}_7^+$ і $\text{CuHC}_6\text{H}_5\text{O}_7$ мають величини порядку 10^{-6} і 10^{-7} відповідно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bobtelsky M. a Jordan J., J. Am. Chem. Soc. 67, 10, 1824, 1945.
2. Das R., Pattanaik R. K., Pani S., J. Indian Chem. Soc. 37, 1, 59—68, 1960.
3. Lefebvre Jean. J. chim.-phys et phys.-chim. biol., 54, 7—8, 581—600, 1957.
4. Мигаль П. К., Сычев А. Я. Журн. неорг. химии, 3, 309—324, 1958.
5. Талалаева О. Д., Тихонов А. С. ЖОХ, 23, 2067, 1953.

З. Г. ГАЛАНЕЦ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ КОМПЛЕКСООБРАЗОВАНИЯ ИОНОВ МЕДИ
С ИОНАМИ ЛИМОННОЙ КИСЛОТЫ

Резюме

В представленной статье приведены результаты исследования лимоннокислых соединений меди в растворах с рН 4, 5, 7, 10 полярографическим методом.

В растворах с рН 4, 5, 10 образуются комплексные лимоннокислые соединения меди, состоящие из одного иона меди и одного иона лимонной кислоты. Рассчитаны константы нестойкости этих комплексов и предложены возможные их формулы.

БІОЛОГІЯ

О. М. БЕЛОКОНЬ, Г. Ф. СЕНИК

ДО ФАУНИ ЕКТОПАРАЗИТІВ КОМАХОЇДНИХ ССАВЦІВ ЗАХІДНИХ ОБЛАСТЕЙ УКРАЇНИ*

Вивчення паразитофауни комахоїдних ссавців є важливим етапом у з'ясуванні їх епідеміологічного значення. В опублікованих роботах, присвячених цьому ряду тварин (1, 6, 8), наводяться лише часткові відомості про їх ектопаразитів. Так, В. І. Юркіна (10, 11) вказує для комахоїдних ссавців України сім видів бліх. Три види гамазових кліщів відомі для комахоїдних Закарпаття (9).

Нами було проведено дослідження паразитофауни комахоїдних ссавців західних областей України, що дало змогу значно поповнити відомості про фауну їх ектопаразитів.

Збір матеріалів проводився протягом 1958—1961 рр. в районах Закарпатської, Івано-Франківської, Тернопільської, Львівської та Волинської областей. Всього було обстежено 1245 екземплярів комахоїдних, що належать до таких семи видів: кріт, бурозубки — мала, звичайна, альпійська, кутори — звичайна, мала та білозубка мала. Відлов комахоїдних проводився за допомогою давилок «Геро», кротоловок і циліндрів. В лабораторію тварини доставлялись у білих полотняних мішечках. Збір, обробка і визначення ектопаразитів проводились згідно з загальноприйнятою методикою. На обстежених тваринах виявлені блохи, кліщі-червонотілки, гамазові та іксодові кліщі. В даному повідомленні ми наводимо опрацьовані матеріали по фауні 35 видів гамазових кліщів (15 000 екз.) та 13 видів бліх (2820 екз.).

Список виявлених паразитів, розподіл їх на господарях і по районах збору наведені в таблицях 1 та 2.

Зібрані матеріали дають можливість проаналізувати фауну окремих видів комахоїдних.

1. Кріт — *Talpa europaea* L.

За весь період досліджень на зараженість ектопаразитами переглянуто 1000 кротів, добутих на всій території в різні пори року. Фауна гамазових кліщів-паразитів крота відзначається багатством та різноманітністю видів. Нами зібрано з цього господаря понад 14 000 екземплярів гамазових кліщів — представників 30 видів. Спостереження показали, що в усіх районах наших досліджень найчастіше зустрічались кліщі *Eulaelaps stabularis* Koch; *Haemogamasus horridus* Mich; *Hg. hirsutus* Berl; *Hirstionyssus carnifex* oudms; *Hi. talpae* Zem.

Ці кліщі поширені неоднаково на кротах і гризунах, відловлених в одних і тих самих стаціях (табл. 3). Так, види *Hg. horridus* Mich; *Hg.*

* Науковий керівник — проф. Ф. І. Страутман.

Таблиця 1

Поширення бліх на комахоїдних західних областей України

Територія дослідження	Східні Карпати						Західноукраїнський лісостеп				Волинське Полісся		Всього паразитів
	кріт	бурозубка мала	бурозубка звич.	бурозубка альп.	кутора звич.	кутора мала	кріт	білозубка мала	бурозубка звич.	кутора звич.	кріт	бурозубка звич.	
Види господарів													
Кількість обстежених тварин	36	17	57	20	26	14	929	7	96	6	35	2	
Кількість паразитів													
<i>Ceratophyllus sciurorum</i> Schr.	1						1				1		3
<i>C. penicilliger</i> Gr.							2						2
<i>C. turbidus</i> Rotsch.							6						6
<i>Ctenophthalmus assimilis</i> Tach.							33		1		4		37
<i>Ct. uncinatus</i> Wagn.	2												3
<i>Ct. obtusus</i> Rotsch.	1	1			2								4
<i>Ct. agyrtes</i> Heller.			4	3	4	1	199			2	3		217
<i>Ct. bisectodentatus</i> Kolen.	13						191		2		4		210
<i>Palaeopsylla similis</i> Dampf.	73		1				2006		1		50		2131
<i>P. sorecis</i> Dale.		4	21	15	12	21	7	3	29	13	2		127
<i>P. steini</i> Jordan.			1										1
<i>Doratomylla dasychemus</i> bifida Jurk.	2	1	7	14	2	1	10	1	16	3			57
<i>Hystriechopsylla talpae</i> Curt.			2				14		4		4		24
Всього	92	6	34	32	22	23	2469	4	54	18	69	—	2822

hirsutus Berl; *Hi. carnifex* Oudms, *Hi. talpae* Zem. досить поширені на кротах і дуже рідко або зовсім не зустрічаються на гризунах. В свою чергу, кліщі *Eulaelaps stabularis* Koch; *Haemoganasus nidi* Mich поширені як на кротах, так і на гризунах. Треба відмітити, що обидва ці види відомі в літературі як переносники трансмісивних захворювань людини (2, 5, 7). Цілком можливо, що, живлячись на кротах і гризунах, ці паразити можуть вводити крота в коло циркуляції збудників туляремії, енцефаліту та інших інфекцій.

Широко розповсюджені на кротах блохи. Всього ми зібрали з цього господаря 2617 екземплярів бліх — представників 12 видів. 80% усієї кількості бліх припадає на *Palaeopsylla similis* Dampf. Чисельність цієї блохи на кротах велика в усіх стаціях і в усі пори року. Так, у *P. similis* Dampf. в лісах Тернопільської області середньомісячний процент заражених тварин — 97,6, а середня кількість паразитів на одній відловленій тварині — 2,33.

Збори другого характерного паразита крота *Ctenophthalmus bisotodontatus* Kolen. досягають лише 9,6% всіх бліх, зібраних з цього господаря. Ця блоха з'являється нерівномірно в різні пори року. Весною середньомісячний процент тварин, заражених цим паразитом, становить 95,1, а середня кількість паразитів на одній відловленій тварині — 1,05; в осінні місяці ці показники різко знижуються (процент заражених тварин — 12,5, а середня кількість паразитів на одній відловленій тварині — 0,12).

Кроти часто годують на собі бліх, поширених на гризунах: *Ctenophthalmus assimilis* Tach; *Ct. agyrtes* Heller. Середньомісячний процент тварин, заражених цими видами, досягає 38, середня кількість паразитів на одній відловленій тварині коливається в залежності від стації від 0,54 до 0,20. У таблиці 4 подано поширення *Ct. agyrtes* Heller на ряді тварин з рівнинних районів Івано-Франківської і Тернопільської областей. Таблиця показує, що чисельність *Ct. agyrtes* Heller у крота значно вища, ніж у таких характерних господарів її, як лісова і польова миша.

2. Бурозубка мала — *Sorex minutus* L.

На наявність ектопаразитів обстежено 17 екземплярів цього виду, відловлених протягом червня—липня 1961 р. в буковому лісі гірських районів Закарпатської області. З добутих тварин знято блохи видів: *Ctenophthalmus obtusus* Rotsch.; *Palaeopsylla sorecis* Dale, *Doratopsylla dasychemus bifida*. Найбільш поширена блоха *Palaeopsylla sorecis* Dale (% заражених тварин — 5,8, середня кількість паразитів на одній відловленій тварині — 0,1) і кліщі *Hirstionyssus eusoricis* Breg. (% заражених тварин — 5,8, середня кількість паразитів на одній відловленій тварині — 0,1).

3. Бурозубка звичайна — *Sorex araneus* L.

На всій території досліджень добуто 155 екземплярів бурозубки звичайної. На них виявлено 41 екземпляр гамазових кліщів, представників 13 видів. Поряд з характерним представником паразитів землерийок *Hi. eusoricis* Breg. досить часто на бурозубці звичайній зустрічаються характерні паразити гризунів з родів *Laelaps* і *Haemolaelaps*. Випадкове це явище чи закономірне, сказати важко, бо ми користувалися методом відлову землерийок циліндрами, в які одночасно потрапляли і гризуни. Дещо частіше зустрічаються на бурозубках звичайних і блохи. Всього з цього господаря нами зібрано 53 блохи 5 видів. 85% загальної кількості зібраних бліх становлять специфічні паразити земле-

Таблиця 2

Поширення гамазових кліщів на комахоїдних західних областей України

Територія дослідження	Східні Карпати							Західноукраїнський лісостеп				Волинське Полісся		Всього паразитів
	кріт	бурозубка мала	бурозубка звич.	бурозубка альп.	кутора звич.	кутора мала		кріт	білозубка мала	бурозубка звич.	кутора звич.	кріт	бурозубка звич.	
Види господарів														
Кількість обстежених тварин	36	17	57	20	26	14		929	7	96	6	35	2	
Список паразитів	Кількість паразитів													
<i>Poecilochirus necrophori</i> Vitzth.								2		5				7
<i>P. subterraneus</i> (Müll)								2						2
Parasitidae gen. sp.	26		24	30	2	1		1201		5	9	35		1333
<i>Cyrtolaelaps mucronatus</i> Can.	1	1	4					49				1		56
<i>Euryparasitus emarginatus</i> Koch.	2				1			106		3		4		117
<i>Macrocheles glaber</i> Müll.										3				3
<i>M. decoloratus</i> Koch.								2						2
<i>Macrocheles</i> sp.								1						1
<i>Pachylaelaps</i> sp.						1		20			1			21
Phytoseiidae.								22			1			23
<i>Eviphis ostrinus</i> Koch.												1		1
<i>Hypoaspis heselhausi</i> Oudms.			1					19						20

Таблиця 3

Поширення деяких гамазових кліщів на кротах і гризунах
(за матеріалами з Тернопільської області 1958—1959 рр.)

Види кліщів	Кількість кліщів	На кротах			На гризунах		
		кількість кліщів	% заражених тварин	середня кількість паразитів на 1 відловл. тв.	кількість кліщів	% заражених тварин	середня кількість паразитів на 1 відловл. тв.
<i>Eulaelaps stabularis</i> Koch.	166	54	—	0,10	112	23	0,15
<i>Haemogamasus nidi</i> Mich.	264	158	—	0,29	106	21	0,29
<i>Haemogamasus horridus</i> Mich.	449	445	53,3	1,16	4	5,7	0,09
<i>Haemogamasus hirsutus</i> Ber L.	1476	1436	98,8	3,7	40	11,2	0,22
<i>Hirstionyssus carnifex</i> Oudms.	3977	3936	99,4	7,3	41	1,2	0,06
<i>Hirstionyssus talpae</i> Zem.	605	605	82,7	0,85	—	0	0

Таблиця 4

Поширення *Stenophthalmus agyrtes* Heller, на комахоїдних і гризунах
(за матеріалами з Тернопільської та Івано-Франківської областей 1958—1959 рр.)

Вид господаря	Кількість обстежених ссавців	Кількість зібраних бліх	% заражених тварин	Середня кількість паразитів на одній відловленій тварині
Кріт	493	104	12,5	0,21
Інші комахоїдні	34	2	5,8	0,05
Хатня миша	76	5	5,2	0,06
Полева миша	30	3	6,6	0,10
Лісова миша	20	4	10	0,20
Жовтогорла миша	73	19	16,4	0,26
Лісова полівка	24	13	20,8	0,54

рийок *Palaeopsylla sorecis* Dale і *Doratopsylla dasychemus bifida*. Крім того в залежності від району та станції, в яких проводились збори, нами виявлені на цій бурозубці поодинокі екземпляри паразитів крота *Palaeopsylla similis* Dampf. і паразитів гризунів *Stenophthalmus agyrtes* Heller і *Histrichopsylla talpae* Curt. Цікавою є знахідка рідкісного виду *Palaeopsylla steini* Jordan, який вперше зареєстрований для СРСР В. І. Юркіною (1960) в тому ж районі, де і ми проводили збори.

4. Бурозубка альпійська — *Sorex alpinus* Schinz.

З 20 бурозубок цього виду, добутих на потоці Васкул (Тячівський район, Закарпатської області), зняті блохи та гамазові кліщі. Блохи (27 екземплярів) представлені специфічними паразитами землерийок

Palaeopsylla sorecis Dale і *Doratopsylla dasychemus bifida*. З гамазових кліщів (7 екз.) на цьому виді виявлено *Haemogamasus hirsutus* Bezl., *Hirstionyssus eusoricis* Breg. і *Hi. carnifex* Oudms.

5. Кутора звичайна — *Neomys fodiens* Schreb.

На наявність ектопаразитів обстежено 28 екземплярів кутор, з яких 26 відловлено в районі Чорногори (Закарпатська область Тячівського району), 2 екземпляри в околицях м. Галича (Івано-Франківська область). Всього з кутори зібрано 63 екземпляри гамазових кліщів і 6 екземплярів бліх. Серед гамазових кліщів кутори звичайної перше місце по чисельності займає характерний паразит землерийок *Hirstionyssus eusoricis* Breg. (84% загального збору гамазид з цього господаря). Крім того, виявлені поодинокі екземпляри кліщів *Euriparasitus emarginatus* Koch., *Haemogamasus nidi* Mich., *Hg. hirsutus* Berl., *Hg. hirsutosimilis* Willm., *Hg. ambulans* Thorell., *Hirstionyssus isabellinus* Oudms. Серед бліх кутори звичайної виявлено *Palaeopsylla sorecis* Dale — 5 екземплярів і *Doratopsylla dasychemus bifida* — 1 екземпляр.

6. Кутора мала — *Neomys anomalus* Cabrera.

В буковому лісі на схилах Чорногори добуто 14 екземплярів кутори малої. На них виявлено 5 бліх *Palaeopsylla sorecis* Dale і гамазові кліщі (34 екз.). *Haemogamasus nidi* Mich., *Hg. hirsutus* Berl., *Hirstionyssus eusoricis* Breg., *Hi. isabellinus* Oudms., *Hirstionyssus* sp.

7. Білозубка мала — *Crocidura suaveolens* Pall.

Обстежено 7 екземплярів цього виду, відловлених у мішаному лісі біля Тернополя. На них виявлено блохи *Palaeopsylla sorecis* Dale — 3 екземпляри і *Doratopsylla dasychemus bifida* — 1 екземпляр.

Проаналізувавши поширення названих паразитів на господарях, ми розділили їх на дві більш-менш чіткі групи: I — паразитів крота і II — паразитів землерийок.

До I групи належать *P. similis* Dampf., *Ct. bisoctodentatus* Kolen., *Hi. carnifex* Oudms., *Hi. talpae* Zem.

Ці види часто зустрічаються на кротах, поширених як у гірських, так і рівнинних районах західних областей України.

Цікаво порівняти наші матеріали із зборами в інших районах європейської частини СРСР. Оскільки краще виявились вивченими блохи комахоїдних Московської області (3) і гамазові кліщі комахоїдних Калінінської області, ми порівняли наші дані з їх матеріалами. Так, за матеріалами Н. Ф. Дарської (3), на кротах Московської області паразитують головним чином блохи, характерні для гризунів. Відносна кількість специфічних бліх крота *Palaeopsylla similis* Dampf. і *Ctenophthalmus bisoctodentatus* Kolen. там незначна і дорівнює лише 5,6% всієї кількості бліх, зібраних з цього господаря; для *P. similis* Dampf. середня кількість паразитів на одній відловленій тварині дорівнює 0,04, а для *Ct. bisoctodentatus* Kolen. — 0,05. Інша картина виявлена нами для західних областей України. Тут відносна кількість *Palaeopsylla similis* Dampf. і *Ctenophthalmus bisoctodentatus* Kolen. значно вища і досягає 89,6% усієї кількості бліх, зібраних з крота; середня кількість *Palaeopsylla similis* Dampf. на одній відловленій тварині — 2,33, а *Ctenophthalmus bisoctodentatus* Kolen. в залежності від пори року 1,05—0,12.

У західних областях УРСР в усіх стаціях на кроті переважають кліщі *Hirstionyssus carnifex* Oudms. Однак чисельність цього паразита зменшується в напрямку на північ. Якщо в рівнинних районах Тернопільської і Львівської областей процент заражених тварин *Hi.*

carnifex Oudms. становить 99,4, то на Поліссі (Шацький район Волинської області) — лише 48,5. При дослідженні ж кротів Калінінської області А. А. Земська і А. А. Пчолкіна не виявили жодного екземпляра *Hi. carnifex* Oudms.

За нашими даними, в рівнинних районах Львівської і Тернопільської областей гамазовий кліщ *Hirstionyssus talpae* Zem. зустрічається рідко (процент заражених тварин цим паразитом становить тільки 9,9), а у вологих лісах Волинського Полісся він зустрічається значно частіше (процент заражених тварин — 37,1). За матеріалами А. А. Земської і А. А. Пчолкіної, чисельність *Hi. talpae* Zem. в Калінінській області знову знижується (процент тварин, заражених *Hi. talpae* Zem., — 15,4).

Другу групу паразитів становлять *Palaeopsylla sorecis* Dale, *Dogatopsylla cuspis* Kotsch., *Hirstionyssus eusoricis* Breg. Ці види широко і рівномірно розповсюджені на всіх обстежених землерийках.

Однак *P. sorecis* Dale і *D. dasychemus bifida* зустрічаються на кротах, а *P. similis* Dampf. і *Hi. carnifex* Oudms. можуть паразитувати на землерийках.

Слід відмітити, що на обстежених нами комахоїдних нерідко зустрічались гамазові кліщі і блохи, які переважно паразитують на гризунах (білках, мишах, полівках). Всього виявлено 7 видів бліх і 25 видів гамазових кліщів, які зустрічаються і на комахоїдних, і на гризунах. Серед них відомі в літературі переносники трансмісивних захворювань людини *Eulaelaps stabularis* Koch., *Haemogamasus nidi* Mich., *Hg. horridus* Mich., *Hg. hirsutus* Berl., *Ctenophthalmus assimilis* Tach., *Ct. agyrtes* Heller. (2, 4, 5, 7).

ВИСНОВКИ

З метою вивчення ектопаразитів комахоїдних з 1958 по 1961 р. на території Тернопільської, Львівської, Івано-Франківської, Закарпатської та Волинської областей обстежено 1241 екземпляр комахоїдних таких видів: кріт, бурозубка звичайна, бурозубка мала, бурозубка альпійська, кутора звичайна, кутора мала і білозубка мала.

Виявлено більше 15 000 гамазових кліщів 35 видів і понад 2800 бліх 13 видів, у тому числі 30 видів гамазид та 12 видів бліх знято з крота. Основну масу ектопаразитів комахоїдних становлять специфічні паразити цієї групи ссавців *Hi. carnifex* Oudms., *Hi. eusoricus* Breg., *Hi. talpae* Zem., *Ct. bisectodentatus* Kolen., *P. similis* Dampf., *P. sorecis* Dale і *D. dasychemus bifida*. Часто зустрічаються в паразитофауні комахоїдних гамазові кліщі та блохи гризунів, у тому числі переносники трансмісивних захворювань людини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Абеленцев В. І., Підоплічко І. Г. Фауна України, т. І. Вид-во АН УРСР, К., 1956.
2. Бреgetова Н. Г. Краткий определитель гамазовых клещей. Изд-во АН СССР, 1956.
3. Дарская Н. Ф. К фауне и экологии блох насекомоядных средней полосы европейской части СССР. Вopr. кр. общей и эксперимент. паразит. и мед зоол. АМН СССР, т. VIII, 1953.
4. Земская А. А., Пчелкина А. А. Гамазовые клещи в очаге клещевого энцефалита Калининской области. Мед. паразит. и паразит. болезни, в. 3, 1960.
5. Нельзина Е. Н., Барков И. П. Носительство *Bact. tularensis* некоторыми видами гамазовых клещей в естественных условиях. ДАН СССР, 4, 1951.

6. Сокур І. Т. Звірі Радянських Карпат та їх господарське значення. Вид-во АН УРСР, К., 1952.
7. Тагильцев А. А. О роли гнездово-норовых гамазовых клещей в циркуляции вируса клещевого энцефалита в природном очаге. Автореф. канд. дисс., М., 1958.
8. Татаринов К. А. Звірі західних областей України. Вид-во АН УРСР, К., 1956.
9. Турянин И. И. К фауне гамазовых клещей Закарпатской области. Научн. зап. Ужгород. ун-та, т. XI, 1956.
10. Юркіна В. І. Блохи Східних Карпат. Праці ін-ту зоології АН УРСР, т. VIII, 1952.
11. Юркіна В. І. Матеріали до вивчення фауни бліх (Aphaniptera) в Українській РСР. Праці ін-ту зоології АН УРСР, т. XV, 1959.
12. Юркіна В. І. Новый для фауны Радянського Союза вид блохи *Palaeopsylla steini* Jord., 1932. ДАН УРСР, в. 4. 1960.

Е. М. БЕЛОКОНЬ, А. Ф. СЕНИК

К ФАУНЕ ЭКТОПАРАЗИТОВ НАСЕКОМОЯДНЫХ МЛЕКОПИТАЮЩИХ ЗАПАДНЫХ ОБЛАСТЕЙ УКРАИНЫ

Резюме

С целью изучения эктопаразитов насекомоядных с 1958 по 1961 г. на территории Тернопольской, Львовской, Ивано-Франковской и Волынской областей обследован 1241 экземпляр насекомоядных следующих видов: крот, бурозубка обыкновенная, бурозубка малая, бурозубка альпийская, кутора обыкновенная, кутора малая и белозубка малая. Выявлено более 15 000 гамазовых клещей 35 видов и свыше 2800 блох 13 видов, в том числе 30 видов гамазид и 12 видов блох снято с крота. Основную массу эктопаразитов насекомоядных составляют специфические паразиты этой группы млекопитающих *Hi. carnifex* Oudem., *Hi. eusoricis* Breg., *Hi. talpae* Zem., *Ct. bisocodentatus* Kolen., *P. similis* Dampf., *P. sorecis* Dale i *D. dasictenus bifide* Jurk.

Часто встречаются в паразитофауне насекомоядных гамазовые клещи и блохи — паразиты грызунов, в том числе переносчики трансмиссивных заболеваний человека.

А. М. БОГАТЧУК

ВПЛИВ МІНЕРАЛЬНИХ ДОБРИВ НА НАГРОМАДЖЕННЯ ТА СКЛАД ВІЛЬНИХ АМІНОКИСЛОТ У ЛИСТЯХ КУКУРУДЗИ*

Кукурудза — найважливіша кормова культура. Особливе значення для корму має зелена маса, яка йде на силосування. Цінність кукурудзи як кормової культури в значній мірі визначається складом її азотових сполук, причому зелена маса краща від насіння і за вмістом азотових сполук, і їх складом. Зелена маса містить деякі незамінимі амінокислоти, яких бракує в насінні. Тому вивчення азотого обміну у рослин кукурудзи набуває великого практичного значення.

У вивченні азотого обміну рослин за останній час набуває поширення дослідження вільних амінокислот. Ця група важлива тим, що вона є вихідним матеріалом для побудови білків, а також охоплює значно більшу кількість амінокислот, які не входять до складу білків. Зараз відомо близько 60 вільних амінокислот, тоді як до складу білків входить 20—25.

Дослідження амінокислот значно поширилося з появою високочутливого методу їх визначення — розподільної хроматографії.

З літератури відомо, що вміст амінокислот, зокрема вільних, у рослинах залежить від віку рослин та ряду зовнішніх факторів (температури, довжини дня, умов зволоження і т. д.), а також від умов життя.

Зовнішні впливи змінюють азотовий обмін, що приводить до зміни кількості і складу вільних амінокислот.

Нестача окремих елементів живлення викликає зниження інтенсивності синтезу білків і приводить до нагромадження вільних амінокислот у рослинах. Підвищення вмісту вільних амінокислот в рослинах спостерігалось при недостатньому живленні рослин калієм (8, 10, 11), залізом, кальцієм і бором (12), цинком, міддю, марганцем (8), а також при збільшенні азоту в поживному середовищі (1). Нестача молібдену викликала зниження вмісту вільних амінокислот в рослинах (7, 8). При нестачі азоту, а також фосфору вміст амінокислот знижується (2). Однак у деяких дослідках зниження вмісту вільних амінокислот у листях при нестачі фосфору не спостерігалось (1).

В роботі Б. А. Плешкова, Ш. Іванко і Т. Антонової (4) було показано, що при нестачі фосфору і особливо калію, коли в рослинах має місце гальмування синтезу білків, вміст вільних амінокислот, зокрема аргініну, аспарагінової кислоти, серину та гліцину помітно зростає. При нестачі азоту, коли в рослинах використовуються всі резерви азоту для

* Науковий керівник — проф. С. О. Гребінський.

синтезу білків, вміст вільних амінокислот у листях знижується майже в півтора рази. Найбільш різко знижується вміст аргініну, аспарагінової кислоти, аланіну, валіну і фенілаланіну. Очевидно, при нестачі азоту ці амінокислоти в першу чергу використовуються для синтезу білків. Аналогічні дані були одержані в досліді з ячменем (9).

А. Ф. Калінкевич та Г. В. Удовенко (3) вивчали вплив умов живлення на вміст амінокислот у стеблах кукурудзи та у конопель. Аналіз проводився на сухому матеріалі. В стеблах кукурудзи знайдені у вільному стані цистин, лізин, аспарагін, аргінін, глютамін, аспарагінова та глютамінова кислота, серин, гліцин, треонін, аланін, тирозин, γ -аміномасляна кислота, валін, лейцини. Досліди показали, що в кукурудзі, як і в коноплях, вміст вільних амінокислот у стеблах у другій половині вегетації сильно змінюється в залежності від умов калійного живлення. При калійному голодуванні вміст усіх амінокислот сильно знижується, а деякі з них не вдається взагалі відкрити. Виявилося також, що в міру старіння кількість вільних амінокислот у стеблах значно зменшується.

Вплив умов живлення рослин на зміну вмісту окремих амінокислот у листях і коренях кукурудзи вивчався Б. Плешковим, Т. Шмирьовою та Ш. Іванко (5). Досліди проводилися з водними культурами. При визначенні вмісту амінокислот було знайдено, що їх кількість у процесі розвитку рослин коливається. В процесі росту найбільш помітно змінювався вміст аланіну, аспарагінової та глютамінової кислот, гліцину, серину і γ -аміномасляної кислоти, які складають переважну кількість вільних амінокислот. Виключення азоту з поживного середовища помітно знижувало спочатку кількість лейцину, валіну, тирозину, а надалі — всіх амінокислот. Без фосфору різко знижувався вміст найбільш лабільних амінокислот: аланіну, гліцину, аргініну, аспарагіну, γ -аміномасляної кислоти.

Незначне калійне голодування збільшувало кількість вільних амінокислот, в основному за рахунок підвищення вмісту аланіну, гліцину, серину, аспарагінової кислоти, аспарагіну, та глютаміну. При більш різкому калійному голодуванні через 17 днів після виключення калію з поживного середовища спостерігалось зменшення вмісту як білку, так і вільних амінокислот.

Таким чином, вміст вільних амінокислот дуже чутливий до умов живлення. Але ці питання вивчались небагатьма дослідниками в лабораторних умовах і на ранніх стадіях розвитку рослин. Тому виникає необхідність докладного дослідження в цьому напрямку рослин при вирощуванні їх для силосування.

Метою даної роботи було вивчення складу основних закономірностей нагромадження амінокислот у листях кукурудзи під впливом мінеральних елементів азоту, фосфору та калію в польових умовах. Для вивчення окремих питань азотого обміну проводилися дослідження в лабораторних умовах.

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Ми проводили досвіди в ботанічному саду університету в 1961 році. Кукурудза Закарпатська жовта зубовидна та гібрид Буковинський 3 вирощувалися в польових умовах. Грунт сірий лісовий суглинистий. Добрива вносились у вигляді підживлення в два строки — у червні та в липні.

Варіанти досліду:

контроль — без внесення добрив (під попередники добрива теж не вносилися).

N ($4\text{ г NH}_4\text{NO}_3^*$ в лунку)

NP ($4\text{ г NH}_4\text{NO}_3 + 8\text{ г суперфосфату}^{**}$ в лунку)

NK ($4\text{ г NH}_4\text{NO}_3 + 2\text{ г KCl}^{***}$ в лунку)

PK ($8\text{ г суперфосфату} + 2\text{ г KCl}$ в лунку)

NPK ($4\text{ г NH}_4\text{NO}_3 + 8\text{ г суперфосфату} + 2\text{ г KCl}$ в лунку)

2NPK ($8\text{ г NH}_4\text{NO}_3 + 8\text{ г суперфосфату} + 2\text{ г KCl}$ в лунку)

N2PK ($4\text{ г NH}_4\text{NO}_3 + 16\text{ г суперфосфату} + 2\text{ г KCl}$ в лунку)

NP2K ($4\text{ г NH}_4\text{NO}_3 + 8\text{ г суперфосфату} + 4\text{ г KCl}$ в лунку).

Проби листя для аналізу бралися двічі: через 2 тижні після першого підживлення (15/VI) та у фазу молочної стиглості кукурудзи (5/IX). Використовували п'яті листки рослин знизу. Для визначення загального азоту матеріал фіксувався паром, а для аналізу вільних амінокислот — 96-проц. етиловим спиртом. Витяжка вільних амінокислот проводилася 80-проц. етанолом, кількісне визначення вільних амінокислот — методом хроматографії на папері. Хроматограми одномірні, низхідні. Використовувався розчинник *n*-бутанол-оцтова кислота—фосфатний буфер рН—6,0 (4 : 1 : 5). Папір № 2 Ленінградської фабрики повільний («М»). Для кращого розділення амінокислот розчинник пропускався 3-кратно. Ідентифікація амінокислот проводилася за допомогою мітчиків. Проявлення 0,5-проц. нінгідрином в ацетоні і висушування протягом 24 год. при кімнатній температурі. Проявлені плями амінокислот вирізались, елюювались метиловим спиртом з азотнокислою міддю. Забарвлення визначалося через 1,5—2 год. на спектрофотометрі СФ-4 при довжині хвилі 510 мμ. Вміст амінокислот у пробах вираховувався за відповідними калібровочними графіками. При побудові цих графіків стандартні розчини кожної амінокислоти хроматографувалися в тих же умовах, що і досліджувані розчини, і так само фотометрувалися. Одержані дані є середніми з 4 паралельних визначень.

Загальний азот визначався по К'ельдалю.

РЕЗУЛЬТАТИ

В таблиці 1 наведені результати визначення загального азоту та нагромадження зеленої маси рослин під впливом добрив.

З даних таблиці 1 видно, що вміст загального азоту під впливом азотого живлення зростає. Нагромадженню азотових сполук сприяють також калійні та фосфорні добрива, додані до азотових. Подвійні кількості азоту, фосфору та калію не вплинули на збільшення загального азоту.

Зростає врожай зеленої маси. Вміст загального азоту падає з віком рослин.

Результати кількісного визначення амінокислотного складу зелених листків кукурудзи наведені в таблиці 2. Визначалися вільні амінокислоти, які входять до складу білку. Інші вільні амінокислоти, що знаходяться у рослинах в дуже незначних кількостях, нами не визначалися.

З даних таблиці 2 видно, що у зеленому листі кукурудзи переважають аспарагінова і глютамінова кислоти, аланін, серин і гліцин, вони становлять близько 65% від загальної кількості амінокислот. Тому за-

* 39,6 кг/га N — одна норма

** 45,6 кг/га P_2O_5 — одна норма.

*** 33,6 кг/га K_2O — одна норма.

Таблиця 1

Вміст загального азоту в листях кукурудзи
(% на суху вагу) та врожай зеленої маси

Варіанти	Закарпатська жовта зубовидна.			Гібрид Буковинський 3	
	15/V	15/IX		15/VI	середня вага з 20 рослин (г)
	загальний азот	загальний азот	середня вага з 20 рослин (г)	загальний азот	
Контроль	2,12	1,53	665±19,2	2,22	648±14,8
N	2,64	1,68	690±20,3	2,59	759±12,6
NK	2,84	1,99	809±18,5	2,94	805±12,5
NPK	3,64	2,23	875±16,8	3,0	842±10,2
2NPK	3,77	2,45	965±25,1	3,35	955±13,0
N2PK	3,78	2,40	932±12,8	3,31	887±12,4
NP2K	3,74	2,44	927±10,7	3,34	958±10,2

Таблиця 2

Амінокислотний склад листків кукурудзи без внесення добрив
(в мг/100 г сухої ваги)

Амінокислота	Закарпатська жовта зубовидна		Гібрид Буковинський 3
	15/VI	5/IX	15/VI
Цистеїн-цистин	сліди	сліди	сліди
Лізин	4,0	4,9	2,03
Аспарагінова кислота	5,8	4,1	4,01
Серин-гліцин	8,32	5,3	3,3
Глютамінова кислота	19,4	17,0	28,7
Треонін	2,1	0,9	0,9
Алаїн	14,3	12,7	27,2
Тирозин	5,2	3,9	1,2
Метіонін	5,7	5,1	} 5,7
Валін	2,6	1,9	
Фенілаланін	5,4	8,3	5,0
Лейцини	4,2	4,0	3,2

гальний вміст амінокислот кукурудзи визначається саме ними. Малі кількості лізину, треоніну, валіну, сліди цистеїн-цистину. Проміжне становище займають метіонін, фенілаланін, група лейцинів. З віком вміст вільних амінокислот зменшується, зокрема кількість аспарагінової кислоти, серину і гліцину, що збігається з літературними даними.

Результати визначення кількісного вмісту вільних амінокислот під впливом мінеральних добрив наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Кількісний вміст амінокислот у листях кукурудзи при звичайних дозах добрив
(в мг/100 г сухої ваги)

Амінокислоти	Закарпатська жовта зубовидна										Гібрид Буковинський 3			
	контроль	N	NK	NP	PK	NPk	приріст аміно- кислот (мг) NPk/контроль		контроль	N	NK	NPk	приріст аміно- кислот (мг) NPk/контроль	
Цистин-цистеїн	сліди	сліди	0,9	сліди	сліди	сліди	сліди	—	сліди	сліди	сліди	сліди	—	—
Лізин	4,0	4,0	7,0	3,01	6,0	8,0	—	4,0	2,03	2,07	2,7	3,57	1,54	1,54
Аспарагінова кислота	5,8	7,8	15,7	13,1	11,0	21,2	—	15,4	4,01	6,8	8,1	12,2	8,19	8,19
Серин-гліцин	8,32	8,02	8,2	8,0	9,8	9,8	—	1,48	3,3	6,1	6,1	6,2	2,9	2,9
Глютамінова кислота	19,4	31,3	44,4	30,2	24,5	50,9	—	31,5	28,7	31,5	33,2	31,6	2,9	2,9
Треонін	2,1	2,1	1,9	1,9	3,3	4,6	—	2,5	0,9	1,6	1,8	2,8	1,4	1,4
Аланін	14,3	20,5	18,7	18,1	25,4	24,9	—	10,6	27,2	31,5	32,6	41,8	14,6	14,6
Тирозин	5,2	5,9	6,6	5,5	8,8	8,9	—	3,7	1,2	3,5	3,3	4,6	3,4	3,4
Метіонін	5,7	7,6	10,7	9,1	9,9	10,7	}		5,7	5,8	5,9	8,0	2,3	2,3
Валін	2,6	3,0	5,1	3,8	5,2	5,2			5,0	5,2	5,2	5,2	0,2	0,2
Феніл-аланін	5,4	6,0	10,0	8,2	10,0	14,5	—	9,1	5,0	5,2	5,2	4,8	1,6	1,6
Лейцин	4,2	5,3	7,9	7,2	8,6	11,5	—	7,3	3,2	4,0	4,0	120,4	39,1	39,1
Сума амінокислот	77,0	101,5	127,2	108,1	122,5	179,2	—	102,18	81,2	96,1	102,9	120,4	39,1	39,1

Таблиця 4

Вплив підвищених доз мінеральних добрив на вміст вільних амінокислот у листях кукурудзи (в мг/100 г сухої ваги)

Амінокислоти	Закарпатська жовта зубовидна						Гібрид Буковинський 3					
	15/VI			5/IX			15/VI			15/VI		
	NPk	2NPk	NP2K	NP2K	NPk	2NPk	NPk	2NPk	NP2K	NPk	2NPk	NP2K
Цистейн-цистин	2,9	5,3	5,0	5,6	сліди	сліди	сліди	сліди	сліди	сліди	сліди	сліди
Лізн	8,0	5,3	5,3	5,0	6,3	6,6	7,3	5,1	3,57	5,0	4,0	4,0
Аспарагінова кислота	21,2	20,8	21,0	21,8	5,3	6,4	5,3	5,2	12,2	12,0	11,8	11,8
Серин-гліцин	9,8	8,0	8,1	8,0	8,4	7,0	8,7	6,9	6,2	7,5	7,2	7,2
Глютамінова кислота	50,9	51,6	50,2	—	17,9	20,7	24,3	20,5	31,6	54,8	50,0	45,0
Треонін	4,6	4,1	4,0	3,0	1,4	1,9	2,2	1,7	2,3	3,0	2,3	2,3
Аланін	24,9	31,2	33,0	—	30,1	30,1	30,0	31,7	41,8	57,0	51,1	51,1
Тирозин	8,9	10,8	11,0	8,0	3,2	5,6	6,8	5,7	4,6	4,9	4,5	4,5
Метіонін	10,7	10,1	10,3	8,0	6,9	9,6	16,0	9,9	8,0	10,5	8,5	8,5
Валін	5,2	7,4	7,8	5,1		8,8	11,2	8,3	5,2	8,2	7,7	7,7
Фенілаланін	14,5	8,1	12,9	8,1	9,3	11,0	12,4	10,8	4,8	5,6	4,8	4,8
Лейцин	11,5	8,3	10,2	8,3	10,3	107,7	114,7	105,4	120,4	168,8	152,9	152,9
Сума амінокислот	173,1	171,0	178,8	—	99,9	107,7	114,7	105,4	120,4	168,8	152,9	152,9

Дані табл. 3 показують, що варіант NPK дає найбільш значне зростання амінокислот. Порівняно з контролем зростають аспарагінова кислота, аланін, глютамінова кислота, менше серин і гліцин. У Закарпатській жовтій зубовидній бачимо збільшення фенілаланіну та групи лейнінів.

В таблиці 4 показаний вплив підвищених доз добрив на вміст вільних амінокислот кукурудзи.

З даних таблиці 4 випливає, що внесення подвійних кількостей азоту, фосфору та калію на фоні NPK не відбилося на вмісті амінокислот у сорті Закарпатська жовта зубовидна і збільшило їх кількість у гібриді Буковинський 3 за рахунок зростання аланіну та глютамінової кислоти. Однак вміст більшості амінокислот майже не змінювався або збільшувався в незначних межах.

Одержані дані по вивченню вмісту вільних амінокислот у листях кукурудзи та впливу на них мінеральних добрив показали, що головними вільними амінокислотами є аспарагінова і глютамінова кислоти, аланін.

При внесенні під кукурудзу звичайних норм добрив не лише азот, але й фосфор з калієм (варіант PK) збільшують вміст вільних амінокислот. Однак найбільший вміст амінокислот спостерігається у варіанті NPK. Зростання кількості амінокислот у варіанті NPK досягається в основному за рахунок нагромадження глютамінової, аспарагінової кислоти та аланіну.

У варіанті PK значно підвищується вміст аспарагінової кислоти та аланіну і менше — глютамінової кислоти.

Варіант NK відрізняється від NP лише збільшеною кількістю глютамінової кислоти. Отже, азот сприяє нагромадженню глютамінової кислоти, тоді як фосфор і калій — нагромадженню аланіну.

Можна також відмітити, що у варіанті NK вміст вільних амінокислот був більшим порівняно з варіантом NP.

Застосування підвищених доз добрив показало, що вміст вільних амінокислот найбільше зростає при додатковій дозі азоту, в меншій мірі при подвійній дозі фосфору (у гібрида Буковинського 3). Це зростання знов обумовлене збільшенням кількості глютамінової кислоти, аланіну та аспарагінової кислоти.

Одержані результати показують, що в азотовому обміні кукурудзи центральне місце займає глютамінова кислота, яка стоїть у центрі процесів переамінування. За своїм значенням в обміні амінокислот до неї наближаються аланін та аспарагінова кислота.

Звертає увагу те, що вміст багатьох амінокислот, які знаходяться в незначних кількостях, не зазнає значних змін при різних режимах живлення.

ВИСНОВКИ

1. Застосування мінеральних добрив не лише підвищує врожай кукурудзи, але й значно збільшує кількість азоту, зокрема вільних амінокислот у листі.

2. Особливо помітне нагромадження вільних амінокислот спостерігається при внесенні звичайних доз добрив, тоді як подвоєння норм окремих елементів дає менше зростання. Порівняння однобічного удобрення азотом, фосфором, калієм з внесенням азоту, фосфору та калію разом показує перевагу повного удобрення.

3. Порівняння удобрення азотом і калієм (варіант NK) з азотом і

фосфором (варіант NP) показало, що калій в більшій мірі впливає на нагромадження вільних амінокислот, ніж фосфор.

4. Зростання кількості амінокислот обумовлене в основному нагромадженням глютамінової кислоти, аланіну та аспарагінової кислоти. Вміст інших амінокислот змінювався незначно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дадькин В. П., Игумнова З. С. О содержании аминокислот в молодых растениях пшеницы при изолированном питании. «Физиология растений», т. 3, вып. 5, 1956.
2. Курсанов А. Л., Туева О. Ф., Верещагин А. Г. Углеводно-фосфорный обмен и синтез аминокислот в корнях тыквы. «Физиология растений», т. 1, вып. 1, 1954.
3. Калинин А. Ф., Удовенко Г. В. К вопросу о влиянии условий питания на содержание аминокислот в растениях. ДАН СССР, т. 126, 1959, № 3.
4. Плешков Б. П., Иванко Ш., Антонова Т. В. Влияние условий питания на содержание свободных аминокислот в листьях фасоли. ДАН СССР, т. 117, 1957, № 6.
5. Плешков Б. П., Шмырева Т. В., Иванко Ш. Изменение содержания отдельных аминокислот в листьях и корнях кукурузы в зависимости от условий питания растений. «Физиология растений», т. 6, вып. 6, 1959.
6. Плешков Б. П., Фауден Л. Содержание свободных аминокислот и аминокислотный состав белков листьев ячменя в зависимости от условий минерального питания и возраста растений. Изв. ТСХА (5/30), 1959.
7. Собачкин А. А. Влияние молибдена на синтез амидов и аминокислот в растениях. Доклады ТСХА, вып. 34, 1958.
8. Hewitt E. J., Jones E. W., Williams A. H. Relation of molybdenum and manganese on the free amino-acid content of the canli-flower. «Nature» vol. 163, № 4148, 1949.
9. Pleshkov B. P., Fowden L. Aminoacid composition of the proteins of barley leaves in relation to the mineral nutrition and age of plants. «Nature», vol. 183, № 4673, 1959.
10. Richards F. J., Coleman R. G. Occurrence of putrescine in potassium-deficient barley. «Nature» vol. 170, № 4324, 1952.
11. Richards F. J., Berner E. A general survey of the free amino-acids of barley leaves as affected by mineral nutrition, with special reference to potassium supply. Annals of Botany, vol. 18, 1954, № 69.
12. Steinberg R. A., Bowling J. D., Mc Murtry J. E. Accumulation of free amino-acids as a chemical basis for morphological symptoms in tobacco manifesting trenching and mineral deficiency symptoms. «Plant Physiology», vol. 25, № 2, 1950.

А. М. БОГАТЧУК

ВЛИЯНИЕ МИНЕРАЛЬНЫХ УДОБРЕНИЙ НА НАКОПЛЕНИЕ И СОСТАВ СВОБОДНЫХ АМИНОКИСЛОТ В ЛИСТЯХ КУКУРУЗЫ

Резюме

Применение минеральных удобрений не только повышает урожай кукурузы, но и значительно увеличивает содержание азота, в частности свободных аминокислот в листьях.

Заметное накопление свободных аминокислот наблюдается при внесении обычных доз удобрений, тогда как удвоение норм отдельных элементов дает меньшее увеличение.

Сравнение одностороннего удобрения азотом, калием и фосфором с внесением азота, фосфора и калия вместе показывает преимущество полного удобрения.

Сравнение удобрения фосфором и калием (вариант PK) с азотом и фосфором (вариант NP) показало, что калий в большей степени влияет на накопление свободных аминокислот, чем фосфор.

Увеличение количества аминокислот обусловлено в основном накоплением глютаминной кислоты, аланина и аспарагиновой кислоты, содержание других аминокислот изменялось незначительно.

А. М. БОГАТЧУК, О. М. ЗАЯРНЮК

ВПЛИВ МОЛІБДЕНУ НА ВІДНОВЛЕННЯ НІТРАТІВ ТА СКЛАД ВІЛЬНИХ АМІНОКИСЛОТ У ЛИСТЯХ КУКУРУДЗИ*

За останній час поширилися роботи по застосуванню молібдену для підвищення врожаю багатьох культурних рослин, зокрема бобових та кукурудзи (2, 3, 4, 7). Характерною властивістю молібдену є його участь у відновленні нітратів, що сприяє азотному живленню рослин. Посилене відновлення нітратів під впливом молібдену у вищих рослин встановлене Мініною на салаті (6), при цьому змінювався склад вільних амінокислот.

У наших дослідках вивчається вплив молібдену на ріст та азотний обмін кукурудзи. Польові досліді проводились у 1961 р. з кукурудзою Закарпатською жовтою зубовидною в ботанічному саду університету на сірому опідзоленому ґрунті. Посів 29 квітня, збір урожаю — 9 вересня 1961 року. Добрива вносились у лунки в розчиненому стані через місяць після посіву. Для аналізів брались п'яті листки знизу. Загальний азот визначався по К'ельдалю, білковий азот — по Мору (8), аміний азот мідним способом (1), нітрати в реакції з α -нафтиламином (5).

З таблиці 1 видно, що молібден підвищує врожай на 53%, а вага качанів збільшується на 63%. На фоні NPK ефективність молібдену була нижча, але вага качанів збільшилась на 25%. Молібден мало впливає на вміст загального та білкового азоту, але помітно знижує кількість нітратного азоту і підвищує кількість амінного азоту. Цей специфічний вплив молібдену більш виразний у молодих рослин (у фазі викидання волоті) і послаблений у фазі воскової стиглості зерна.

В таблиці 2 наведені дані про склад вільних амінокислот, які визначалися методом кількісної хроматографії на папері. Хроматографи одномірні, низхідні. Розчинник *n*-бутанол-оцтова кислота—фосфатний буфер рН 6,0 (4:1:5) (5).

У відповідності із збільшенням кількості амінного азоту при удобренні молібденом зростала кількість усіх вільних амінокислот, але найбільше підвищувався вміст глютамінової кислоти і аланіну, а також серину з гліцином та аргініну. Характерно, що на фоні NPK молібден привів до невеликого збільшення лише глютамінової кислоти.

Таким чином, удобрення молібденом помітно підвищує вміст найбільш активних в азотному метаболізмі амінокислот — глютамінової кислоти та аланіну. У цьому ж напрямі діє удобрення кукурудзи NPK, при якому також відмічається значне збільшення глютамінової кислоти та аланіну.

* Науковий керівник — проф. С. О. Гребінський.

Таблиця 1

Вплив молібдену на врожай та склад азотних сполук в листках кукурудзи
(в % на суху вагу)

	Фаза розвитку, в якій взято проби	Загальний азот	Білковий азот	% білкового азоту до загального	Аміний азот	Нітратний азот в (мг %)	Вага рослин з качанами при збиранні врожаю (г) ³	Вага качана (г)
Контроль	Волоті	3,71	3,14	84,6	0,74	7,23		
Контроль+Мо		3,73	3,12	83,7	1,10	4,16		
NPK ¹		3,92	3,34	85,1	0,80	7,08		
NPK+Mo ²		4,10	3,19	85,0	0,89	5,13		
Контроль	Воскової стиглості	2,71	2,17	80,3	0,64	5,26	283±22	114±4
Контроль+Мо		2,83	2,26	79,9	0,77	4,83	476±47	184±23
NPK		3,02	2,46	81,1	0,70	4,96	718±28	317±15
NPK+Mo		3,03	2,45	80,9	0,74	4,89	822±61	403±32

Примітки: ¹ NPK : NaNO₃ — 8,4 г у лунку, суперфосфат — 8,0 г у лунку, KCl — 2 г у лунку.² (NH₄)₂MoO₄ — 12,6 мг у лунку.³ Середнє з 60 рослин.

Таблиця 2

Вплив молібдену на вміст вільних амінокислот в листках кукурудзи у фазі волоті
(в мг/100 г сухої ваги)

Варіанти	Аспарагінова кислота	Аланін	Аргінін	Валін+метіонін	Глютамінова кислота	Лейцин	Лізин	Серин+гліцин	Тирозин	Треонін	Триптофан	Цистеїн+цистин	Фенілаланін
Контроль	8,0	12,3	2,7	6,6	18,4	4,2	3,7	5,7	5,5	1,9	1,9	—	6,2
Контроль+Мо	10,0	17,6	3,5	8,0	28,0	5,8	5,5	7,4	6,5	2,0	2,0	—	8,0
NPK	10,0	22,9	4,1	8,2	46,0	5,5	5,6	7,8	8,0	3,0	2,1	3,3	7,5
NPK+Mo	9,2	22,0	4,0	8,3	50,0	5,3	6,1	7,8	8,2	3,1	2,1	3,5	7,7

ЛІТЕРАТУРА

1. Белозерский А. Н., Проскуряков Н. И. Практическое руководство по биохимии растений. М., «Сов. наука», 1951.
2. Hewitt E. J. The metabolism of Micronutrient Elements in plants. «Biological Reviews», vol. 34, 1959, № 3.
3. Денисенковский В. С., Омелянюк Л. Л. Микроудобрения ускоряют созревание и повышают урожай зерна кукурузы. «Земледелие», № 3, 1961.

4. Колотова С. С., Филипова К. Ф., Зиновьева А. А. Влияние предпосевной обработки семян микроэлементами на рост, развитие и урожай кукурузы. Сб. «Применение микроэлементов в сельском хозяйстве и медицине», Рига, 1959.
5. Магницкий К. П. Новые методы анализа растений и почв. М., 1959.
6. Минина Е. И. К вопросу о физиологической роли молибдена в растениях. ДАН СССР, т. 130, № 2, 1960.
7. Озолине-Журовская В. Я. Действие молибдена на урожай и качество гороха. Сб. «Применение микроэлементов в сельском хозяйстве и медицине», Рига, 1959.
8. Шмук А. А. Химия табака и махорки. М., 1948.

А. М. БОГАТЧУК, О. М. ЗАЯРНЮК

ВЛИЯНИЕ МОЛИБДЕНА НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ НИТРАТОВ И СОДЕРЖАНИЕ СВОБОДНЫХ АМИНОКИСЛОТ В ЛИСТЯХ КУКУРУЗЫ

Резюме

Удобрение молибденом заметно повышает содержание наиболее активных в азотном метаболизме аминокислот — глютаминовой кислоты и аланина. В том же направлении действует удобрение кукурузы NPK. При этом также отмечается значительное увеличение глютаминовой кислоты и аланина.

П. Д. МАРЧЕНКО

МАТЕРІАЛИ ДО ФЛОРИ БОРОШНИСТОРОСЯНИХ ГРИБІВ (ERYSIPTHACEAE) РАДЯНСЬКИХ КАРПАТ ТА ЗАКАРПАТТЯ*

Грибна флора західних областей УРСР в значній мірі відображена в роботах переважно польських та чеських мікологів: Я. Крупа (Krupa, 1886, 1888, 1889), Б. Намисловського (Namysłowski, 1909, 1910, 1911, 1914), М. Раціборського (Raciborski, 1909, 1910), К. Рупперта (Rouppert, 1909, 1911), Ц. Хмелевського (Chmielewski, 1910), А. Врублевського (Wróblewski, 1911, 1912, 1913, 1914, 1916, 1922) та Ф. Петрака (Petrak, 1925). Значну роботу по грибах околиць Бережан опублікував у 1907 р. Г. Бобяк.

Деякі з цих дослідників подають у своїх роботах також матеріали про флору грибів, у тому числі борошнисторосяних, сучасних Радянських Карпат.

Я. Крупа, який одним з перших проводив мікологічні дослідження на цій території, в опублікованому у 1889 р. списку грибів з різних місць подає також 12 видів і 16 форм борошнисторосяних з околиць Сколе.

Б. Намисловський (1909) і Ц. Хмелевський (1910) наводять матеріали про грибну флору Карпат з району Чорногори, де було виявлено 11 видів і 26 форм борошнисторосяних.

А. Врублевський опублікував у 1913 р. матеріали про мікофлору Прикарпаття з околиць Коломиї; борошнисторосяних грибів зазначено 11 видів і 14 форм.

Чеський дослідник Ф. Петрак в опублікованій у 1925 р. роботі про мікофлору південно-східної Галичини серед інших грибів подає 4 види і 5 форм борошнисторосяних з околиць Стрия.

За радянських часів М. Ф. Сміцька (5, 6), вивчаючи мікофлору букових лісів Закарпатської області, виявила 12 видів і 14 форм борошнисторосяних грибів.

З. Г. Лавітська (2, 3, 4), досліджуючи грибну флору зелених насаджень Закарпатської області, виявила 15 видів і 25 форм борошнисторосяних грибів. Проте грибна флора Радянських Карпат та Закарпаття залишається ще недостатньо вивченою.

Нами флора борошнисторосяних грибів досліджувалася під час маршрутних обстежень 1961 року. Збори матеріалів були проведені в таких районах: на Закарпатських рівнинах (околиці с. Вільхівці Тячівського району, і м. Мукачева — в червні; околиці с. Велика Добронь Ужгородського району — у вересні і жовтні; околиці міст Мукачева і Тячева, сіл Ключарки і Нижній Коропець Мукачівського

* Науковий керівник — доц І. В. Боговик.

району — в жовтні); в районі Іршавської котловини — у червні і жовтні; в районі Стрийсько-Сянської Верховини — околиці сіл Нижня Яблунька і Нижній Турів Старосамбірського району — у вересні; в районі Березне-Липшанської міжгірської долини — околиці м. Великий Березний — у вересні; на Устьчорнянській улоговині — околиці с. Устьчорна — у жовтні; на високогірних полонинах Квасівський Менчул — у червні і жовтні, Красна — у жовтні; на прилісовій луці Джурджова Прилука — у жовтні.

Зібрані матеріали камерально оброблені зимою 1961 року.

Борошнисторосяні гриби виявлені на представниках 32 родин одно- і двосім'ядольних рослин (табл. 1). На 42 видах вони зустрічались на представниках з родини Compositae. У родині Papilionaceae виявлено 24 види уражених рослин. Далі в порядку зменшення кількості уражуваних видів рослин йдуть родини Labiatae — 18, Rosaceae — 14, з них 7 трав'янистих і 7 — дерев'янистих, Gramineae і Umbelliferae — по 9, Ranunculaceae — 8, Cruciferae — 7, Betulaceae і Borraginaceae — по 6 і т. д. Зовсім мало уражених видів рослин було знайдено на таких багатих видами родин, як Caryophyllaceae, Polygonaceae, Rubiaceae і Scrophulariaceae.

Щодо кількісного видового складу борошнисторосяних грибів на представниках різних родин, то тут також спостерігається різноманітність. 5 видів знайдено на представниках з родини Rosaceae, що належать до родів *Sphaerotheca* (1), *Erysiphe* (1), *Podosphaera* (2) та *Uncinula* (1). На рослинах з родини Papilionaceae знайдено 4 види з родів *Erysiphe* (1) і *Trichocladia* (3), найчастіше зустрічались форми *Erysiphe communis* Grev.

На представниках з родини Compositae виявлено 3 види з родів *Sphaerotheca* і *Erysiphe*, переважали форми *Erysiphe cichoracearum* DC. *Erysiphe communis* Grev. представлений на Compositae тільки однією формою (f. *cirsii* Antipova на *Cirsium arvense* (L.) Scop.). На видах рослин з родини Fagaceae також виявлено 3 види борошнисторосяних грибів з родів *Microsphaera* (2) і *Phyllactinia* (1).

На представниках з інших родин виявлено по 1—2 види, а частіше — тільки один вид борошнисторосяних грибів.

З числа виявлених 27 видів борошнисторосяних грибів 7 належать до роду *Microsphaera*, 6 — *Erysiphe*, 4 — *Trichocladia*, по 3 — *Sphaerotheca*, *Podosphaera* та *Uncinula* і 1 *Phyllactinia*.

Види *Erysiphe* паразитують на рослинах 21 родини і найбільше — на Compositae, Labiatae, Papilionaceae, Gramineae, Umbelliferae, Ranunculaceae і Cruciferae, найменше — на Borraginaceae, Polygonaceae, Dipsacaceae тощо.

Види *Microsphaera* паразитують на рослинах 6 родин, види *Sphaerotheca* — також на рослинах 6 родин і найбільше — на Compositae.

Види інших родів паразитують на представниках 1—3 родин.

У складі флори борошнисторосяних грибів за кількістю видів і форм переважає рід *Erysiphe*, а в ньому — види *Erysiphe communis* Grev. та *E. cichoracearum* DC. Знайдено такі форми *Erysiphe communis* Grev:

f. *aquilegiae* Westendorp

*f. *betae* Jacz.

* f. *brassicae* Hammarl.

на *Aquilegia vulgaris* L. (Тячів) (2);

на *Beta vulgaris* L. (Вел. Добронь, Ключарки);

на *Brassica oleracea* L. (Ключарки),

на *B. nigra* Koch. (Вел. Добронь, Ключарки),

* Зірочкою позначені види та форми грибів, які вперше наводяться для даної території.

Розподіл представників Equisphaceae по родинях рослин-живителів у Радянських Карпатах та Закарпатті

[illegible]

- f. calthae* de Limm. на *Sinapis arvensis* L. (Вел. Березний, Ключарки);
на *Caltha palustris* L. (Н. Турів, Н. Яблунька, Вел. Добронь, Ільниця, полонини Красна і Квасівський Менчул) (9, 10);
- **f. circaeae* Hammarl. на *Circaea lutetiana* L., по дорозі від с. Устьчорна на полонину Красну, в лісі;
- **f. cirsii* Antipova на *Cirsium arvense* (L.) Scop. (Вел. Добронь, Ключарки);
- **f. convolvuli* Rabh. на *Convolvulus arvensis* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Ключарки, Ільниця);
на *Calystegia sepium* R. Br., там же;
на *Delphinium* sp. (Тячів, на клумбах) (2);
на *Hypericum quadrangulum* L. (Н. Турів, Вел. Березний, Тячів, полонини Красна і Квасівський Менчул);
на *H. perforatum* L. (Ільниця, Мукачеве) (9, 10, 11);
- f. delphinii* Rabh. на *Knautia arvensis* (L.) Coult. (Ільниця);
- f. hyperici* Bret. на *Lathyrus pratensis* L. (Н. Яблунька, Н. Коропець);
на *Lepidium campestre* (L.) R. Br. (Вел. Добронь);
на *Lupinus angustifolius* L. і *L. luteus* L. (Н. Турів),
на *L. polyphyllus* L. (Мукачеве) (2);
на *Melandrium album* (Mill.) Garcke. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Ключарки);
- **f. knautiae* Jacz. на *Melilotus albus* Desv. (Н. Яблунька, Мукачеве),
на *M. officinalis* L. (Н. Яблунька, Ключарки, Мукачеве);
- **f. lathyri* Jacz. на *Ononis arvensis* L. (Н. Турів, Вел. Березний, Вел. Добронь, Мукачеве, Н. Коропець);
- **f. lepidii* Jacz. на *Polygonum aviculare* L. (Н. Турів, Вел. Березний, Ключарки, Мукачеве, Ільниця) (11),
на *P. nodosum* Pers. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Мукачеве, Н. Коропець);
- f. lupini* Roumquere на *Ranunculus acris* L. (Н. Яблунька, Н. Турів, Вел. Березний, Вел. Добронь, Ільниця, Тячів, полонина Красна),
на *R. flammula* L. (Ільниця),
на *R. lanuginosus* L. (полонина Квасівський Менчул, Джурджова Прилука),
на *R. pseudobulbosus* Schur. (Вел. Добронь),
на *R. repens* L. (Н. Турів, Вел. Березний, Вел. Добронь, Устьчорна, полонини Красна і Квасів. Менчул) (9, 10);
- **f. melandryi* Jacz. на *Raphanus sativus* L. var. *radicula* Pers. (Вел. Добронь);
- **f. meliloti* Rabh. на *Rumex acetosella* L. (Н. Турів, Вел. Березний, Ільниця, Ключарки);
- **f. ononidis* Jacz. на *Sisymbrium officinale* Scop. (Вел. Березний, Іршава, Вел. Добронь, Мукачеве);
- f. polygonorum* Rabh. на *Succisa pratensis* Moench. (Вел. Добронь, Ільниця, Тячів);
- f. ranunculi* Rabh. на *Trifolium arvense* L. (Вел. Добронь),
на *T. campestre* Schreb. (Вільхівці),
на *T. dubium* Sibth. (Іршава, Ільниця, Вел. Добронь),
на *T. medium* L. (Н. Турів, Вел. Березний, Ільниця, Устьчорна, Тячів);
на *T. pratense* L. (Н. Турів, Вел. Березний, Вел. Добронь, Ключарки, Тячів, полонина Квасівський Менчул),
на *T. hybridum* L. (Ключарки) (10);
на *Filipendula ulmaria* (L.) Maxim. (Н. Турів, Ільниця, Устьчорна);
- **f. raphanidis* Jacz. на *Urtica dioica* L. (Н. Турів, Вел. Березний);
- **f. rumicis* Fock. на *Vicia cracca* L. (Н. Турів, Н. Яблунька, Вел. Березний, Вел. Добронь),
на *V. sepium* L. (Н. Турів),
на *V. tetrasperma* (L.) Moench. (Вел. Добронь).
- **f. sisymbrii* Jacz.
- **f. succisae* Jacz.
- f. trifolii* Rabh.
- **f. ulmariae* Dietrich
- **f. urticae* Rabh.
- **f. viciae* Jacz.

Erysiphe cichoracearum DC. знайдено 19 форм:

- *f. *artemisiae* (Fuck.) Jacz. на *Artemisia vulgaris* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Ключарки, Мукачеве, Іршава).
 *f. *achilleae* Jacz. на *Achillea ptarmica* L. (Устьчорна, на клумбах);
 f. *bardanae* (Wallroth) Jacz. на *Arctium lappa* L. (Вел. Березний, Мукачеве, Іршава, Устьчорна),
 на *A. minus* Bernh. (Мукачеве),
 на *A. tomentosum* Mill. (Н. Турів, Вел. Добронь, полонина Квасів, Менчул) (11);
 *f. *cardui* Jacz. на *Carduus Kernerii* Simk. (полонина Квасів, Менчул);
 *f. *cichorii intybi* Lév. на *Cichorium intybus* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Ільниця, Ключарки, Н. Коропець);
 *f. *centaureae jaceae* Jacz. на *Centaurea Jacea* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Н. Турів, Ільниця, Ключарки, Тячів);
 на *C. sp. (austriaca?)* (Н. Турів, Устьчорна, полонина Квасів, Менчул, Джурджова Прилука);
 f. *cirsii* (Lasch.) Jacz. на *Cirsium arvense* (L.) Scop. (Н. Яблунька, Н. Турів, Вел. Березний, Вел. Добронь, Ключарки), на *C. lan- ceolatum* (L.) Scop. (Вел. Добронь, Ільниця, Н. Коропець, полонина Квасів, Менчул).
 на *C. oleraceum* L. (Н. Турів),
 на *C. rivulare* (Jacq.) Link. (Н. Яблунька) (9);
 *f. *crepidis* Jacz. на *Crepis biennis* L. (Вільхівці, Мукачеве);
 *f. *cucurbitacearum* Potebn. на *Cucumis sativus* L. (Ключарки);
 *f. *eu-hieracium* Blumer на *Hieracium murorum* L. (Н. Турів);
 на *H. umbellatum* L. (Ільниця);
 *f. *eupatorii Dearness f. galii* Jacz. на *Eupatorium cannabinum* L. (Мукачеве);
 на *Galium aparine* L. (Ільниця),
 на *G. verum* Scop. (Н. Турів),
 на *G. verum* L. (Вел. Добронь, Тячів) (14);
 *f. *lycopi* Jacz. на *Lycopus europaeus* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Мукачеве);
 *f. *menthae* Jacz. на *Mentha arvensis* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Ільниця, Ключарки, Мукачеве),
 на *M. silvestris* L. (Ільниця, Мукачеве);
 *f. *plantaginis* Potebn. на *Plantago major* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Ільниця, Ключарки, Мукачеве);
 f. *senecionis* Jacz. на *Senecio Fuchsii* Gmel. (полонина Квасівський Менчул) (6, 9, 10, 11);
 *f. *sonchii* Jacz. на *Sonchus arvensis* L. (Н. Турів, Вел. Добронь, Ільниця, Ключарки);
 на *S. asper* (L.) Hill. (Вел. Березний, Вел. Добронь),
 на *S. oleraceus* L. (Іршава, Вел. Березний);
 f. *tanacetii* Jacz. на *Tanacetum vulgare* L. (Ключарки) (2);
 f. *verbasci* Jacz. на *Verbascum nigrum* L. (Ключарки, Ільниця, Устьчорна, полонина Квасів, Менчул) (10).

Менш поширені інші види *Erysiphe*. Так, *Erysiphe horridula* Lev. знайдено тільки 3 форми:

- *f. *anchusae* Dietrich на *Anchusa officinalis* L. (Мукачеве);
 f. *symphyti* Roumquere на *Symphytum officinale* L. (Вел. Добронь, Ільниця, Ключарки, Мукачеве),
 f. *pulmonariae* Dietrich на *S. cordatum* W. K. (полонина Красна) (6, 9, 11);
 на *Pulmonaria* sp. (Ільниця) (9).

Erysiphe labiatarum Chev. знайдено 6 форм:

- *f. *ballotae* (Wallroth) Jacz. на *Ballota ruderalis* Swartz. (Вел. Добронь, Мукачеве);
 f. *galeopsidis* (Desmaz.) Jacz. на *Galeopsis speciosa* Mill. (Вел. Добронь, Устьчорна, полонина Квасів, Менчул),
 на *G. tetrahit* L. (Іршава) (11);

- f. *lamii* (Dietrich) Jacz. на *Lamium album* L. (Вел. Березний),
на *L. purpureum* L. (Мукачеве, Н. Турів),
на *Galeobdolon luteum* Huds. (Н. Яблунька) (9, 10);
*f. *salviae* Jacz. на *Salvia glutinosa* L. (Вел. Березний, Устьчорна);
*f. *stachydis* Dietrich на *Stachys palustris* L. (Н. Турів, Вел. Березний, Іль-
ниця),
на *S. silvatica* L. (Вел. Березний, Устьчорна);
*f. *thymi* Jacz. на *Thymus serpyllum* L. (Н. Яблунька, Ільниця).

Erysiphe graminis DC. також виявлено 6 форм:

- *f. *agropyri* Jacz. на *Agropyrum repens* P. B. (Іршава, Мукачеве, Вел. Березний);
f. *hordei cult.* Jacz. на *Hordeum vulgare* L. (Ключарки);
*f. *bromi* March. на *Bromus mollis* L. (Вільхівці, Мукачеве);
f. *poae* March. на *Poa pratensis* L. (Вільхівці, Іршава, Мукачеве),
на *P. trivialis* L. (Вільхівці) (9, 10, 11);
f. *secalis* March. на *Secale cereale* L. (Вільхівці, Мукачеве);
f. *tritici* March. на *Triticum aestivum* L. (Ключарки).

Erysiphe umbelliferarum De Bary знайдено 8 форм:

- *f. *angelicae* Dietrich на *Angelica silvestris* L. (Н. Яблунька, Вел. Добронь);
*f. *anthrisci* Jacz. на *Anthriscus silvestris* L. (Вел. Березний);
f. *chaerophylli* Jacz. на *Chaerophyllum aromaticum* L. (Н. Яблунька, Іль-
ниця, Мукачеве, Устьчорна);
на *S. hirsutum* L. (Н. Яблунька, Джурджова При-
лука) (6, 9);
*f. *conii* Jacz. на *Conium maculatum* L. (Вел. Добронь);
f. *heraclei* Dietrich на *Heracleum spondylium* L. (Н. Яблунька, Вел. Бе-
резний, Вел. Добронь, Мукачеве);
*f. *pastinacae* Hammarl. на *Pastinaca sativa* L. (Вел. Добронь);
*f. *peucedani* Jacz. на *Peucedanum oreoselinum* (L.) Moench. (Ільниця, Тя-
чів);
*f. *pimpinellae* Dietrich на *Pimpinella saxifraga* L. (Н. Турів, Вел. Березний,
Вел. Добронь, Ільниця, Тячів).

В меншій кількості виявлено видів і форм *Sphaerotheca*. Найбільше знайдено форм *Sphaerotheca fuliginea* Poll.:

- *f. *bidentis* Jacz. на *Bidens tripartita* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь,
Ільниця, Мукачеве, Тячів);
f. *calendulae* Jacz. на *Calendula officinalis* L. (Вел. Березний, Мукаче-
ве) (2);
*f. *cucurbitae* Jacz. на *Cucurbita pepo* L. (Ільниця, Н. Коропець);
f. *doronici* Jacz. на *Doronicum austriacum* Jacq. (полонина Квасів, Мен-
чул) (9);
*f. *erigerontis* (Oudemans) Jacz. на *Erigeron canadensis* L. (Вел. Березний, Вел. До-
бронь, Іршава, Ключарки);
*f. *euphrasiae officinalis* Dietrich на *Odontites serotina* Rchb. (Вел. Добронь, Ільниця);
*f. *leontodontis* Jacz. на *Leontodon autumnalis* L. (Вел. Добронь, Ключарки);
на *L. hispidus* L. (Н. Турів, Тячів);
f. *melampyri* Dietrich на *Melampyrum nemorosum* L. (Вел. Березний) (10);
*f. *plantaginis* Duby на *Plantago lanceolata* L. (Вел. Березний, Вел. До-
бронь, Ільниця, Ключарки, Мукачеве, Тячів);
f. *senecionis* Jacz. на *Senecio subalpinus* Koch. (полонина Квасівський
Менчул),
на *S. nemorensis* L. (Джурджова Прилука) (9).
*f. *taraxacum* Potebn. на *Taraxacum officinale* L. (Н. Турів, Вел. Березний,
Вел. Добронь, Ключарки).

Sphaeroteca macularis Magn. знайдено 3 форми:

- | | |
|-------------------------------|---|
| f. <i>alchemillae</i> Steiner | на <i>Alchemilla vulgaris</i> L. (Н. Турів, Н. Яблунька, полонини Квасівський Менчул і Красна) (9, 11); |
| *f. <i>potentillae</i> Jacz. | на <i>Potentilla anserina</i> L. (Н. Турів, Вел. Березний, Мукачеве); |
| *f. <i>sanquisorbae</i> Rabh. | на <i>Sanquisorba officinalis</i> L. (Іршава, Ільниця). |

Sphaeroteca epilobii Magn. (*S. macularis* Magn. f. *epilobii* Potebn.) в сумчастій стадії знайдено на *Epilobium montanum* L. в околицях с. Н. Турів Старосамбірського району (10).

З роду *Podosphaera* виявлено 3 види. Дуже поширена і шкідлива на Закарпатті борошниста роса яблуні (*Podosphaera leucotricha* Salm.). На сортах Джонотан, Пепін лондонський і Уелс вона досягала сильного розвитку.

Характерним для цього року було також численне утворення клейстокарпіїв, що, очевидно, пояснюється сухим вегетаційним періодом. Клейстокарпії були знайдені на різних сортах яблуні, переважно на пагонах. Борошниста роса яблуні в сумчастій стадії була знайдена також у Карпатах, в околицях с. Н. Турів Старосамбірського району Львівської області.

Podosphaera tridactyla De Bary f. *pruni* Golov. часто зустрічалась на *Prunus domestica* L., знайдена в околицях сіл Вел. Добронь, Ільниця, Ключарки і м. Мукачева; на *Prunus spinosa* L. її знайдено тільки один раз в околицях с. Вел. Добронь (4). На *Armeniaca vulgaris* Lam. у плодовому розсаднику в околицях с. Ключарки поблизу Мукачева виявлена *f. *armeniaca* Jacz. цього ж виду; помітної шкоди не викликала.

Podosphaera myrtillina (Schub.) Kunze et Schmidt знайдена на *Vaccinium myrtillus* L. в околицях села Н. Турів поблизу Турки (10).

З видів *Trichocladia* поширений *Trichocladia astragali* Neger, зібрано на *Astragalus glycyphyllos* L. в околицях сіл Н. Яблунька, Вел. Добронь і Устьчорна (10). Не менш часто зустрічалась *Trichocladia evonymi* Neger на *Evonymus europaeus* L., при сильному розвитку приводить до висихання листків, зібрана у Вільхівцях, Мукачеві, Ільниці і Вел. Березному (2).

На *Robina pseudoacacia* L. була поширена *Trichocladia robiniae* Tschern., особливо на сіянцях у розсадниках, при сильному розвитку спричинювала відмирання листків. Зібрана в околицях сіл Вел. Добронь, Ільниця і Н. Коропець (2).

На листках *Vicia cracca* L. в околицях с. Вел. Добронь виявлена **Trichocladia Bäumleri* Neger.

Досить поширеними були види *Microsphaera*: *M. alphitoides* Griff. et Maubl. на *Quercus robur* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Іршава, Н. Коропець, Тячів), який викликає епіфітотичне захворювання дуба — борошністу росу і особливо шкодить молодим дубкам та сіянцям у розсадниках; *M. alni* (Wallr.) (*M. penicillata* (Wallr.) Lév. f. *alni* Jacz.) на *Alnus glutinosa* (L.) Cärth. (Ільниця), на *A. incana* (L.) Willd. (Вел. Березний, Устьчорна, полонина Квасівський Менчул), на *A. viridis* DC. (полонина Квасівський Менчул) (4,5); * *M. divaricata* (Wallr.) Lév. на *Frangula alnus* Mill. (Вел. Березний, Вел. Добронь); **M. hypophylla* Nevodovsky на *Quercus robur* L. (Вел. Березний, Вел. Добронь, Н. Коропець).

Рідше зустрічались інші види *Microsphaera*: *M. berberidis* (DC.) Lév. на *Berberis vulgaris* L. (Мукачеве) (2); *M. grossulariae* (Wallr.)

Lév. на *Grossularia reclinata* (L.) Mill (полонина Квасівський Менчул. Ключарки) (10, 11); *M. lonicerae* (DC.) Winter на *Lonicera tatarica* L. (Мукачеве) (2).

З видів *Uncinula* поширений *Uncinula salicis* Winter, якого знайдено 2 форми: *f. populorum* Rabh. на *Populus nigra* L. (Мукачеве) (4); *f. salicis* Jacz. на *Salix caprea* L. (Н. Турів), на *S. purpurea* L. (Н. Турів), Вел. Березний, Мукачеве) (5, 11).

Часто зустрічалась **Uncinula prunastri* Sacc. на *Prunus spinosa* L. (Ільниця, Вел. Березний, Тячів).

Uncinula aceris Sacc. виявлена на *Acer campestre* L. (Вел. Березний), на *A. platanoides* L. (Вел. Добронь, полонина Квасівський Менчул) (4, 5); завдає шкоди сіянцям у розсадниках. Поширеними були форми *Phyllactinia suffulta* (Rabh.) Sacc.: **f. alni* Hammarl. на *Alnus glutinosa* (L.) Gärtn. (Ільниця), на *A. incana* (L.) Willd. (Вел. Березний, Устьчорна); *f. betulae* Thuemen на *Betula verrucosa* Ehrh. (Вел. Березний, Ільниця) (4, 5, 6); **f. carpini betuli* Jacz. на *Carpinus betulus* L. (Вел. Березний, Ільниця); *f. coryli avellanae* Jacz. на *Corylus avellana* L. (Н. Турів, Вел. Березний, Ільниця, Устьчорна) (4, 5, 6); *f. fagi* DuRoi на *Fagus silvatica* L. (Вел. Березний, Ільниця, полонини Красна і Квасівський Менчул) (5, 6); *f. fraxini* DC. на *Fraxinus excelsior* L. (Вел. Добронь, Джурджова Прилука) (4).

З табл. 2 видно, що борошнисторосяні гриби поширені неоднаково в обслідуваних територіях. Спостерігається зменшення кількості видів і форм з висотою місцевості над рівнем моря, зміною температури і вологості.

Найбільш багато і різноманітно представлена флора борошнисторосяних грибів на Притисянській низовині, де було виявлено 22 види і 68 форм у сумчастій стадії, що належать до 7 родів, один вид (*Sphaerotheca epilobii* Magn.) і 14 форм — у конідіальній стадії. На полонині Квасівський Менчул виявлено всього 9 видів і 15 форм у сумчастій стадії, 2 види (*Sphaerotheca epilobii* Magn. і *Erysiphe graminis* DC.) і 11 форм — у конідіальній стадії. На полонині Красній виявлено тільки 4 види і 6 форм у сумчастій стадії, 2 види (*Erysiphe graminis* DC. і *E. labiatarum* Chev.) і 4 форми у конідіальній стадії. Більшу кількість борошнисторосяних грибів на полонині Квасівський Менчул можна пояснити наявністю там більш багатой і різноманітної флори вищих рослин порівняно з полониною Красною, де переважають в основному біловусові пустощі. Найбільш поширені на полонинах були форми видів *Erysiphe cichoracearum* DC., *E. communis* Grev. і *Sphaerotheca fuliginea* Poll. Слід відмітити, що в жовтні в умовах полонин, як і на рівнинах, форми виду *Erysiphe labiatarum* Chev. мали сумки без спор, форми видів з роду *Sphaerotheca* мали неповністю сформовані або зачаткові спори, всі інші виявлені види і форми мали у сумках спори.

Тільки конідіальна стадія борошнисторосяних грибів у високогірних районах Карпат (на полонинах) виявлена або на тих самих рослинах, на яких і в інших районах західних областей УРСР нами не була виявлена сумчаста стадія: *Bellis perennis* L., *Glechoma hederacea* L., *Hieracium pilosella* L. і *Veronica chamaedrys* L., або на таких рослинах, на яких сумчаста стадія і в інших районах рідко зустрічається: *Epilobium montanum* L., *Galeobdolon luteum* Huds., *Pulmonaria rubra* Schot., *Stachys silvatica* L., *Thymus* sp. та інш.

Таблиця 2

Поширення представників Erysiphaceae у Радянських Карпатах та Закарпатті

Назва території	Висота над р. м. (м)	Sphaerotheca		Erysiphe		Podosphaera		Trichocladia		Microsphaera		Uncinula		Phyllactinia		Разом		форм
		видів	форм	видів	форм	видів	форм	видів	форм	видів	форм	видів	форм	видів	форм	видів	форм	
Притисянська низовина, (Мукачеве, Ключарки, Ниж. Коропець, Вел. Добронь)	106—127	3	9	6	55	2	2	4	—	5	—	2	2	1	1	23	68	14
Район Іршавської улоговини (Іршава, Ільниця)	143	2	6	6	32	3	1	2	—	2	—	1	—	1	5	17	44	10
Район Березне-Липчанської міжгірної долини (Вел. Березний)	210	3	7	4	27	1	—	1	—	4	—	3	1	1	5	17	40	5
Район Стрийсько-Сянської Верховини (Ниж. Яблунька і Ниж. Турів біля Турки)	587—650	3	4	5	26	2	—	1	—	—	—	1	1	1	1	13	32	13
Полонина Квасівський Менчул	1225—1350	3	3	4	11	—	—	—	—	2	—	1	—	1	1	11	15	11
Полонина Красна	1100—1200	1	1	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	6	6	4

У флорі борошнисторосяних грибів передгірних і низькогірних районів Карпат у порівнянні з Притисянською низовиною немає істотних відмінностей.

Крім вищезгаданих видів і форм у сумчастій стадії на багатьох рослинах були знайдені борошнисторосяні гриби в конідіальній стадії, як *Oidium*.

Oidium erysiphoides Fries знайдено на таких рослинах:

* <i>Ajuga reptans</i> L.	(Н. Турів).
<i>Aster salicifolius</i> Schol.	(Н. Турів, Вел. Березний, Вел. Добронь) (4).
* <i>Bellis perennis</i> L.	(полонина Квасівський Менчул).
<i>Brassica napus</i> L. і <i>B. oleracea</i> L.	(Н. Турів).
* <i>Coronilla varia</i> L.	(Мукачеве).
* <i>Echium vulgare</i> L.	(Ключарки, Ільниця).
<i>Galeobdolon luteum</i> Huds.	(Вел. Березний, полонини Квасівський Менчул і Красна).
* <i>Glechoma hederacea</i> L.	(Н. Яблунька, Устьчорна, полонина Квасівський Менчул).
* <i>Galega officinalis</i> L.	(Вел. Добронь).
<i>Galium mollugo</i> L.	(Н. Турів).
<i>G. verum</i> L.	(Вел. Березний, Ільниця).
* <i>Geum rivale</i> L.	(Н. Яблунька).
<i>Hieracium pilosella</i> L.	(Ільниця, полонина Квасівський Менчул).
* <i>Inula britannica</i> L.	(Іршава).
<i>Knautia arvensis</i> (L.) Coult.	(Вільхівці, Вел. Березний).
* <i>Lactuca muralis</i> (L.) Fresen.	(Н. Турів).
* <i>L. serriola</i> L.	(Вел. Добронь).
* <i>Lotus corniculatus</i> L.	(Мукачеве, Н. Яблунька, Вел. Добронь, Ільниця, Тячів).
<i>Mentha</i> sp.	(Н. Турів).
* <i>Oenothera biennis</i> L.	(Ключарки).
* <i>Onobrychis viciaefolia</i> Scop.	(Н. Яблунька, Вел. Добронь).
<i>Plantago major</i> L.	(полонина Квасівський Менчул).
<i>Potentilla</i> sp.	(Вільхівці).
<i>Pulmonaria rubra</i> Schot.	(полонина Квасівський Менчул).
* <i>Scabiosa ochroleuca</i> L.	(Ільниця, Тячів).
<i>Senecio Jacobaea</i> L.	(Вел. Добронь, Ільниця).
* <i>Solidago virga aurea</i> L.	(Н. Турів, Ільниця).
<i>Stachys germanica</i> L.	(Вільхівці, Іршава).
<i>S. silvatica</i> L.	(полонини Квасівський Менчул і Красна).
<i>Rosa canina</i> L.	(Н. Яблунька).
<i>Trifolium campestre</i> Schreb.	(Мукачеве).
<i>T. dubium</i> Sibth.	(Вільхівці, Мукачеве, Вел. Березний).
<i>T. strepens</i> Crantz.	(Н. Турів).
<i>Thymus serpyllum</i> L.	(Тячів).
<i>T. sp.</i>	(полонини Квасівський Менчул і Красна).
* <i>Veronica chamaedrys</i> L.	(Н. Турів, Вел. Добронь, полонина Квасівський Менчул).
<i>Vicia hirsuta</i> (L.) S. F. Gray.	(Мукачеве).
<i>V. villosa</i> Roth.	(Н. Турів).
* <i>Xanthium strumarium</i> L.	(Мукачеве).

Oidium aceris Rabh. знайдено на *Acer negundo* L. (Вел. Добронь); **O. cydoniae* Passerini — на *Cydonia vulgaris* L. (Іршава); *O. epilobii* Lind. — на *Epilobium montanum* L. (полонина Квасівський Менчул), на *E. roseum* Schreb. (Н. Турів, Устьчорна), на *E. sp.* (Вел. Добронь); **O. farinosum* Cooke — на *Rubus communis* L. (Ключарки); **O. monilioides* Link. — на *Hordeum murinum* L. і *Lolium perenne* L. (Мукачеве), на *Rosa annua* L. (полонина Красна), на *R. pratensis* L. (Н. Турів і полонина Квасівський Менчул), на *R. trivialis* L. (полонина Квасівський Менчул); **O. ruborum* Rabh. — на *Rubus caesius* L. (Вел. Добронь).

Серед борошнисторосяних грибів Радянських Карпат та Закарпаття лише один раз були знайдені *Podosphaera myrtillina* (Schub.) Kunze et Schmidt в околицях с. Н. Турів Старосамбірського району і *Trichocladia Bäumleri* Neger в околицях с. Вел. Добронь Ужгородського району. Ці види є маловідомими для України.

Серед зібраного матеріалу кілька форм борошнисторосяних грибів вперше наводяться для України:

Sphaerotheca fuliginea Poll: f. *euphrasiae officinalis* Dietr. на *Odontites serotina* Rchb., f. *leontodontis* Jacz на *Leontodon autumnalis* L. і *L. hispidus* L.;

Erysiphe cichoracearum DC.: f. *cardui* Jacz. на *Carduus Kernerii* Simk., f. *crepidis* Jacz. на *Crepis biennis* L.;

Erysiphe communis Grev.: f. *cirsii* Antipova на *Cirsium arvense* (L.) Scop., f. *knautiae* Jacz. на *Knautia arvensis* (L.) Coult., f. *melandryi* Jacz. на *Melandrium album* (Mill.) Garcke., f. *raphanidis* Jacz. на *Raphanus sativus* L. var. *radicula* Pers., f. *succisae* Jacz. на *Succisa pratensis* Moench., f. *ulmariae* Dietr. на *Filipendula ulmaria* (L.) Maxim.

Крім цього, 4 види (*Trichocladia Bäumleri*, *Microsphaera divaricata*, *M. hypophylla* та *Uncinula prunastri*) і 77 форм у сумчастій або конідіальній стадії є новими для даної території (у списку відмічені зірочкою).

Дослідження показують, що борошнисторосяні гриби розвиваються нерівномірно протягом вегетаційного періоду: на початку літа, в червні, слабо, найсильнішого розвитку досягають у кінці літа і восени. Але вже в першій половині червня у Закарпатті, де значно тепліше і вегетаційний період починається раніше, виявлено декілька борошнисторосяних грибів в сумчастій стадії. З них *Erysiphe cichoracearum* DC. f. *artemisiae* (Fuck.) Jacz на *Artemisia vulgaris* L. та *Trichocladia evonymi* Neger на *Evonymus europaeus* L. мали сумки з сумкоспорами. Такі борошнисторосяні гриби в першій половині червня мали клейстокарпії тільки з сумками:

Sphaerotheca fuliginea Poll: f. *plantaginis* Duby на *Plantago lanceolata* L. *Erysiphe cichoracearum* DC.: f. *crepidis* Jacz. на *Crepis biennis* L., f. *bardanae* (Wallr.) Jacz. на *Arctium minus* Bernh., f. *galii* Jacz. на *Galium aparine* L., f. *plantaginis* Potebn. на *Plantago major* L.; *Erysiphe communis* Grev.: f. *trifolii* Rabh. на *Trifolium campestre* Schreb. і *T. dubium* Sibth. *Erysiphe graminis* DC.: f. *agropyri* Jacz. на *Agropyrum repens* P. B., f. *bromi* March. на *Bromus mollis* L., f. *hordei* cult. Jacz. на *Hordeum vulgare* L., f. *poae* March. на *Poa pratensis* L. і *P. trivialis* L., f. *secalis* March. на *Secale cereale* L., f. *tritici* March. на *Triticum aestivum* L.; *Erysiphe horridula* Lev.: f. *anchusae* Dietr. на *Anchusa officinalis* L.; *Erysiphe labiatarum* Chev.: f. *galeopsidis* (Desmaz.) Jacz. на *Galeopsis tetrahit* L., f. *lamii* (Dietr.) Jacz. на *Lamium purpureum* L.

Більшість борошнисторосяних грибів у цей час зустрічалась у конідіальній стадії.

Дуже слабо розвивались борошнисторосяні гриби в червні лише в конідіальній стадії на *Alchemilla vulgaris* L., *Poa pratensis* L. і *P. trivialis* L. у високогір'ї Карпат.

Всього у Радянських Карпатах та Закарпатті виявлено борошнисторосяних грибів 27 видів, 92 форми в сумчастій стадії і 23 форми в конідіальній стадії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Головин П. Н. Материалы к монографии мучнисторосяных грибов (семейство Erysiphaceae) в СССР. Тр. Бот. ин-та АН СССР, сер. II, вып. 10, 1956.
2. Лавітська З. Г. Мікологічна грибна флора зелених насаджень Закарпатської області. Науковий щорічник Київськ. держ. ун-ту ім. Т. Г. Шевченка за 1956 р., К., 1957.
3. Лавітська З. Г. До питання про роль грибів в зелених насадженнях Закарпатської області. Охорона прир. в зах. обл. УРСР. Тези допов. на нараді по охор. природи і раціональному використанню природних ресурсів зах. обл. УРСР 14—16 листопада 1957 р., ч. I. Львів, 1957.
4. Лавітська З. Г. Паразитна грибна флора зелених насаджень Закарпатської області. Науковий щорічник Київськ. ун-ту ім. Т. Г. Шевченка, К., 1958.
5. Сміцька М. Ф. Грибні хвороби деревних та чагарникових порід букових лісів Закарпатської області. Укр. Бот. Журн. т. XII, в. 4, 1955.
6. Сміцька М. Ф. Огляд мікофлори букових лісів Закарпатської області. Конференція по вивченню флори і фауни Карпат та прилеглих територій. Тези доповідей. К., 1960.
7. Цысь П. Н. О физико-географическом районировании и ландшафтном картировании западных областей Украинской ССР. Географич. сборник Львовск. ун-та, вып. 4, 1957.
8. Ячевский А. А. Мучнисторосяные грибы. Карманный определитель грибов, вып. 2, Л., 1927.
9. Chmielewski Ł. Zapiski grzyboznawcze z Czarnej Hory. Kosmos, XXXV, 1910.
10. Krupa J. Zapiski mycologiczne przeważnie z okolic Lwowa i Karpat Stryjskich. Spraw. Kom. fizyogr., Ak. Um., XXIII, 1889.
11. Namysłowski B. Zapiski grzyboznawcze z Krakowa, Gorlic i Czarnej Hory. Spraw. Kom. fizyogr., XLIII, 1909.
12. Petrak F. Beiträge zur Pilzflora Südost — Galiziens und der Zentralkarpaten. Hedwigia, LXV, 1925.
13. Wróblewski A. Przyczynek do znajomości grzybów Pocucia. Spraw. Kom. fizyogr., Ak. Um., XLVII, 1913.
14. Wróblewski A. Drugi przyczynek do znajomości grzybów Pocucia i Karpat. Spraw. Kom. fizyogr., Ak. Um., L, 1916.

П. Д. МАРЧЕНКО

МАТЕРИАЛЫ К ФЛОРЕ МУЧНИСТОРОСЯНЫХ ГРИБОВ (ERYSIPHACEAE) СОВЕТСКИХ КАРПАТ И ЗАКАРПАТЬЯ

Резюме

На 189 видах высших растений из 32 ботанических семейств в Советских Карпатах и Закарпатье выявлены мучнисторосяные грибы 27 видов: *Sphaerotheca epilobii*, *S. fuliginea*, *S. macularis*, *Podosphaera leucotricha*, *P. myrtillina*, *P. tridactyla*, *Trichocladia astragali*, *T. Bäumleri*, *T. evonymi*, *T. robiniae*, *Erysiphe graminis*, *E. cichoracearum*, *E. communis*, *E. horridula*, *E. labiatarum*, *E. umbelliferarum*, *Microsphaera alphitoides*, *M. alni*, *M. berberidis*, *M. divaricata*, *M. hypophylla*, *M. grossulariae*, *M. loniceriae*, *Phyllactinia suffulta*, *Uncinula aceris*, *U. prunastri*, *U. salicis* и 115 форм (92 в сумчатой стадии и 23 в конидиальной стадии).

Из них, по опубликованным данным, не упоминались раньше для Советских Карпат и Закарпатья 4 вида: *Trichocladia Bäumleri*, *Microsphaera divaricata*, *M. hypophylla*, *Uncinula prunastri* и 77 форм (57 в сумчатой и 20 в конидиальной стадии), для Украины 10 форм в сумчатой стадии.

Л. П. СТРУГОВЩИКОВА

ПОРІВНЯЛЬНА ОЦІНКА МЕТОДІВ ВИЗНАЧЕННЯ ФЛАВІНІВ У КЛІТИНАХ ДРІЖДЖІВ*

Рибофлавін (вітамін В₂) широко розповсюджений в живих істотах. В клітинах частина його знаходиться у формі нуклеотидів — флавінмононуклеотиду (ФМН) і флавінаденіндинуклеотиду (ФАД). Властивості рибофлавіну та його нуклеотидів детально описані в ряді оглядів і монографій (4, 10, 15, 19). Успішне вивчення ролі флавінів в обміні речовин в значній мірі залежить від розробки методів їх визначення, тому за останній час вони стали об'єктом численних досліджень.

Найбільш розповсюдженими методами визначення рибофлавіну є різні модифікації мікробіологічного та флюорометричного методів. Для якісного та кількісного визначення окремих форм флавінів можна застосовувати електрофорез і різні види розподільчої хроматографії. Були запропоновані також колориметричний та полярографічний методи.

У зв'язку з тим, що в літературі описана велика кількість різних модифікацій методів визначення рибофлавіну, більшість дослідників для одержання точних даних порівнює показники декількох методів.

Серед мікроорганізмів, і зокрема дріжджів, були знайдені культури, які в процесі своєї життєдіяльності можуть утворювати і виділяти в середовище значну кількість рибофлавіну (2).

Визначення рибофлавіну в клітинах мікробів — «надсинтетиків» вітаміну В₂ — пов'язане з деякими методичними труднощами, які не зустрічаються при роботі з іншими мікроорганізмами, і тому вимагає більш детальної розробки і вдосконалення.

В даній роботі висвітлюється дослідження деяких методів визначення флавінів і можливість їх застосування для аналізу рибофлавіну та його нуклеотидів в дріжджових клітинах.

Досліди проводили з культурою *Candida guilliermondii* (ATCC-9058), яка характеризується підвищеним синтезом рибофлавіну. Дріжджі вирощували на синтетичному середовищі Беркхольдера (9) з глюкозою і глікоколом при 30°C. Кількість рибофлавіну визначали флюорометрично на флюорометрі ЕФ-3.

Дріжджі *C. guilliermondii* синтезують від 400 до 20 000 мкг рибофлавіну на 1 г сухої ваги клітин. Більшу частину його вони виділяють у культуральну рідину. В умовах підвищеного синтезу рибофлавіну частина виділеного вітаміну може викристалізовуватись. При відокремлюванні клітин від культуральної рідини кристали вітаміну попадають у дріжджову масу і заважають визначенню флавінів в клітинах.

* Науковий керівник — канд. біол. наук Г. М. Шавловський.

Ми встановили, що кількість кристалічного рибофлавіну може бути досить велика — до 1000 μg на 100 мл культуральної рідини.

Для його видалення дріжджі промивали рівними порціями розчинів таких солей: 0,15 М KH_2PO_4 , 0,15 М NaCl і 0,03 М Na_2HPO_4 з різними значеннями рН.

Як видно з рис. 1, відмивання клітин лужним розчином (рН 7, 8) супроводжується видаленням значно більшої кількості рибофлавіну, ніж кислим (рН 5—6). В той же час зникає кристалічний рибофлавін, що пов'язано з його кращою розчинністю в лужних розчинах (15).

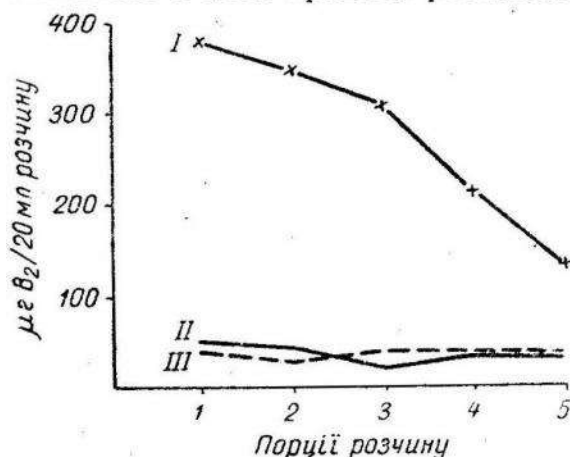


Рис. 1. Відмивання клітин *C. guilliermondii* розчинами різних солей.

I — 0,03 М Na_2HPO_4 (рН 7, 8); II — 0,15 М KH_2PO_4 (рН 5,0); III — 0,15 М NaCl (рН 5,8). Культуральна рідина містить кристалічний рибофлавін; для аналізу взято по 1 г сирої ваги клітин.

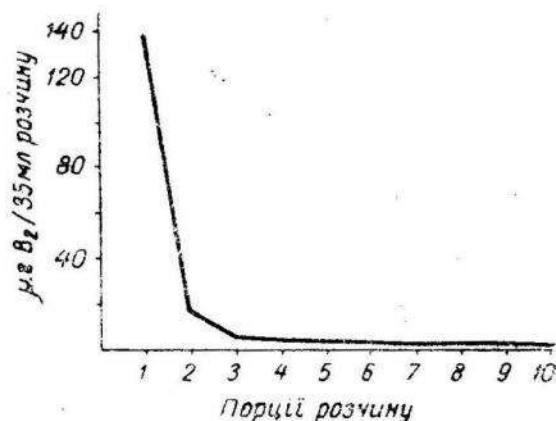


Рис. 2. Відмивання клітин *C. guilliermondii* 0,15 М KH_2PO_4 .

Концентрація рибофлавіну в культуральній рідині — 15,96 $\mu\text{g}/\text{мл}$; для аналізу взято по 2,5 г сирої ваги клітин.

Таким чином, кристалічний рибофлавін можна видалити промиванням клітин лужним розчином, для чого необхідно не менше п'яти порцій розчину солі.

Якщо дріжджі синтезують менше рибофлавіну, відмивання може бути коротшим (рис. 2).

Більш тривале відмивання приводить до екстракції внутріклітинного рибофлавіну і перш за все — вільного рибофлавіну. За допомогою хроматографії на папері було показано, що добре відмиті клітини містять тільки нуклеотидні форми.

1. ВИЗНАЧЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО ВМІСТУ ФЛАВІНІВ

а) Флюорометричний метод. Цей метод включає такі основні пункти: 1) екстракцію зразка; 2) видалення заважаючих речовин; 3) визначення вітаміну в одержаному екстракті.

В літературі описані різноманітні способи екстракції флавінів з природних джерел. В нашій роботі були використані такі: 45-хвилинна екстракція 0,1 Н H_2SO_4 на киплячій водяній бані (1), 15-хвилинна екстракція 5-проц. трихлороцтовою кислотою (ТХОК) на холоді (12), екстракція гарячою дистильованою водою при 80°C (20) і протеоліз за допомогою панкреатину (8).

Одержані екстракти, особливо після протеолізу і екстракції гарячою водою, містять багато речовин, що маскують флюоресценцію рибофлавіну. Для їх видалення зразки обробляли за методом Кошара (1)

KMnO₄, SnCl₂ і Na₂S₂O₄. Після очистки екстракти ставали більш прозорими, проте флюоресценція побічних речовин залишалась все ж таки значною. Якщо клітини утворювали багато порфіринів, які переходять в екстракт, останні вимивали розчином етиловий ефір—оцтова кислота (16).

Для того, щоб визначити, в якій мірі забруднення змінює показники при визначенні флавінів, до досліджуваного зразка після попереднього виміру інтенсивності його флюоресценції додавали відому кількість чистого рибофлавіну, яку визначали флюорометрично. Вводячи відповідний коефіцієнт поправки, визначали вміст рибофлавіну в екстракті за формулою:

$$\frac{F_1 - F_3'}{F_2' - F_1} \times C / 13/.$$

Досвід роботи показав, що без введення цього коефіцієнта можна допустити при визначенні рибофлавіну велику похибку (більше 30%).

Результати дослідів по визначенню загального вмісту рибофлавіну в клітинах подані в таблиці 1.

Таблиця 1

Визначення загального вмісту рибофлавіну за допомогою різних методів екстракції

№ п. п.	Методи екстракції	Рибофлавін		ФАД	
		μг/1 г сух. в.	%	В μг В ₂ на 1 г сух. в.	%
1	0,1 N H ₂ SO ₄ , 45-хвилинне кип'ятіння	30,60	89,3	—	—
2	5% ТХОК, 15 хвилини на холод:				
	а) 10-хвилинне кип'ятіння	28,45	83,2	13,07	46,05
	б) 37°C, 20 год.	28,00	81,8	12,55	45,70
3	Дистильована вода. 3-х по 15 хвилини при 80°C з наступним кип'ятінням в 0,1 N H ₂ SO ₄	34,20	100,0	18,1	53,00
4	Протеоліз з наступним кип'ятінням у 0,1 N H ₂ SO ₄	32,23	94,2	—	—
5	Протеоліз:				
	а) прогрівання при 80°C 15 хв.	32,90	96,2	—	—
	б) кип'ятіння в 0,1 N H ₂ SO ₄ 30 хв.	31,80	93,0	—	—

Як видно з таблиці 1, найбільше рибофлавіну було відкрито при екстракції гарячою водою (100%) і після протеолізу (93—96%). Менший процент відкриття відмічаємо при екстракції 0,1N H₂SO₄ і 5% ТХОК.

Для перевірки можливості неповноти розщеплення ФАД проведено гідроліз чистого препарату в 5% ТХОК 10-хвилинним кип'ятінням і витримуванням при 37°C протягом 20 год., а також 30- і 40-хвилинний

гідролів в 0,1 N H_2SO_4 на киплячій водяній бані. Виявилось, що за вказані проміжки часу відбувається повний гідроліз ФАД, що збігається з літературними даними (13).

Виходячи з цього, можна було б припустити, що при екстракції флавінів з клітин за допомогою 0,1 N H_2SO_4 ФАД також повністю гідролізується. Проте послідуєча обробка отриманого екстракту фосфатазою виявила додаткову кількість рибофлавіну (табл. 2).

Таблиця 2

Вплив фосфатазної обробки на відкриття рибофлавіну після екстракції 0,1 N H_2SO_4

Вміст рибофлавіну в μg /г сух. в. клітин		% додатково відкритого рибофлавіну
Без обробки фосфатазою	Обробка фосфатазою	
8,43	10,45	19,3
14,06	22,41	30,4

б) Мікробіологічний метод. За індикаторну культуру при визначенні рибофлавіну використовували *Lactobacillus casei*. Стандартну криву будували за методом Поволоцької та ін. (7), а також Снелла і Стронга (18).

На рис. 3 показані стандартні криві, одержані за допомогою вказаних вище методів.

Вони свідчать про те, що при однакових концентраціях рибофлавіну ріст *L. casei* на середовищі, виготовленому за методом Снелла і Стронга, значно кращий, ніж на модифікованому середовищі Поволоцької та ін.

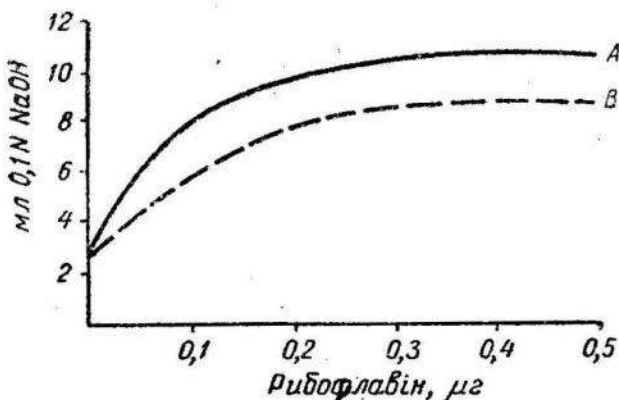


Рис. 3. А — стандартна крива, одержана на середовищі Снелла і Стронга. В — стандартна крива, одержана на модифікованому середовищі Поволоцької та ін.

Виходячи з літературних даних (11) і результатів власних спостережень, нами було зроблено припущення, що незалежно від наявності в середовищі «В» максимальних кількостей рибофлавіну для відповідного росту бактерій невістачає якихось інших ростових речовин. Додавання до середовища дріжджової води і дріжджового автолізу значно стимулювало ріст мікробів.

Ці дані наводять на думку, що

при визначенні рибофлавіну в досліджуваних екстрактах із клітин дріжджів може бути неспецифічна стимуляція росту бактерій за рахунок інших, ніж рибофлавін, речовин екстракту, тому можна одержати завищення результатів досліду.

Кількість рибофлавіну, відкритого в клітинах мікробіологічним методом за Снеллом і Стронгом, дещо нижча, ніж при визначенні флюориметричним методом (табл. 3).

Таблиця 3

Порівняння флюорометричних і мікробіологічних визначень
рибофлавіну в клітинах дріжджів

Рибофлавін в $\mu\text{g/g}$ сух. в.		„а“ в % від „в“
Мікробіологічним методом „а“	Флюорометричним методом „в“	
9,59	12,35	78,6
18,83	21,69	86,7

На думку деяких авторів (6), розходження $\pm 20\%$ при порівнянні хімічного та біологічного методів можна вважати цілком допустимим.

2. ВИЗНАЧЕННЯ ОКРЕМИХ ФОРМ ФЛАВІНІВ

Кількість окремих форм флавінів та їх співвідношення визначали флюорометрично безпосередньо в одержаних екстрактах і після їх розділення за допомогою хроматографії на папері (14).

Флавіни екстрагували за методом Бессі та ін. (12), Ягі (20), а також Поволоцької та ін. (8). Як видно з таблиці 1, при екстракції 5% ТХОК відкривається менше ФАД, ніж за допомогою екстракції гарячою водою. При порівнянні результатів визначення флавінів в екстрактах, одержаних шляхом кип'ятіння клітин в 0,1 N H_2SO_4 і нагрівання в дистильованій воді 80°C , виявилось, що вони не співпадають (табл. 4).

Таблиця 4

Визначення нуклеотидних форм рибофлавіну в клітинах *S. guilliermondii*

Метод	Вміст нуклеотидних форм рибофлавіну в $\mu\text{g B}_2$ на 1 г сух. в.	ФМН		ФАД	
		μg	%	μg	%
40-хвилинне кип'ятіння в 0,1 N H_2SO_4 з наступною обробкою фосфатазою	10,45	8,43	80,7	2,02	19,3
Екстракція гарячою водою, з наступним кип'ятінням в 0,1 N H_2SO_4 30 хв.	14,57	3,90	26,8	10,67	73,2

Попередніми дослідями було показано (табл. 2), що в умовах екстракції 0,1 N H_2SO_4 ФАД руйнується повністю або частково. Фосфатазна обробка виявляє меншу частину нуклеотиду, тому за методом Поволоцької та ін. ми одержуємо дуже змінені дані, а саме — більший процент ФМН.

Кількість визначення рибофлавіну та його нуклеотидів і їх співвідношення проводили слідуючим способом Дріжджі суспензували в дистильованій воді до конц. 50—100 мг сирої ваги в 1 мл; по 1—2 мл відбирали для визначення сухої ваги, і флавіни тричі екстрагували нагріванням на водяній бані при 80°C так, щоб кінцеве розведення було

1 : 40 або 1 : 80. Клітини відокремлювали центрифугуванням, екстракти зливали разом і доводили до мітки. Після цього в частині екстракту визначали: а) загальну кількість рибофлавіну; б) ФАД — після 30-хвилинного гідролізу екстракту в 0,1 N H₂SO₄ по формулі:

$$\text{ФАД} = \frac{B-A}{0,86} (13),$$

де B — вміст рибофлавіну після гідролізу ФАД;

A — вміст рибофлавіну до гідролізу ФАД;

0,86 — коефіцієнт поправки в зв'язку з тим, що флюоресценція ФАД до гідролізу становить 14% флюоресценції рибофлавіну, і в) суму вільного рибофлавіну та ФМН по формулі:

$$B_2 + \text{ФМН} = \text{Рибофлав. заг.} - \text{ФАД}$$

Співвідношення ФАД і $B_2 + \text{ФМН}$ виражали в процентах.

Другу частину екстракту концентрували під вакуумом при 30—37° і насичували (NH₄)₂SO₄. Флавіни екстрагували фенолом, а потім переводили в 0,5—1,0 мл дистильованої води.

Певну кількість екстракту («а») наносили на хроматографічний папір і хроматографували в системі *n*-бутанол-оцтова кислота—вода (4 : 1 : 5). Хроматограми підсушували, промивали ефіром для видалення залишків фенолу; плями з флавінами вирізали і елюювали тричі дистильованою водою. Елюати об'єднували, доводили до мітки; ФАД гідролізували в 0,1N H₂SO₄, і після цього зразки визначали на флюорометрі.

В той же час в «а» мл фенольного екстракту визначали загальну кількість рибофлавіну і співвідношення окремих форм. Результати дослідів наведені в таблиці 5. Вони показують, що істотних змін в співвідношенні окремих форм флавінів після обробки фенолом, а також елюції з хроматограми не відмічаємо.

Таблиця 5

Визначення співвідношення окремих форм флавінів за допомогою різних методів

Досліджуваний розчин	Загальний вміст рибофлавіну в $\mu\text{г}$	ФАД		$B_2 + \text{ФМН}$	
		$\mu\text{г}$	%	$\mu\text{г}$	%
Вихідний екстракт з 1 г сух. в. клітин	38,24	17,08	46,18	21,60	53,82
Фенольний екстракт, 0,2 мл	3,55	1,56	43,96	1,99	56,07
Елюат із хроматограми, 0,2 мл	3,054	1,26	46,65	1,78	54,35

Елюція флавінів з паперу становить 86%, як і для чистого рибофлавіну, визначення якого проводилось одночасово з досліджуваними зразками. Можливо, це пов'язано з частковою адсорбцією рибофлавіну кусочками хроматографічного паперу.

Порівняння різних модифікацій флюорометричного та мікробіологічного методів показало, що за допомогою перевірених методів в дріжджах відкривається неоднакова кількість рибофлавіну. Причини цих відхилень можуть бути різними. Так, у випадку екстракції ТХОК частина ФАД залишається в клітинах, що приводить до заниження результатів

досліді. Можливо, метод екстракції ТХОК дасть позитивні результати, якщо використати декількаразову обробку клітин кислотою.

Екстракцію 0,1 N H_2SO_4 можна застосувати для визначення загального вмісту рибофлавіну при умові обробки екстракту фосфатазою. Поволоцька та ін. запропонували екстракцію 0,1N H_2SO_4 для визначення ФАД; проте, як показали наші досліді, цей метод пов'язаний із значним гідролізом ФАД. Відомо (15), що флавінаденіндинуклеотид при нагріванні в кислих і лужних розчинах швидко руйнується, тому кількість його краще всього визначати після екстракції флавінів із клітин гарячою водою або холодною ТХОК.

Після протеолізу кількість рибофлавіну не збільшується. Можна думати, що досліджувані дріжджі характеризуються низьким вмістом сукциндегідрогенази, яка, за даними Поволоцької (5), Букіна (3), Сингер і Керні (17) та ін., містить міцно зв'язану з білком форму рибофлавіну. Поволоцька та ін. вважають, що дріжджі та гриби не містять цієї форми рибофлавіну. В той же час Сингер і Керні одержали сукциндегідрогеназу із мітохондрій дріжджів і дослідили, що не всі флавіни, які звільнюються після її протеолізу, можна визначати звичайними методами. Тому питання визначення міцно зв'язаної з білком форми рибофлавіну вимагає дальшого дослідження.

Проведені експерименти дають також можливість сказати, що флюорометричний метод має значну перевагу над мікробіологічним: він більш точний, вимагає значно менше часу і може бути застосований для визначення не тільки загального вмісту рибофлавіну, але і окремих його форм.

ВИСНОВКИ

1. Перевірено п'ять модифікацій флюорометричного методу визначення рибофлавіну в клітинах дріжджів. Найбільша кількість рибофлавіну відкривається при екстракції гарячою водою та після протеолізу.

2. Екстракти флавінів, одержані за допомогою протеолізу і нагрівання клітин при 80°C , вимагають додаткової очистки від побічних речовин.

3. Співвідношення флавінів не можна визначати після екстракції їх в 0,1N H_2SO_4 в зв'язку з гідролізом ФАД.

4. Мікробіологічний метод в порівнянні із флюорометричним дає дещо занижені результати.

ЛІТЕРАТУРА

1. Биохимия и физиология витаминов, методы определения витаминов, сб. 5. ИЛ, 1952.
2. Бродильные производства. Под ред. Л. А. Андеркофлера и Р. Дж. Хиккея, т. II. Пищепромиздат, М., 1959.
3. Букин В. Н. О новой, прочно связанной с белком форме рибофлавина. Доклад на III Международном биохимическом конгрессе, Брюссель, 1—6 августа, 1955. Изд-во АН СССР, М., 1955.
4. Михлин Д. М. Биологическое окисление. Изд-во АН СССР, М., 1956.
5. Поволоцкая К. Л. «Биохимия», 1953, № 18.
6. Поволоцкая К. Л. и Скоробогатова Е. П. «Биохимия», 1953, № 18.
7. Поволоцкая К. Л., Скоробогатова Е. П. и Зайцева Н. И. Витаминные ресурсы и их использование. Изд-во АН СССР, т. 3, 1955.
8. Поволоцкая К. Л., Зайцева Н. И. и Скоробогатова Е. П. Витаминные ресурсы и их использование. Изд-во АН СССР, т. 3, 1955.
9. Прескот С. и Дэн С. Техническая микробиология. ИЛ, 1952.

10. Труфанов А. В. Биохимия и физиология витаминов и антивитаминов. Сельхозгиз, 1959.
11. Barton-Wright E. C. The microbiological assay of the vitamin B-complex and amino acid, L., 1952.
12. Bessey O. A., Lowry O. H. and Love R. H. J. Biol. Chem., 1949, 180(2).
13. Burch H. B., Bessey O. A., Lowry O. H. J. Biol. Chem., 1948, 175(1).
14. Crammer J. Z., Nature, 1948, 161.
15. The Enzymes, sec. edition, ed. by P. D. Boyer, H. Lardy, K. Myrbäck. V. 2, Acad. Press, N.-Y. a. L., 1960.
16. Schaeffer P. Biochim. et Biophys. acta, 1952, 9.
17. Singer T. P., Kearney E. B., Massey V. Advances in enzymology, 1957, 18.
18. Snell E. E. and Strong F. M. Ind. Eng. Chem., Anal. Ed., 1939, 11.
19. The Vitamins, Chemistry, Physiology, Pathology, ed. by W. H. Sebrell, Jnr. R. S. Harris. v. III, Acad. Press, N.-Y., 1954.
20. Jagi K. Bull. soc. Chim. France, 1957, 11—12.

Л. П. СТРУГОВЩИКОВА

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФЛАВИНОВ В КЛЕТКАХ ДРОЖЖЕЙ

Резюме

Проверено пять модификаций флюорометрического метода определения рибофлавина в клетках дрожжей *Candida guilliermondii*. Наибольшее количество рибофлавина обнаруживается при экстракции флавинов горячей водой и после протеолиза. Экстракты флавинов, полученные при помощи протеолиза и нагревания клеток при 80°C, требуют дополнительной очистки от посторонних веществ.

Соотношение флавинов нельзя определять после экстракции их в 0,1 н. H₂SO₄ в связи с гидролизом ФАД.

Микробиологический метод по сравнению с флюорометрическим дает несколько заниженные результаты.

Н. М. ФОРНЯК

ВПЛИВ ГОСТРОГО АЛКОГОЛЬНОГО ОТРУЄННЯ НА ЕЛЕКТРОФОРЕТИЧНІ ФРАКЦІЇ БІЛКІВ СИРОВАТКИ КРОВІ*

Однією з важливих фізіологічних функцій білків крові є участь їх у перенесенні біологічно важливих речовин і доставленні цих речовин тканинам. Беручи участь у перенесенні ряду речовин, білкові фракції вступають у сполучення з цими речовинами, що приводить до зміни самих білків крові (11).

В літературі є вже багато даних про динаміку сироваточних білків під впливом фізико-хімічних та інших агентів, а також патологічних процесів. Ряд авторів (11, 14) спостерігали підвищення α - і β -глобулінових фракцій білків сироватки крові під впливом альдегідів та хінону. Подібну картину спостерігав Г. Я. Розенберг (6) при денатурації сироваточних білків теплом.

Велику увагу в останні роки приділяють вивченню динаміки білкових фракцій при різних нейроінфекційних захворюваннях (1, 3, 5, 7).

Підвищення вмісту α_2 - і γ -глобулінових фракцій при зниженні рівня альбумінів спостерігала Л. Т. Анісімова при малій хорей (1).

Зниження вмісту β -глобулінової та підвищення γ -глобулінової фракцій з одночасним зменшенням альбуміноглобулінового коефіцієнта відмічають Г. Р. Буравцева, О. Ф. Макаrenchенко, Б. А. Ройтуб, В. Келлей, Д. Доеден, Т. Холл та інші автори при інфекційних ураженнях центральної нервової системи.

М. Вендер, І. Пательський, Г. Філіпек (16, 17), досліджуючи білки крові при розсіяному склерозі, виявили значне зниження кількості альбумінів разом з підвищенням вмісту γ -глобулінів.

Підвищення тільки фракції α_2 -глобуліну Фрейследерер (18) пов'язує з порушенням обміну речовин.

Б. Бархард, А. Влад, Ф. Дрон (2) вважають, що збільшення вмісту глобулінів, особливо α -фракції, вказує на вплив токсичного агента.

Цікаво у цьому відношенні дослідити динаміку білкових фракцій під впливом етилового алкоголю, оскільки у великих дозах, а також при хронічному введенні в організм він є сильним токсичним агентом, який викликає ряд порушень фізіологічних та біохімічних процесів багатьох органів, у першу чергу центральної нервової системи. Крім цього, як відомо, етиловий алкоголь застосовується в практиці медицини як анестезуюча речовина.

Метою нашої роботи було вивчення впливу етилового алкоголю на білковий обмін, зокрема на динаміку білкових фракцій сироватки крові.

* Науковий керівник — доктор біол. наук Б. Ф. Сухомлінов.

МЕТОДИКА

Досліди проводились на кроликах вагою 1700—2800 г. Перед введенням етиловий спирт розводили рівним об'ємом дистильованої води. Вводили спирт через зонд у шлунок дозою 10 мл 96° на 1 кг живої ваги.

Кількість спирту в крові визначали за методикою Відмарка (8). Загальний білок крові визначали на рефрактометрі.

Дослідження сироваточних білків проводили методом електрофорезу на агаровому гелі в мединал-вероналовому буфері з рН 8,6. Тривалість електрофорезу — 4—5 год., напруга на електродах 220 в (на агаровій пластинці 80—90 в).

Електрофореграму обробляли на мікрофотометрі МФ-2 (10). На основі даних показників будували криву розподілу щільності електрофореграм та по співвідношенню площ піків, відповідних окремим фракціям, вираховували процентне співвідношення між ними.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Дані, одержані при електрофоретичному дослідженні сироваточних білків нормальних кроликів, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Середні дані в нормі з шести досліджень

Фракції	Процентне співвідношення
Альбуміни	51,41
α_1 -глобуліни	3,84
α_2 — „ —	13,12
α_3 — „ —	9,31
β_1 — „ —	6,83
β_2 — „ —	3,34
γ — „ —	12,16

Білковий коефіцієнт $A/G=1,05$.

Таблиця 2

Дані дослідів при введенні етилового спирту (96°) дозою 10 мл на 1 кг ваги

Фракції	Процентне співвідношення
Альбуміни	37,24
α_1 -глобуліни	8,18
α_2 — „ —	11,42
α_3 — „ —	13,40
α_4 — „ —	4,09
β_1 — „ —	5,36
β_2 — „ —	1,97
γ — „ —	18,34

Білковий коефіцієнт $A/G=0,59$.

Типова електрофореграма та денситометрична крива даних досліджень в нормі зображена на рис. 1. На рис. 2 представлені електрофореграми отруєних кроликів та для порівняння нормальна електрофореграма.

Чіткі зміни в білковому коефіцієнті при алкогольному отруєнні виявляються при денситометруванні електрофореграм.

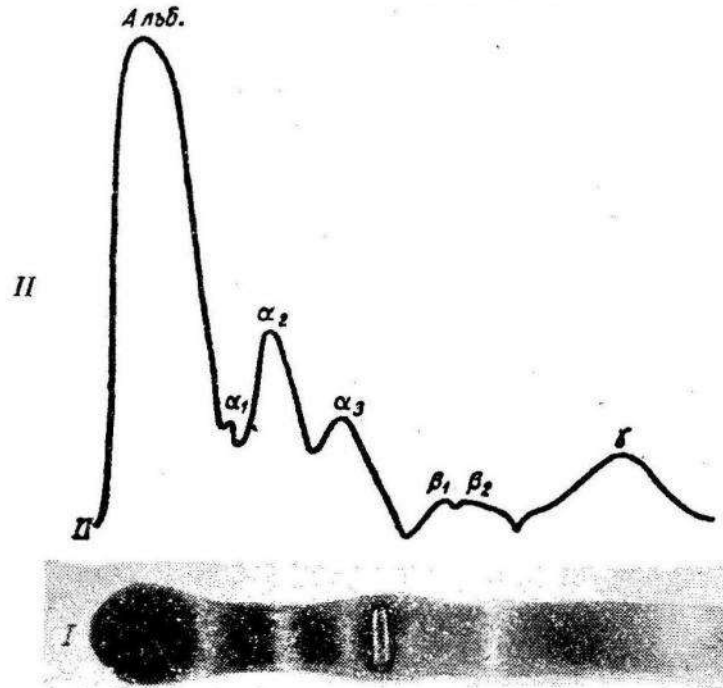


Рис. 1. Електрофореграма (I) та денситометрична крива (II) сироваточних білків кроля в нормі.
Альб. — альбуміни; α_1 , α_2 , α_3 , β_1 , β_2 , γ — глобуліни.

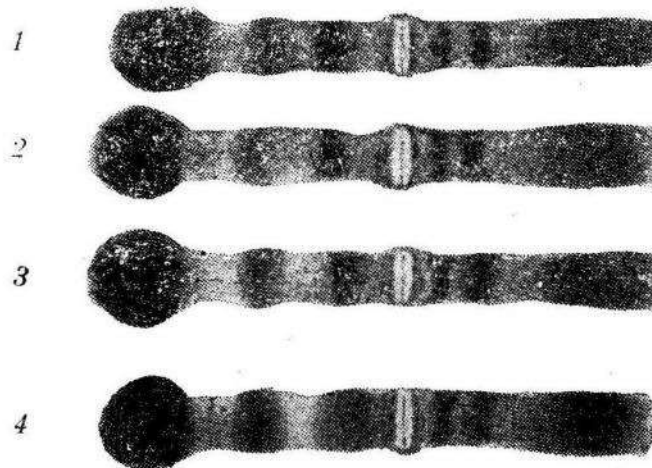


Рис. 2. Електрофореграми сироваточних білків.
1 — норма; 2, 3, 4 — гостре отруєння спиртом.

Перш за все звертає на себе увагу поява нової фракції глобулінів- α_4 , яку не спостерігали в нормі (рис. 3, табл. 2).

З таблиці 2 видно, що, крім появи нової глобулінової фракції — α_4 , в сироваточних білках кроликів, які під впливом певної дози алкоголю знаходились у стані глибокого гальмування центральної нервової сис-

теми, відмічається різке зниження вмісту альбумінів і підвищення γ -глобулінів. Це приводить до значного зрушення білкового коефіцієнта сироваточних білків в сторону збільшення концентрації глобулінів. Для підтвердження цих даних наводимо дослід від 13. II 1962 р. (рис. 4, табл. 3).

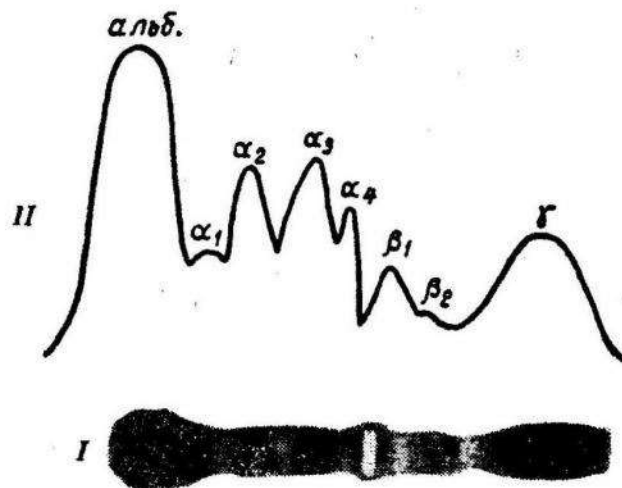


Рис. 3. Електрофореграма (I) та денситометрична крива (II) сироваточних білків кроля при гострому отруєнні етиловим спиртом.

Альб. — альбуміни, α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , β_1 , β_2 , γ — глобуліни.

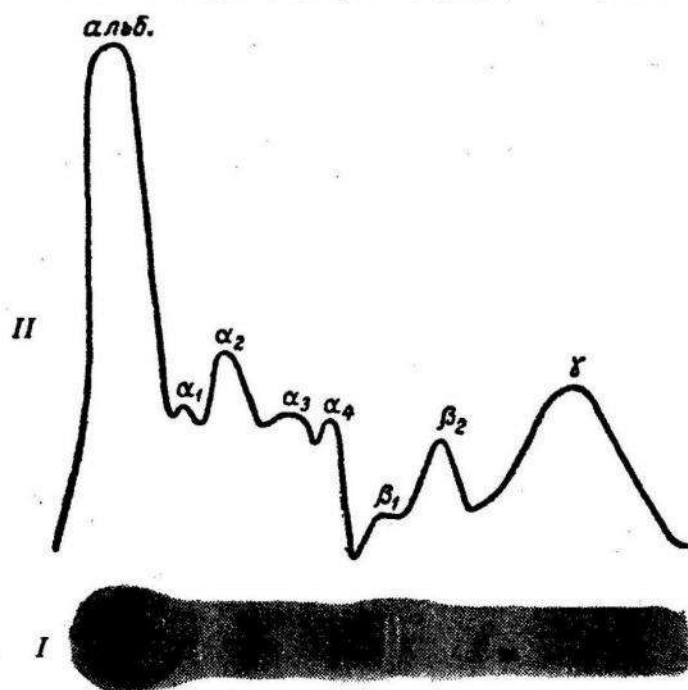


Рис. 4. Електрофоретична (I) та денситометрична крива (II) сироваточних білків кроля при гострому отруєнні етиловим спиртом.

Альб. — альбуміни: α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , β_1 , β_2 , γ — глобуліни.

З денситометричної кривої, одержаної при отруєнні кролика етиловим спиртом у досліді від 9. XII 1961 р. (рис. 5, табл. 4), видно підвищення β_1 -глобулінової, α_2 -, α_3 -глобулінових, різке — γ -глобулінових фракцій. Як і в попередніх дослідях, понижується вміст альбумінів.

Таблиця 3

Дані дослідів при введенні етилового спирту (96°) дозою 10 мл на 1 кг ваги

Фракції	Процентне співвідношення
Альбуміни	41,94
α_1 -глобуліни	5,02
α_2 — „ —	10,78
α_3 — „ —	9,92
α_4 — „ —	3,84
β_1 — „ —	1,28
β_2 — „ —	6,30
γ — „ —	20,92

Білковий коефіцієнт $A/G=0,72$.

Аналогічні дані були одержані у всіх випадках гострого отруєння. Отже, у всіх дослідів при гострому отруєнні етиловим спиртом у кроликів значно міняється співвідношення фракцій сироваточних білків,

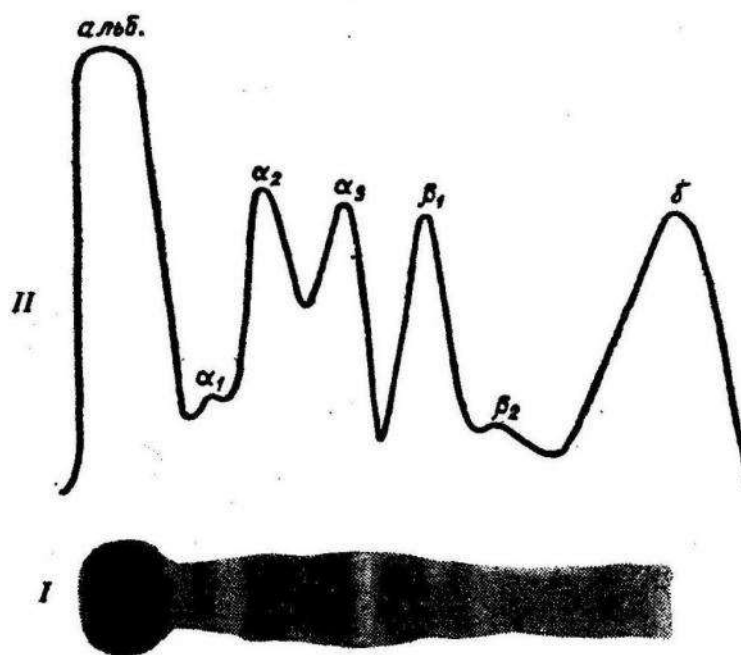


Рис. 5. Електрофоретична (I) та денситометрична крива (II) сироваточних білків кроля при гострому отруєнні етиловим спиртом.

Альб. — альбуміни; α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , β_1 , β_2 , γ — глобуліни.

знижується концентрація альбумінів та спостерігається загальне підвищення глобулінів. Відмічена специфічна дія алкоголю при гострому отруєнні на α -глобулінові фракції: поява зовсім нової α_4 -глобулінової фракції, яка у здорових кроликів нами не відмічена, та різке збільшення процентного співвідношення γ -глобулінової фракції.

Таблиця 4

Дані дослідів при введенні етилового спирту (96°) дозою 10 мл на 1 кг ваги

Фракції	Процентне співвідношення
Альбуміни	32,87
α_1 -глобуліни	2,63
α_2 — „ —	15,19
α_3 — „ —	11,94
β_1 — „ —	11,63
β_2 — „ —	2,48
γ — „ —	23,26

Білковий коефіцієнт $A/G=0,49$.

ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Наведені результати електрофоретичного дослідження білків крові при гострому отруєнні етиловим спиртом подібні до деяких літературних даних, одержаних при електрофоретичних дослідженнях сироваточних білків під впливом хімічних, термічних агентів, а також при патологічних процесах.

Зміна процентних співвідношень глобулінових фракцій подібна до змін білкових фракцій при введенні в організм фармакодинамічних речовин (11, 14). Можна припустити, що й при гострому алкогольному отруєнні в основі динаміки сироваточних білків лежить той самий механізм, що й при введенні в організм інших фармакодинамічних речовин.

Як відомо, звичайним проміжним продуктом окислення етилового спирту в організмі є оцтовий альдегід. Вміст оцтового альдегіду в крові у нормі дуже низький, але помітно підвищується після введення етилового спирту, оскільки далі окислення альдегіду порушується в зв'язку з блокадою ферментативної системи, субстратом якої є альдегід у багатьох тканинах.

Оцтовий альдегід, як і всі речовини з альдегідними групами (11, 14, 13), активно реагує з білками, очевидно, денатуруючи їх. Прижиттєва денатурація припускається теорією Д. Н. Насонова й В. Я. Александрова та Ф. С. Окуловим. Найлегше в цю форму переходять альбуміни (11), чим, можливо, пояснюється гіпоальбумінемія і при алкогольному отруєнні.

Змінені таким чином білки, очевидно, утворюють комплекси з α_2 - та β -глобуліновими фракціями в силу фізико-хімічних властивостей останніх, що й виражається в зростанні α - та β -глобулінових піків на електрофореграмах.

Поява нової фракції α_4 - в білковому спектрі відбувається, очевидно, за рахунок компенсаторних процесів при гострому алкогольному отруєнні. Можливо, що ця фракція бере участь у білкових комплексах, які виконують специфічні фізіологічні функції.

γ -глобуліновий комплекс білків плазми крові пов'язують з антитілами. Гіпергамаглобулінемія, за літературними даними, властива сиро-

ваточним білкам при інфекційних захворюваннях, запальних процесах, цирозах печінки та інш.

Підвищення концентрації γ -глобуліну при ураженнях печінки деякі автори (9) вважають результатом подразнення ретикуло-ендотеліальної системи, і, в першу чергу, купферовських клітин.

Можливо, що подібний механізм лежить в основі різкої гіпергаммаглобулінемії і при алкогольному отруєнні, оскільки основним місцем окислення алкоголю є печінка. Разом з тим деякі автори (5, 16, 17) пов'язують підвищення α_1 -, α_2 - і γ -глобулінів на фоні гіпоальбумінемії (при деяких нейроінфекціях і розсіяних склерозах) з деструкцією нервової системи та порушенням проникності стінок судин, що, очевидно, має місце і при алкогольному отруєнні. З літератури відомо також, що етиловий алкоголь, введений великими дозами, викликає сильне гальмування центральної нервової системи, порушуючи коркову та підкоркову вазорегуляцію. А ці порушення, за даними О. Ф. Макаренка, Г. Д. Динабург, О. К. Шинкаренка, Л. Б. Клебанової та інших авторів, становлять єдине ціле з порушенням тонусу і проникності судин.

На основі досліджень лише білків крові трудно поки що сказати, який саме механізм переважає в динаміці сироваточних білків при гострому отруєнні етиловим алкоголем. Певну ясність у це питання повинно внести вивчення динамічної рівноваги та біосинтезу білків при алкогольному отруєнні в головному мозку та інших органах.

ВИСНОВКИ

1. При гострому алкогольному отруєнні кроликів змінюється процентне співвідношення електрофоретичних фракцій білків сироватки: зменшується концентрація альбумінів та зростає процентне співвідношення γ - і α -глобулінів.

2. Відмічається якісна зміна в білках сироватки крові, а саме — поява нової глобулінової фракції α_4 -глобулінів.

3. Висловлюється думка про значне порушення білкових фракцій в тканинах мозку та інших органах при гострому та хронічному отруєнні етиловим алкоголем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Анісімова Л. Т. Журн. невропатологии и психиатрии им. С. С. Корсакова, т. 57, в. 1, 1957.
2. Бархард Б., Влад А., Дрон Ф. «Клінічна медицина», 1957, № 6.
3. Буравцева Г. В. Журн. невропатологии и психиатрии им. Корсакова, т. 58, в. 3, 1953.
4. Капланский С. Я. Биохимия, т. 22, в. 1—2, 1957.
5. Макаренко О. Ф., Ройтроб Б. А. «Фізіологічний журнал», т. V, 1959, № 4.
6. Розенберг Г. Я., Болотина Т. Т. и Папуш П. Д. Вопросы медицины, т. 5, 175, 1953.
7. Смирнов Ю. К. Журн. невропатологии и психиатрии им. Корсакова, т. 58, в. 4, 1958.
8. Скопин И. В. Количественное определение алкоголя в диагностике опьянения. Медгиз, 1959.
9. Степашкіна К. І. Білки крові та їх клінічне значення. К., 1958.
10. Сухомлинов Б. Ф. Биологическое действие радиации, в. 1. Изд. Львовск. ун-та, 1962.
11. Троицкий Г. В. Биохимия, т. 21, в. 6, 1956.
12. Троицкий Г. В. Биохимия, т. 16, 592, 1951.
13. Троицкий Г. В., Тарасова Л. С. Биохимия, т. 20, в. 19, 1955.
14. Троицкая Н. А. Биохимия, т. 18, в. 151, 1953.

15. Троїцький Г. В. і Сорокіна Д. А. Український біохімічний журнал, т. 29, 1957, № 3.
16. Wender M. P., Patelski J., Filipek H. Neurol., neurochirurg. i psychiatr. polska, 7, № 6, 1957, 913.
17. Wender M. P., Patelski J., Filipek H. Neurol., neurochirurg. i psychiatr. polska, 7, № 6, 1957, 923.
18. Freisleder. Klin. Wochenschr., 35, № 15, 1957.

Н. М. ФОРНЯК

ВЛИЯНИЕ ОСТРОГО АЛКОГОЛЬНОГО ОТРАВЛЕНИЯ
НА ЭЛЕКТРОФОРЕТИЧЕСКИЕ ФРАКЦИИ БЕЛКОВ
СЫВОРОТКИ КРОВИ

Резюме

Целью данной работы было определить влияние этилового алкоголя на белковый обмен, в частности на динамику белковых фракций сыворотки крови.

Исследования проводились на кроликах, которым вводился спирт через зонд в желудок дозой 10 мл 96° на 1 кг веса животного.

Сывороточные белки исследовались методом электрофореза на агаровом геле в мединал-вероналовом буфере с pH—8,6.

У здоровых кроликов сывороточные белки разделяются на 7 фракций, из них одна фракция альбуминовая, остальные глобулины — α_1 , α_2 , α_3 , β_1 , β_2 , γ . На альбуминовую фракцию в среднем приходится 51%, остальной процент на глобулиновые фракции.

При остром алкогольном отравлении кроликов изменяется процентное соотношение электрофоретических фракций белков сыворотки: уменьшается концентрация альбуминов (от 51% в норме до 32—41% при отравлении) и увеличивается концентрация γ -глобулинов (от 12% в норме до 20—23% в отравленных кроликах).

Отмечается качественное отличие в белковых фракциях сыворотки крови, а именно — появление новой глобулиновой фракции — α_4 .

Є. Ф. ЮРЧУК

ВПЛИВ ФОСФОРОБАКТЕРІЙ ЯК ПРОДУЦЕНТІВ ВІТАМІНІВ ГРУПИ «В» НА РІСТ РОСЛИН І НАГРОМАДЖЕННЯ В НИХ ВІТАМІНІВ*

У комплексі агрономічних заходів, спрямованих на підвищення врожаю, значне місце займають бактеріальні добрива.

За останні роки застосування фосфобактерину в чорноземній зоні значно зросло. Так, наприклад, у колгоспах і радгоспах Дніпропетровської області в 1953 р. фосфобактерин був внесений на площі 12 тис. га, а в 1962 р. — на площі близько 1 млн. га. Застосування фосфобактерину під зернові культури дає приріст врожаю від 10 до 12%, значно кращі результати одержані при застосуванні його під овочеві культури: підвищення врожаю спостерігається до 33,8%.

На думку багатьох дослідників (1, 6, 8), роль фосфобактерій у ґрунті обмежується мінералізацією орґанофосфатів, покращуючи таким чином фосфорне живлення рослин.

Безперечно, що *Bac. megatherium* здатний викликати мінералізацію фосфорноорґанічних сполук, властивих ґрунтові. Про це свідчать, зокрема, досліди Р. А. Менкіної (9) і ін., але бактеризація насіння фосфобактеріями (13) не приводить до значного розмноження *Bac. megatherium* на поверхні коренів і навіть у ризосфері.

Сумнівно, що *Bac. megatherium* при такому короткочасному перебуванні в ґрунті буде впливати на рослини тільки як мінералізатор орґанофосфатів.

У дослідях багатьох вчених після застосування азотобактерину азотобактер швидко зникав з ризосфери і ґрунту, але в кінці досліді спостерігалось підвищення врожаю на 10—15%. Причину цього явища О. Г. Гебгардт пояснює тим, що азотобактер є активним синтетиком вітамінів групи «В», значну кількість яких екзосмує в ґрунт, збагачуючи ними рослини. Поступаючи в проростаюче насіння, бактеріальні вітаміни позитивно впливають на ряд фізіологічних процесів: поліпшують дихання, поступання азоту і фосфору в рослини (3).

Наша робота була спробою виявити у фосфобактерій, крім мінералізуючої їх властивості, здатність до синтезу вітамінів групи «В». Цікаво було також прослідкувати поступання окремих молекул бактеріального тіаміну в рослини.

Деякі дані щодо синтезу культурами *Bac. megatherium* різного походження вітамінів групи «В» одержані Н. І. Мальцевою (12). Нами вивчалися інші штами фосфобактерій: П-57 і 5-ий, одержані із Ленін-

* Науковий керівник — доктор біол. наук А. Г. Гебгардт.

градського науково-дослідного інституту сільськогосподарської мікробіології. Дані штами використовуються для виготовлення бактеріального препарату — фосфобактерину.

Для визначення кількісного синтезу вітамінів групи «В» досліджували мікроорганізми культивувались на безвітамінному середовищі Чапека в 250-мілілітрових колбах на качалці: в кожену колбу наливали 30 мл середовища і засівали 3-добовою культурою бактерій з п'ятиразовою повторністю. Вітаміни визначали в трьохденній культурі як у клітинах бактерій, так і в культуральній рідині. Утворення тіаміну вивчали флюорометричним методом (2). Рослини для зважування і визначення в них тіаміну фіксувались по Філіпову (22). Екстракцію В₁ здійснювали шляхом кислотного і ферментного гідролізу, екстракт очищався на колонці з адсорбентом СДВ-3 (5), окислювався в тіохром і переводився в ізобутиловий спирт. У досліді з радіоактивним тіаміном один і той самий ізобутиловий екстракт використовувався для кількісного визначення тіаміну і для вимірювання його радіоактивності на установці типу «Б» з торцевим лічильником (17). При кінцевому підрахунку активності препарату робилась поправка на радіоактивний розпад, самопоглинання випромінювань препаратом не враховувалось. Визначення кількості вітаміну В₆ велось мікробіологічним методом (11). Інтенсивність росту дріжджів вимірювалась турбідиметрично. Екстракція вітаміну В₆ з клітин проводилась за методом Снелла (14). Пантотенову кислоту визначали за методом Одинцової, індикаторною культурою служив організм *Saccharomyces cerevisiae*, Ленінградська раса. Екстрагування здійснювали за Снеллом (14).

Визначення ніотинової кислоти проводили за методом Одинцової (16) з тест-мікробом *Zygosaccharomyces marxianus*. Екстракцію здійснювали 1 N H₂SO₄ автоклавуванням при 1 атм. 15 хв.

Кобаламін визначали мікробіологічним методом (24). Інтенсивність росту тест-об'єкту *V. coli* вимірювали турбідиметричним методом.

Визначення рибофлавіну велось флюорометричним методом (25). Стерилізацію голозерного насіння вівса здійснювали перекисом водню (18). Вегетаційний дослід закладали стерильно в однілітрових колбах Ерленмейера з пристосуваннями для продування повітря. Субстратом служив стерильний пісок, зволожений до 80% від повної вологості середовищем Кнопа. В кожній колбі вирощувалось по 12 рослин при штучному освітленні ламп денного світла і температурі 20—22°C. Мічений тіамін вводився в мікробні клітини при вирощуванні фосфобактерій на середовищі Чапека з вмістом радіоактивного тіаміну 20 μ /мл і активністю середовища 5 тис. імн/мл. Культивування вели на роторі 72 год. Відмивання клітин від середовища здійснювали фосфатним буфером і водою шляхом багаторазового центрифугування. Особлива увага приділялась усуненню радіоактивних забруднень з поверхні клітин. Контроль за повним відмиванням здійснювався шляхом вимірювання радіоактивності промивних вод.

Виробничі штами фосфобактерій виявились активними синтетиками вітамінів групи «В», про що свідчать дані таблиці 1, де всі величини оброблені методом варіаційної статистики і представлені як $X \pm \sigma$ (19).

Хоч обидва досліджувані штами синтезують вітаміни групи «В», між ними існує різниця. Штам П-57 більш енергійно синтезує тіамін. Обидва штами близько половинної дози загального синтезу виділяють в оточуюче середовище. Штам 5-й зовсім не синтезує рибофлавіну. Вітамін В₆ цими організмами в значно більшій кількості виділяється в

Таблиця 1

Вміст вітамінів групи «В» в клітинах і виділеннях двох штамів
Bac. megatherium var. *phosphaticum*. (в γ на 1 г сухих речовин)

	Штами фосфоро- бактерій	Тіамін	Рибо- флавін	Піридоксин	Нікотинова кислота	Пантоте- нова кислота	Кобала- мін
Міститься в клітинах	П-57	$28,0 \pm 0,08$	$17,5 \pm 0,05$	$14,45 \pm 0,12$	$123,4 \pm 0,21$	$24,1 \pm 0,11$	$62,3 \pm 0,09$
	Ш-5	$22,5 \pm 0,09$	—	$16,5 \pm 0,09$	$146,8 \pm 0,19$	$18,2 \pm 0,13$	$47,1 \pm 0,08$
Екзосмовано в середови- щі	П-57	$25,2 \pm 0,07$	$22,2 \pm 0,06$	$65,2 \pm 0,11$	$39,0 \pm 0,11$	$11,6 \pm 0,09$	—
	Ш-5	$23,1 \pm 0,07$	—	$58,9 \pm 0,13$	$42,3 \pm 0,18$	$15,3 \pm 0,08$	—
Сума синте- зованого ві- таміну	П-57	53,2	39,7	79,65	162,4	35,7	62,3
	Ш-5	45,6	—	75,4	189,1	33,5	47,1

оточуюче середовище, ніж міститься в клітинах. Від загальної кількості синтезованого піридоксину штам П-57 виділяє в зовнішнє середовище — 81,8%, а штам 5-й — 79,4%.

У відношенні нікотинової кислоти кращим синтетиком є 5-й штам, пантотенову кислоту обидва штами виділяють без особливих кількісних різниць, зате кобаламіну більш синтезує штам П-57.

Вітамін B_{12} знаходиться тільки в клітинах, що співпадає з дослідженнями В. І. Ушакової (21) і Н. І. Мальцевої (12).

В порівнянні з азотобактером (3) фосфобактерії значно більше синтезують піридоксину і є активними синтетиками рибофлавіну і кобаламіну.

Нікотинову і пантотенову кислоти азотобактер виділяє в набагато більших кількостях, ніж фосфобактерії.

У зв'язку з одержаними даними виникає питання: чи можуть екзосмовані вітаміни з оточуючого середовища поступати в рослини?

В дослідях І. Боннер і І. Грина (26), В. Х. Шопфера (28) спостерігалось нагромадження вітамінів в органах рослин, які допоміжно постачались даними вітамінами. Проте підвищення вмісту в рослинах вітамінів при збагаченні ними зони коренів, особливо в нестерильних умовах, можна пояснити зміною умов вирощування рослин, що посередньо впливає і на продукування ними вітамінів.

Більш переконливими були досліди Г. М. Шавловського (23), який перший при допомозі радіоактивного тіаміну довів передачу тіаміну мікроорганізмами рослині по нагромадженню радіоактивної сірки в надземній частині і коренях.

Є. П. Ратнер і І. Н. Доброхотова (20) перехоплювали тіамін, внесений ними в поживне середовище в пасоці рослин; тим самим методом був перехоплений тіамін, екзосмований азотобактером (4). Але цей метод не дає можливості виявити нагромадження тіаміну в зелених органах рослин.

У ряді дослідів нами була зроблена спроба з'ясувати можливість передачі рослинам вітаміну B_1 культурами фосфобактерій. Досліди проводились за допомогою міченого тіаміну.

Щоб одержати живі мікробні клітини, які б містили мічений вітамін B_1 , була використана можливість фосфобактерій акумулювати з середовища готові молекули тіаміну.

Таблиця 2

Включення радіоактивного тіаміну в клітини *Bac. megatherium* var. *phosphaticum*.

Штами фосфобактерій	Вміст B_1 в $\gamma/2$ сухої речовини ($X \pm \sigma$)	Кількість імп./хв/2 сухої речовини $X \pm \sigma$	Питома активність $\text{імп./хв/}\gamma$
П-57	$148,5 \pm 0,09$	$120064 \pm 0,03$	808,5
5	$137,5 \pm 0,087$	$100896 \pm 0,05$	733,8

Дані дослідів (табл. 2) показують, що фосфобактерії активно нагромаджують у своїх клітинах молекули міченого тіаміну, про що свідчить його кількісне визначення і підрахунок імпульсів тіохрому.

Властивість дріжджів вбирати в значних кількостях тіамін з середовища в умовах бродіння була вивчена Є. Н. Одинцовою (15); для деяких бактерій це явище встановлено Г. М. Шавловським (23) при вирощуванні їх на рідких середовищах. Наші дані підтверджують таку здатність у фосфобактерій.

Суспензіями фосфобактерій, збагаченими міченим тіаміном, інкулювали стерилізовані насіння вівса сорту «Радянський».

Дослід був закладений в 4-разовій повторності за такою схемою:

1. Контроль (пісок + овес).
2. Внесення міченого тіаміну (пісок + тіамін (S^{35}) + овес).
3. Внесення фосфобактерій шт. П-57 з попереднім насиченням їх міченим тіаміном.
4. Внесення фосфобактерій шт. 5 з попереднім насиченням їх міченим тіаміном.

Тіамін вносився по краплі на насіння з розрахунку $0,1 \gamma B_1$ на грам піску.

Інокуляцію насіння здійснювали після попереднього його змочування крохмалем, на кожну насінину давали 225 тис. клітин штаму П-57 і 250 тис. клітин 5-го штаму.

Фосфобактерії і розчин тіаміну внесені були по фону повного забезпечення рослин фосфором.

Не дивлячись на те, що рослини були забезпечені фосфором, інокуляція насіння фосфобактеріями позитивно вплинула на ріст і вагу надземної і підземної маси проростків (табл. 3).

В таблиці 3 представлені середні дані 48 рослин. Достовірність різниці між контролем і варіантами дослідів доведена статистично.

Очевидно, на перших фазах росту фосфобактерії впливали на дев'ятиденні проростки як синтетичні вітамінів групи «В». У дослідях А. А. Ісакової (7), Г. М. Шавловського (23), О. Г. Гебгардт (4) показаний позитивний вплив бактерій на ріст проростків і нагромадження в них вітамінів. Ці вітаміни стимулюють фізіологічні процеси проростків:

підвищують інтенсивність дихання проростаючого насіння на 11—37%, підсилюють гідролітичні процеси, позитивно впливають на переміщення азоту і фосфору в ростучі органи (3).

У наших дослідках внесення тіаміну і насичених ним фосфобактерій в значній кількості підвищує вміст тіаміну в коренях і стеблах (табл. 4). Таке збагачення рослин вітамінами має особливо велике

Таблиця 3

Характеристика дослідних рослин

Варіант	Довжина стебла	Вага стебла	Довжина кореня	Вага кореня
1	2	3	4	5
Контроль	13,07±0,42	9,05±0,35	7,3±0,2	6,6±0,19
Внесення міченого тіаміну	15,08±0,29	12,0±0,48	11,3±0,27	10,5±0,39
Внесення шт. П-57, насиченого міченим тіаміном	16,9±0,81	12,9±0,64	12,8±0,68	11,2±0,54
Внесення шт. 5, насиченого міченим тіаміном	16,8±0,52	12,8±0,43	12,4±0,72	10,9±0,44

значення в фазі проростання рослин, коли запаси вітамінів із насіння уже вичерпані, а синтез їх, очевидно, не здійснюється або здійснюється слабо (26). Інокуляція насіння повноцінним фосфобактерином може заповнити ці прогалини.

Таблиця 4

Нагромадження радіоактивного тіаміну в проростках вівса

Варіант	Вміст тіаміну в стеблах (γ/г сух. реч.)	α	Активність тіохрому стебла (Імп./хв./г сух. реч.)	α	Вміст тіаміну в коренях (γ/г сух. реч.)	α	Активність тіохрому коренів (Імп./хв./г сух. реч.)	α
Контроль	5,7	0,08	—	—	2,47	0,09	—	—
Внесення міченого тіаміну	16,25	0,07	53 908	7,2	16,03	0,13	44 252	5,4
Внесення шт. П-57, насиченого міченим тіаміном	19,3	0,12	52 310	6,1	17,55	0,07	48 048	6,9
Внесення шт. 5, насиченого міченим тіаміном	18,9	0,15	51 837	7,5	18,4	0,10	46 660	7,8

Вимірювання радіоактивності рослинного тіохрому, як свідчать дані таблиці 4, показує, що у варіантах, де підвищився вміст тіаміну, висока радіоактивність тіохрому.

Отже, цей дослід (табл. 4) показує поступання окремих молекул міченого тіаміну з клітин фосфобактерій в рослини, бо спостереження велись не за радіоактивністю рослин взагалі, а враховувалась радіоактивність очищеного рослинного тіаміну.

ВИСНОВКИ

1. Фосфоробактерії шт. П-57 і шт. 5 є активними синтетиками таких вітамінів групи «В»: тіаміну, піридоксину, біотину, пантотенової кислоти, нікотинової кислоти, кобаламіну. Рибофлавін утворюється тільки штамом П-57.

2. Синтезовані фосфоробактеріями вітаміни не тільки нагромаджуються в їх клітинах, але й в значних кількостях екзосмууються в зовнішнє середовище.

3. Досліджувані штами бактерій здатні акумулювати в своїх клітинах мічений тіамін із зовнішнього середовища.

4. Окремі молекули бактеріального тіаміну здатні поступати в рослини, про що свідчить вимірювання радіоактивності тіаміну, виділеного з рослин і очищеного адсорбентом СДВ-3.

5. Внесення в субстрат радіоактивного тіаміну і фосфоробактерій, насичених ним, веде до значного збагачення проростків тіаміном: в стеблах кількість вітаміну В₁ збільшується майже в 4 рази, в коренях — у 8—9 разів.

6. Як фосфоробактерії, так і розчин В₁, внесені в субстрат, по фосфорному фону поліпшують ростові процеси проростків вівса.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бондаренко А. П., Волочкова З. Ф. Фосфоробактерин и его применение. Ростов-на-Дону. кн. изд-во., 1953.

2. Букин В. П., Поволоцкая К. Л. и др. Флуорометрический метод определения тиамин. Витаминные ресурсы и их использование. Сб. 3. Изд. АН СССР, М., 1955.

3. Гебгардт А. Г. О сущности действия азотобактерина и путях повышения его эффективности. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора биологических наук. Львов, 1959.

4. Гебгардт А. Г. Роль микроорганизмов в накоплении витаминов в почвах и поступлении их в растения. Микроорганизмы и эффективное плодородие почвы. Труды Ин-та микробиол., в. XI, М., 1961.

5. Дмитровский А. А. Использование катионита СДВ-3 при флуорометрическом методе определения витамина В₁. Витаминные ресурсы и их использование. Сб. 3. Изд. АН СССР, М., 1955.

6. Ефимцев М. И. Фосфоробактерин как удобрение на черноземе. Автореферат диссертации на соискание учен. степ. канд. сельскохозяйств. наук, Воронежский сельскохозяйств. ин-т, 1953.

7. Исакова А. А. Влияние бактериализации семян на синтез витаминов С и В проростками. ДАН СССР, т. XXVIII, 2, 1940.

8. Каш В. Бактериальные удобрения в Чехословакии. М., 1957.

9. Менкина Р. А. Бактерии, минерализующие органические соединения фосфора. Микробиология, т. XIX, в. 4, 1950.

10. Менкина Р. А. Мобилизация фосфора почвы под влиянием жизнедеятельности бактерий, минерализующих фосфорноорганические соединения. Труды ин-та сельскохозяйств. микробиологии ВАСХНИЛ, в. 12, 1951.

11. Мейсель М. Н. и Помощникова Н. А. Простой микробиологический метод определения пиридоксина. Биохимия, т. 17, в. 5, 1952.

12. Мальцева Н. И. Утворення деяких вітамінів культурами *Vas. megathicum*. Микробиол. журн., т. XXIII, в. 3, 1961.

13. Мишустин Е. Н. и Наумова А. Н. Бактериальные удобрения, их эффективность и механизм действия. Микробиология, т. XXXI, в. 3, 1962.

14. Микробиологические методы определения витаминов и аминокислот. Под ред. Снелла, ИЛ, М., 1954.

15. Одинцова Е. Н. Аккумуляция витамина В₁ дрожжевой клеткой. ДАН СССР, т. 42(3), в. 134, 1944.

16. Одинцова Е. Н. Микробиологические методы определения витаминов. Изд. АН СССР, 1959.

17. Остроухова В. А. Об определении радиоактивности тиамин в тканях. Витамины. Изд. АН УССР, 1958.
18. Ремпе Е. Х., Бернард В. В. и Воронкова Е. А. К вопросу о роли корневой микрофлоры в питании растений. Агробиология, № 6, 1956.
19. Рокицкий П. Ф. Метод вариационной статистики для биологов, Изд. Белорусск. ун-та, Минск, 1961.
20. Ратнер Е. И. и Доброхотова И. Н. О возможной роли витаминов, продуцируемых почвенными микроорганизмами, в корневом питании растений. Физиология растений, т. 3, в. 2, 1956.
21. Ушакова В. И. Условия образования витаминов В₁₂ культурой *Vac. megatherium*. ДАН СССР, т. 122, в. 3, 1958.
22. Филипов В. В. и Андреев Л. Н. Динамика содержания витаминов в листьях пшеницы, пораженных ржавчиной. ДАН СССР, т. 116, в. 2, 1957.
23. Шавловский Г. М. Участие микроорганизмов ризосферы в снабжении растений витаминами. ДАН СССР, т. XCV, в. 5, 1954.
24. Яворковский Л. И. и Май Л. А. Методика количественного определения витамина В₁₂ в сыворотке крови с *V. coli*. Лаб. дело, 6, Медгиз, М., 1957.
25. Bessey O. A., Lowry O. H., Love R. H., J. The fluorimetric measurement of the nucleotides of ribo,flavin and their concentration in tissues. J. Biol. Chem., 180(2), 755, 1949.
26. Bonner J. a Green J. Vitamin B₁ and the growth of green plants. Bot. Gaz., 100 (1), 226, 1938.
27. Bonner J. a Green J. Bot. Gar., 101, 2, 1939.
28. Shopfer W. H., Plants a. vitamins, 1943.

Е. Ф. ЮРЧУК

ВЛИЯНИЕ ФОСФОБАКТЕРИИ КАК ПРОДУЦЕНТОВ ВИТАМИНОВ ГРУППЫ «В», НА РОСТ РАСТЕНИЙ И НАКОПЛЕНИЕ В НИХ ВИТАМИНОВ

Резюме

Нами изучались способность *Vac. megatherium* var. *phosphaticum* шт. П-57 и шт. 5 к продуцированию витаминов группы «В» и поступление отдельных молекул бактериального тиамин в растения. Опытами установлено, что фосфобактерии являются активными синтетиками следующих витаминов группы «В»: тиамин, пиридоксин, биотин, пантотеновой и никотиновой кислот, кобаламина. Рибофлавин продуцирует только штамм П-57. Синтезированные витамины в значительных количествах экзосмируются в окружающую среду. Фосфобактерии могут аккумулировать в своих клетках тиамин из внешней среды. Внесение в субстрат фосфобактерий, предварительно насыщенных меченым тиамином, ведет к накоплению его в проростках растений, что подтверждается измерением радиоактивности растительного тioxрома, очищенного адсорбентом СДВ-3. Содержание тиамин увеличивается в стеблях в 4 раза, а в корнях — в 8–9 раз.

Внесение в субстрат как тиамин, так и фосфобактерий, насыщенных им, усиливает рост проростков овса.

З М І С Т

	Стор.
МАТЕМАТИКА	
О. М. Введенський. Когомології підгрупи Люц еліптичної кривої .	5
А. П. Копилов. Вимірність функцій по Жордану та інтеграл Рімана .	9
Є. М. Парасюк. Про один тип систем сингулярних інтегральних рівнянь	13
МЕХАНІКА	
С. П. Гавеля, В. М. Косарчин. Пружна рівновага пологої сферичної оболонки, обмеженої еліпсом і прямокутником	23
Е. І. Лунь. До теорії пружних оболонок	30
Д. Г. Хлебніков. До питання про граничні умови плоскої задачі для пластинок з підкріпленими краями	41
ХІМІЯ	
О. С. Банах. Одержання синтетичного цеоліту типу молекулярних сит .	49
З. Г. Галанець. Дослідження реакцій комплексоутворення іонів міді з іонами лимонної кислоти	54
БІОЛОГІЯ	
О. М. Белоконь, Г. Ф. Сеник. До фауни ектопаразитів комахоїдних ссавців західних областей України	61
А. М. Богатчук. Вплив мінеральних добрив на нагромадження та склад вільних амінокислот у листях кукурудзи	70
А. М. Богатчук, О. М. Заярнюк. Вплив молібдену на відновлення нітратів та склад вільних амінокислот у листях кукурудзи	78
П. Д. Марченко. Матеріали до флори борошністоросяних грибів (Egiphaseae) Радянських Карпат та Закарпаття	81
Л. П. Струговщикова. Порівняльна оцінка методів визначення флавінів у клітинах дріжджів	93
Н. М. Фортняк. Вплив гострого алкогольного отруєння на електрофоретичні фракції білків сироватки крові	101
Є. Ф. Юрчук. Вплив фосфоробактерій як продуцентів вітамінів групи «Б» на ріст рослин і нагромадження в них вітамінів	109

Редактор І. С. Квітко

Технічний редактор Т. В. Саранюк

Коректор С. О. Харитонova і Л. О. Шпірна.

Львовский ордена Ленина государственный университет имени Ивана Франко.

Сборник работ аспирантов.

Естественные науки.

(На украинском языке).

БГ 06275. Здано до набору 17. VII. 1963 р. Підписано до друку 10. XII. 1963 р. Формат 70x108¹/₁₆. Папер. арк. 3,625. Умовн.-друк. арк. 9,9325. Обл.-видавн. арк. 8,4. Тираж 600. Ціна 42 коп. Зам. 555.

Друкарня видавництва ЛДУ,
Львів Університетська, 1.

Ціна 42 коп.