МАТЕМАТИКА

О. М. ВВЕДЕНСЬКИЙ

КОГОМОЛОГІЇ ПІДГРУПИ ЛЮТЦ ЕЛІПТИЧНОЇ КРИВОЇ*

Нехай K — локальне поле (тобто дискретно нормоване поле, повне відносно топології, яка визначена цією нормою) з алгебраїчно замкненим полем лишків k характеристики $p > 3$. L — конечне нормальне розширення K з групою Галуа g, Q_K і ν_K (відповідно Q_L і ν_L) — кільце цілих і норма в K (відповідно в L). T — уніформізуюча L, а P (відповідно p_1) — максимальний ідеал Q_L (відповідно Q_K).

Розглядаємо над K еліптичну криву A:

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in Q_K;\ 4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p_1)). \tag{1}$$

Має місце точна послідовність

$$0 \to S_K \to A_K \xrightarrow{j} A' \to 0, \tag{2}$$

де A_K — група раціональних над K точок A, A' — редукція (1) кривої A, j — епіморфізм редукції, S_K — ядро редукції. Ми допустимо, що інваріант Хассе (2) у A' відмінний від нуля.

Мета цієї роботи — визначити $H^q(g, S_L)$ (Тейтовські когомології (3)) за допомогою локальної теорії полів класів (4).

Припустимо спочатку, що $[g:1] = p$.

Лема 1. (Серр (4)). Диферента D розширення L/K дорівнює P^m, де $m = (l+1)(p-1)$, а l — номер останньої, відмінної від одиниці, групи вітвлення (5):

$$g = g_0 = g_1 = \ldots = g_l;\ g_{l+1} = \ldots = \{1\}.$$

Лема 2. (Серр (4)). Нехай $Tr: L \to K$ слід розширення L/K. Покладемо $m = (l+1)(p-1)$. Для всіх цілих $s \geqslant 1$ буде

$$Tr(P^s) = p_1^r,$$

де $r = \left[\frac{m+s}{p}\right]$,

$[x]$ — ціла частина дійсного числа x.

Підгрупу S_L можна параметризувати (6) так, що додаванню елементів, які відповідають значенням t_1 і t_2 параметра t, відповідає композиція значень параметрів $t_1 \circ t_2 = (t_1 + t_2)\cdot(1 + t_1 t_2 g_1(t_1, t_2))$, $g_1(t_1, t_2)$ — ряд від t_1, t_2 з коефіцієнтами з Q_K.

Через $N: S_L \to S_K$ будемо позначати нормений гомоморфізм з S_L в S_K, а коли T_s значення параметра t, відповідаюче початковій точці

*Науковий керівник — член-кореспондент АН СРСР І. Р. Шафаревич.

з S_L, то $N(T_s)$ значення параметра t, відповідаюче образу цієї точки при гомоморфізмі N. $N\mathrm{orm}: L \to K$ — норма розширення $^L/_K$.

Лема 3. Нехай T_s — елемент Q_L, норма якого $\geqslant s$; тоді

$$N(T_s) \equiv Tr(T_s) + \varepsilon N\mathrm{orm}(T_s) + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m [N\mathrm{orm}(T_s)]^m \pmod{Tr(P^{2s})}. \tag{3}$$

Тут ε — одиниця в K, α_m — елементи з Q_K.

Доведення. Нехай σ — твірна g (ми допустили, що $[g:1]=p$). Коли $\lambda = n_0 + n_1\sigma + \ldots + n_{p-1}\sigma^{p-1}$ елемент групової алгебри $Z[g]$, то $T_s^\lambda = T_s^{n_0}\cdot(\sigma T_s)^{n_1}\ldots(\sigma^{p-1}T_s)^{n_{p-1}}$.

$Z_+[g]$ — частина $Z[g]$, яка складається з тих λ, що всі n_i невід'ємні, але хоч одне з них додатне. Тоді, позначаючи $t_1 \circ t_2 = S(t_1, t_2)$, одержуємо

$$N(T_s) = S(T_s, \sigma(T_s), \ldots, \sigma^{p-1}(T_s)) = \sum_{\lambda \in Z_+[g]} r_\lambda T_s^\lambda,$$

$r_\lambda \in Q_K$, r_λ підлягають деяким умовам симетричності. Коли $\sigma^i\lambda = \lambda$, то $\lambda = n(1 + \sigma + \ldots + \sigma^{p-1})$ (i = одному з чисел $0, 1, \ldots, p-1$). Коли λ не має такого вигляду, то по симетричності S, в $N(T_s)$ входить разом з $r_\lambda T_s^\lambda$ також і $r_\lambda Tr(T_s^\lambda)$; залишається врахувати формулу множення на p в A, і лема доведена.

Нехай

$$\psi(x) = \begin{cases} x, \text{ коли } x \leqslant l \\ l + p(x - l), \text{ коли } x \geqslant l. \end{cases}$$

В S_L виникає фільтрація: S_L^n — підгрупа тих точок S_L, значення параметра t в яких належить до P^n.

Лема 4. Для всіх цілих $n \geqslant 1$ має місце

(а) $N(S_L^{\psi(n)}) = S_K^n$, $N(S_L^{\psi(n)+1}) = S_K^{n+1}$,

(в) коли $N_n: \dfrac{S_L^{\psi(n)}}{S_L^{\psi(n)+1}} \to \dfrac{S_K^n}{S_K^{n+1}}$

гомоморфізм, одержаний з N факторизацією, то при всіх $n \neq l$, N_n ізоморфізми. При $n = l$ має місце точна послідовність

$$0 \to g \to \frac{S_L^l}{S_L^{l+1}} \xrightarrow{N_l} \frac{S_K^l}{S_K^{l+1}} \to 0.$$

Доведення. Досить довести (в) і

(а¹) $N(S_L^{\psi(n)}) \subset S_K^n$; $N(S_L^{\psi(n)+1}) \subset S_K^{n+1}$;

з них (а) випливає по властивостях груп з фільтрацією (6).

Метод доведення далі класичний.

Наслідок 1. $H^0(g, S_L) = 0$, $H^{-1}(g, S_L) = \dfrac{Z}{pZ}$,

Доведення. Слід врахувати формулу

$$\sigma(aT^r)\circ(-aT^r) = a[\sigma(T) - T][rT^{r-1} + T^r(\ldots)][1 + T(\ldots)].$$

Лема 5. Для всіх цілих $n \geqslant 1$ і довільної p — групи g

(а) $N(S_L^{\psi(n)}) = S_K^n$, $N(S_L^{\psi(n)+1}) = S_K^{n+1}$.

(в) Нехай $N_n: \frac{S_L^{\psi(n)}}{S_L^{\psi(n)+1}} \to \frac{S_K^n}{S_K^{n+1}}$

гомоморфізм, одержаний з N факторизацією. Тоді має місце точна послідовність

$$0 \to \frac{g_{\psi(n)}}{g_{\psi(n)+1}} \to \frac{S_L^{\psi(n)}}{S_L^{\psi(n)+1}} \xrightarrow{N_n} \frac{S_K^n}{S_K^{n+1}} \to 0$$

$\left(\psi\right.$ — відповідаюча розширенню $\frac{L}{K}$ функція $\left.(4)\right)$. Доведення класичне.

Лема 6. Коли g — абелева група, то $([g:1] = p^n)$

$$H^1(g, S_L) = \frac{Z}{p^n Z}.$$

Доведення — по аналогії з відомою $H^1(g, U_L) = \frac{Z}{p^n Z}$, ($U_L$ — група одиниць L).

Нехай $K(p)$ — максимальне сепарабельне p-розширення K з групою Галуа $GK(p)$. $S_K(p)$ — індуктивна границя груп S_L, де L — конечне p-розширення Галуа поля K. Позначимо $H^1(GK(p), S_K(p))$ через $H^1(*, S_K(p))$ (коцепи неперервні). Нехай $Z_{p^\infty} = \varinjlim \frac{Z}{p^n Z}$.

Лема 7. (Артін (7)). Коли для кожного конечного p-розширення Галуа F поля K існує підгрупа $\overline{H}^1(*, S_F(p))$ групи $H^1(*, S_F(p))$, ізоморфна Z_{p^∞} (ізоморфізм позначається через $\overline{\mathrm{inv}_F}$) така, що

а) для кожного конечного нормального сепарабельного p-розширення $\frac{F}{K}$ буде

$$\mathrm{res}_{\frac{F}{K}} \overline{H}^1(*, S_K(p)) \subset \overline{H}^1(*, S_F(p))$$

і

$$\overline{\mathrm{inv}}_F \, \mathrm{res}_{F,K} \, \alpha = [F:K] \, \overline{\mathrm{inv}}_K \alpha$$

для всіх $\alpha \in \overline{H}^1(*, S_K(p))$.

Тоді

$$H^1\left(g_{\frac{F}{K}}, S_F\right) = \frac{Z}{p^n Z}, \quad H^1(*, S_K(p)) = Z_{p^\infty}.$$

Щоб застосувати цю лему в нашому випадку, треба взяти M — максимальне абелеве p-розширення K: нехай його група Галуа буде $AB_K(p)$. Тоді $H^1(AB_K(p), S_M) = Z_{p^\infty}$ і по спектральній послідовності Серра—Хохшільда є підгрупою $H^1(*, S_K(p))$.

Лема 8. (Тейт (7)). Нехай $f: A \times B \to C$ гомоморфізм g-модулів, а $\alpha \in H^p(g, B)$ такий, що для деякого q буде

$$H^{q-1}(g, A) \times \alpha \to H^{p+q-1}(g, C) \text{ епіморфізм}$$

$$H^q(g, A) \times \alpha \to H^{p+q}(g, C) \text{ ізоморфізм}$$

$$H^{q+1}(g, A) \times \alpha \to H^{p+q+1}(g, C) \text{ мономорфізм.}$$

Тоді

$$H^r(g, A) = H^{p+r}(g, C) \quad (r \in Z).$$

Щоб застосувати цю лему в нашому випадку, візьмемо $A = Z$, $B = S_L$, $C = S_L$, $p = 1$, $q = 1$. Тоді з існування фундаментального класу в $H^1(g, S_L)$ випливає

Теорема. Коли g — p-група, то

$$H^q(g, S_L) = H^{q-1}(g, Z) \text{ (для всіх } q \in Z).$$

За допомогою цієї теореми легко обчислити $H^1(G, A)$, і довести, що $H^1(G, A) = \pi_1(A_K)^*$ в нашому випадку (G — група Галуа максимального розширення Галуа поля K).

ЛІТЕРАТУРА

1. G. Shimura. Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field. Amer. J. of Math. 77, № 1, 1955.
2. H. Hasse. Existenz separabeler zyklischer unverzweigter Erweilerungskörper vom Primzahlgrade p.., J. Reine angew. Math. 172, 1934.
3. А. Картан, С. Эйленберг. Гомологическая алгебра. М., 1960.
4. J. P. Serre. Sur les corps locaux... Bull Soc. Math. France, 1961.
5. P. Samuel and O. Zarisky. Commutative algebra, vol. I. New Jork, 1959.
6. N. Bourbani. Algébre, Paris, 1949.
7. E. Artin, J. Tate. Class field theory. Princeton, 1959.

О. Н. ВВЕДЕНСКИЙ

КОГОМОЛОГИИ ПОДГРУППЫ ЛЮТЦ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Резюме

Вычисляются когомологии подгруппы Лютц и на основе этого доказывается двойственность в одномерном случае — гипотеза Шафаревича.

А. П. КОПИЛОВ

ВИМІРНІСТЬ ФУНКЦІЙ ПО ЖОРДАНУ ТА ІНТЕГРАЛ РІМАНА*

В роботі «Sur l'intégration des fonctions discontinues» (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 27, 1910, 361—450) А. Лебег відмічав, що коли при визначенні вимірної функції виходити з міри Жордана, то одержиться функція, інтегровна по Ріману. Однак к «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften» (II Analysis, III, 2, 1044) вказується, що визначення вимірності функцій по Жордану беззмістовне.

Нижче розглянемо, яким чином треба визначити вимірні функції, спираючись на поняття міри Жордана, щоб клас останніх співпав з класом функцій, інтегровних (R).

Позначення:
m — міра Лебега;
e — міра Жордана;
e_e— зовнішня міра Жордана;
e_i— внутрішня міра Жордана;
вимірна (J) множина — множина, вимірна по Жордану;
майже всюди (L) — з точністю до множини лебегової міри нуль;
майже всюди (J) — з точністю до множини жорданової міри нуль;
$S\ (E,f)=\{(x,y): x\in E, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ — підграфік невід'ємної функції;
$\Gamma\ (E)$ — границя множини, $\Gamma(E)=\overline{E}\cdot\overline{cE}$; $\operatorname{Int}(E)=E-\Gamma(E)$.

1°. Нехай функція $f(x)$ інтегровна (R) на відрізку $[a, b]$. Виникають питання: чи вимірні (J) множини $E(f\geqslant d)$ $(E(f\leqslant d))$; якщо так, то чи для всіх d. Перед тим як відповісти на ці питання, розглянемо твердження, що будуть потрібні нам у дальшому.

Теорема 1. Для того щоб невід'ємна обмежена функція $f(x)$ була інтегровна (R) на $[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб множина $S([a, b], f)$ була вимірна (J).

(Доведення див., наприклад: А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, 1934, 47).

Лема. Нехай E — вимірна (J) плоска множина. Тоді майже для всіх (L) y множини $E_y=\{(x,y)\in E,\ y$ — фіксоване число$\}$ вимірні (J).

Доведення. Справедливе твердження: для того щоб множина E була вимірною (J), необхідно і достатньо, щоб $e\Gamma(E)=0$, або $m\Gamma(E)=0$.

---

* Науковий керівник — доц. Í. Н. Песин.

В нашому випадку $\mathrm{Int}_y(E)\subset\mathrm{Int}(E_y)$ і $(\overline{E})_y\supset(\overline{E_y})$. Звідси

$$\Gamma(E_y)=(\overline{E_y})-\mathrm{Int}(E_y)\subset(\overline{E})_y-\mathrm{Int}_y(E)=(\overline{E}-\mathrm{Int}(E))_y=\Gamma_y(E).$$

Через те, що $m\,\Gamma(E)=0$, то майже для всіх (L) y $m\,\Gamma_y(E)=0$. Тому для цих y $m\,\Gamma(E_y)=0$ і множини E_y вимірні (J).

Лема доведена.

Відповіді на питання, поставлені на початку цього параграфа, дає теорема 2.

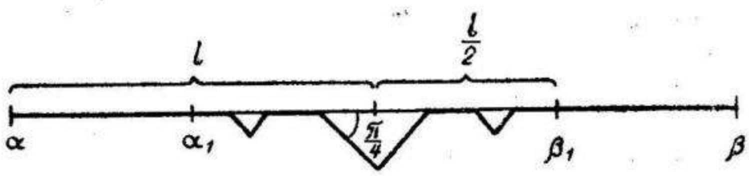
Теорема 2. Для того щоб невід'ємна обмежена функція $f(x)$ була інтегровна (R) на $[a,b]$, необхідно, щоб для майже всіх (L) d з проміжку $[0, \sup f(x)]$ множини $E\,(f\geqslant d)$ $(E\,(f\leqslant d))$ були вимірні (J).

Ця теорема є наслідок теореми 1 і тільки що доведеної леми, бо для невід'ємної функції $E(f\geqslant d)=np_xS_d([a,b],f)$.

У випадку множин $E(f\leqslant d)$ слід розглянути інтегровну (R) функцію $\varphi(x)=c-f(x)$, де c підібране так, що $c-f(x)\geqslant 0$ на $[a,b]$.

2°. Наступний приклад показує, що теорему 2 не можна підсилити (не можна замінити вираз «майже для всіх (L)» виразом «майже для всіх (J)»).

Розглянемо на $[a,b]$ множину P типу канторової (досконалої) додатньої або нульової лебегової міри і монотонно зростаючу неперервну функцію, сталу на кожному доповняльному інтервалі P і таку, що множина значень її на вказаних інтервалах щільна на сегменті $[\min f(x), \max f(x)]$. Значення функції $f(x)$ на кожному з доповняльних інтервалів змінимо таким чином:



На $[\alpha_1, \beta_1]$ розглянемо множину типу канторової додатньої лебегової міри. На доповняльних інтервалах цієї множини замінимо функцію $f(x)$ ламаними (як вказано на рисунку). Побудована таким шляхом функція неперервна, але для неї маємо: множини $E(f\geqslant d)$ невимірні (J) для щільної на відрізку $[\min f(x), \max f(x)]$ множини і невимірної (J). Останнє випливає з того, що канторова множина додатньої лебегової міри невимірна по Жордану.

3°. Проте, теорему 2 можна уточнити.

Теорема 2'. Для того щоб невід'ємна обмежена функція була інтегровна (R) на $[a, b]$, необхідно, щоб множини $E(f\geqslant d)$ $(E(f\leqslant d))$ були вимірні (J), за винятком хіба що зчисленої множини.

Д о в е д е н н я. Множини $E(f\geqslant d)$ монотонні: якщо $d_1>d_2$, то $E(f\geqslant d_1)\subset E(f\geqslant d_2)$. Тому функції $\varphi_e(d)=e_eE(f\geqslant d)$ і $\varphi_i(d)=e_iE(f\geqslant d)$ монотонні і мають, таким чином, хіба що зчисленні множини точок розриву. В кожній же точці, в якій вони разом неперервні, $\varphi_e(d)=\varphi_i(d)$. Це випливає з того, що для інтегровної (R) функції множина тих d, для яких множини $E(f\geqslant d)$ вимірні (J), всюди щільна на відрізку $[0, \sup f(x)]$ (останнє є наслідок теореми 2).

Теорема доведена.

4°. Перейдемо до розгляду достатніх умов інтегровності функцій по Ріману.

Теорема 3. Для того щоб невід'ємна обмежена функція була інтегровна (R) на $[a, b]$, достатньо, щоб існувала на відрізку $[\inf f(x), \sup f(x)]$ всюди щільна множина $\{d\}$, для всіх елементів якої множини $E(f \geqslant d)$ $(E(f \leqslant d))$ вимірні (J).

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[\inf f(x), \sup f(x) + \alpha]$ $(\alpha > 0)$ на частини точками

$$\inf f(x) = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = \sup f(x) + \alpha$$

і множини

$$S_k = S(E_k, \alpha_k), \quad \widetilde{S}_k = S(E_k, \alpha_{k+1}),$$

де

$$E_k = E(\alpha_k \leqslant f < \alpha_{k+1}) = E(f \geqslant \alpha_k) - E(f \geqslant \alpha_{k+1}) \quad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Мають місце включення

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k \subset S([a, b], f) \subset \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{S}_k.$$

Легко бачити, що $S_{k_1} \cdot S_{k_2} = \varnothing$, коли $k_1 \neq k_2$. Тому

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_i S_k \leqslant e_i\left(\sum_{k=0}^{n-1} S_k\right) \leqslant e_i S([a, b], f) \leqslant$$

$$\leqslant e_e S([a, b], f) \leqslant e_e\left(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{S}_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} e_e \widetilde{S}_k.$$

Звідси (на підставі рівностей, які легко перевіряються, $e_e S(E, h) = he_e E$ і $e_i S(E, h) = he_i E$) одержуємо

$$e_e S([a, b], f) - e_i S([a, b], f) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (e_e \widetilde{S}_k - e_i S_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} e_e E_k - \alpha_k e_i E_k).$$

Нехай $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1} \subset \{d\}$. Через те, що $\alpha_0, \alpha_n \in \{d\}$ також, то

$$e_e E_k = e_i E_k = eE_k = eE(f \geqslant \alpha_k) - eE(f \geqslant \alpha_{k+1})$$

і, таким чином,

$$e_e S([a, b], f) - e_i S([a, b], f) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) eE_k \leqslant \lambda \sum_{k=0}^{n-1} eE_k = \lambda(b-a),$$

де $\lambda = \max\limits_k (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$.

λ можна підібрати так, щоб виконувалась нерівність $\lambda(b-a) < \varepsilon$, де $\varepsilon\ (> 0)$ — довільне число ($\{d\}$ — всюди щільна множина на сегменті $[\inf f(x), \sup f(x)]$). Звідси $e_e S([a, b], f) = e_i S([a, b], f)$ і $f(x)$ інтегровна (R) (див. теорему 1).

Якщо тепер всюди щільна на $[\inf f(x), \sup f(x)]$ множина $\{d\}$ така, що для всіх елементів її множини $E(f \leqslant d)$ вимірні (J), то цей випадок можна звести до попереднього, розглядаючи функцію $\varphi(x) = c - f(x)$ $(c \geqslant f(x))$.

5°. З доведення теореми 3 та теореми 1 випливає, що для інтеграла Рімана можна дати таку побудову.

Нехай на $[a, b]$ задана невід'ємна функція $f(x)$, причому $f(x) < c < +\infty$.

Розіб'ємо сегмент $[o, c]$ на частини точками

$$o = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = c$$

і віднесемо кожному півсегменту $[y_k, y_{k+1}]$ множину

$$E_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1}) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Розглянемо далі суми

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k e_i E_k \quad \text{і} \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} e_e E_k.$$

Нехай $\underline{s} = \sup\{s\}$, а $\overline{S} = \inf\{S\}$. Якщо $\underline{s} = \overline{S}$, то функція $f(x)$ інтегровна (R) на $[a, b]$ і

$$\underline{s} = \overline{S} = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

6°. Одержані результати можна перенести на випадок, коли $f(x)$ — довільна обмежена функція одного змінного, а також коли $f(x)$ — функція багатьох змінних.

На цій підставі введемо означення: обмежена функція $f(x)$, задана в n-мірному просторі, називається вимірною по Жордану, якщо існує всюди щільна на осі Y множина $\{d\}$, для всіх елементів якої множини $E(f \geqslant d)$ вимірні по Жордану.

Тепер зв'язок між вимірністю функцій по Жордану та інтегровністю по Ріману можна описати таким чином.

Теорема 4. Для того щоб обмежена функція була інтегровна (R), необхідно і достатньо, щоб вона була вимірна по Жордану (згідно введеному означенню).

А. П. КОПЫЛОВ

ИЗМЕРИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ПО ЖОРДАНУ И ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Резюме

Пусть $f(x)$ — ограниченная функция, заданная в n-мерном эвклидовом пространстве. Имеет место утверждение:

Для того, чтобы $f(x)$ была интегрируема по Лебегу (на любом измеримом по Лебегу множестве), необходимо и достаточно, чтобы она была измерима по Лебегу.

В работе устанавливается признак интегрируемости, аналогичный сформулированному, для функций, интегрируемых по Риману. Оказывается, что если определить измеримой по Жордану функцию, для которой существует всюду плотное на оси Y множество $\{d\}$, обладающее свойством: множества $E(f \geqslant d)$ измеримы по Жордану для всех d из $\{d\}$, то класс измеримых в этом смысле функций совпадает с классом функций, интегрируемых по Риману.

В настоящей работе дано также построение интеграла Римана, основанное на понятии меры Жордана, подобное построению интеграла Лебега (5°).

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

Є. М. ПАРАСЮК

ПРО ОДИН ТИП СИСТЕМ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ*.

Спираючись на одержані недавно результати Я. Б. Лопатинського [1], в даній статті наводимо формулу для обчислення індекса одного типу систем сингулярних інтегральних рівнянь, що відповідають краєвим задачам для областей з безмежною кількістю кутових точок на границі. Вказаний тип задач визначається одним частинним випадком досить загальних кривих з кутовими точками — так званих кривих з обмеженим обертанням.

Означення. Згідно з Радоном [2], плоска неперервна спрямлювана крива S, що задається параметрично рівняннями

$$\begin{aligned} x &= x(s), \\ y &= y(s), \end{aligned} \qquad o \leqslant s \leqslant l,$$

де s — довжина дуги, взята за параметр, називається кривою з обмеженим обертанням, якщо кут $\Theta(s)$, означений за допомогою рівностей

$$\cos\Theta(s) = x'(s),$$
$$\sin\Theta(s) = y'(s),$$

як функція довжини дуги s, може бути означений так, що його повна варіація на проміжку $[o, l]$ є величина обмежена. В дальшому функцію $\Theta(s)$ будемо називати кутовою функцією.

Як відомо, $\Theta(s)$ визначається для всіх $o \leqslant s \leqslant l$, за винятком множини міри нуль, де вона може приймати довільні значення. Кутова функція як функція з обмеженою варіацією може мати лише зчисленну множину точок розриву I роду. Якщо позначити через $\Theta(s+)$ $[\Theta(s-)]$ односторонні границі кутової функції в точці s відповідно справа (зліва), то враховуючи означення $\Theta(s)$ $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, ми можемо вважати, що в кожній точці s виконується умова

$$|\Theta(s+) - \Theta(s-)| \leqslant \pi.$$

Точка, в якій $|\Theta(s+) - \Theta(s-)| = \pi$, називається точкою загострення, а точка, в якій $|\Theta(s+) - \Theta(s-)| < \pi$, — кутовою точкою. Тоді, очевидно, крива S може мати лише скінченну кількість точок загострення і зчисленну множину кутових точок. Крива з обмеженим обертанням має ще й ту особливість, що в кожній її точці існує єдина одностороння дотична

* Науковий керівник — член-кор. АН УРСР Я. Б. Лопатинський.

(ліва і права). Для прикладу візьмемо точку, що є граничною точкою для послідовності кутових точок.

Лема. В кожній граничній точці кривої з обмеженим обертанням, існує єдина одностороння дотична (ліва і права). Справедливість цієї леми легко встановлюється від протилежного. Якщо б існували, наприклад, дві праві дотичні в якійсь граничній точці s, то, позначивши кут між ними через ε, легко побачити, що, починаючи з деякого місця на шляху до точки s, стрибок $|\Theta(s+)-\Theta(s-)|$ кутової функції буде не менший, ніж ε. А це суперечить тому, що $\Theta(s)$ — функція обмеженої варіації. Таким чином, кожна гранична точка є або точкою гладкості $[\Theta(s+] = \Theta\ (s-)]$, або кутовою точкою. У дальнійшому ми будемо виключати точки загострення. Зауважимо, що криві з обмеженим обертанням можуть мати всюди щільну множину кутових точок. З усіх кривих з обмеженим обертанням ми виберемо такі, які не мають точок загострення і для яких замикання множини всіх кутових точок має міру нуль. Ці і тільки ці криві ми будемо використовувати у дальшому.

Цим і визначається наш частинний випадок кривих з обмеженим обертанням. Зрозуміло, що наш тип кривих також допускає зчисленну множину кутових точок, але уже не всюди щільну.

Розглянемо тепер краєву задачу для системи диференціальних рівнянь еліптичного типу в області, обмеженій кривою S нашого типу.

Як відомо [1], така задача приводиться до системи інтегральних рівнянь вигляду:

$$u(x)-\int\limits_S \frac{1}{|x-y|}\,G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)d_ys=f(x), \tag{1}$$

де $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $u(x)$ — стовпчик висоти p, $G(x, y, \xi, \eta, \zeta)$ — квадратна $p\times p$ матриця, неперервна при $x, y\in S$, $|\xi|=|\eta|=|\zeta|=1$ $\nu(x)$ — одиничний вектор внутрішньої нормалі до S у точці x.

На матрицю $G(x, y, \xi, \eta, \zeta)$ допускається ще одна умова:

$$G(x, y, \xi, \eta, \zeta)=O[|(\xi, \zeta)|+|(\eta, \zeta)|]. \tag{A}$$

Виділимо окремо інтегральний оператор

$$Gu(x)=\int\limits_S \frac{1}{|x-y|}\,G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)d_ys.$$

Тоді попередня система інтегральних рівнянь коротко може бути записана так:

$$(I-G)\,u(x)=f(x),$$

де I — одиничний оператор. Зауважимо, що оскільки границя S може мати кутові точки, то оператор G не завжди є цілком неперервним.

У роботі [1] подається формула для обчислення індекса оператора $I-G$ при обмеженні, що границя S може мати лише скінченну кількість (n) кутових точок. Точки загострення також виключаються. Формула Я. Б. Лопатинського має такий вигляд:

$$\varkappa=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty+\varepsilon_1 i}^{+\infty+\varepsilon_1 i} d_\lambda \arg \Delta_k(\lambda), \tag{B}$$

де

$$\Delta_k(\lambda) = \det[E - U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda) \cdot U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda)],$$

$$U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}} G(a_k, a_k, -\tau_k \sin\omega_k -$$

$$- \nu_k \cos\omega_k, \nu_k, -\zeta_k(t))dt,$$

$$U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}} G(a_k, a_k, \nu_k, -\tau_k \sin\omega_k -$$

$$- \nu_k \cos\omega_k, \zeta_k(-t))\, dt,$$

$$\zeta_k(t) = \frac{\left(e^{-\frac{t}{2}} \cos\omega_k - e^{\frac{t}{2}}\right)\tau_k - e^{-\frac{t}{2}} \sin\omega_k \cdot \nu_k}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}},$$

$$\lambda = \xi + i\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right),\ 0 < \varepsilon < 1,\ \varepsilon_1 = \operatorname{Im}\lambda = \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

a_k — кутова точка з номером k, ω_k — внутрішній кут при вершині a_k, τ_k, ν_k — одиничні вектори дотичної і нормалі відповідно до дуги S_k в точці a_k. (Тут мається на увазі, що границя поділена кутовими точками на n частин $S_1, S_2, \ldots, S_n$, пронумерованих згідно з нумерацією самих кутових точок $a_1, a_2, \ldots, a_n$).

Ми покажемо, що формула (В) має місце й у нашому випадку, який допускає наявність безмежної кількості кутових точок. Інакше кажучи, ми покажемо, що в наших умовах у формулі (В) можна переходити до границі при $n \to \infty$.

Наше доведення буде спиратися на три твердження.

Розглянемо спочатку ізольовані кутові точки a_k; заключимо кожну із них у деякий окіл σ_k — дужку границі S. Інтегральний оператор, що відповідає цій дужці, позначимо через G_k:

$$G_k u(x) = \int\limits_{\sigma_k} \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y) d_y S,\ x \in \sigma_k.$$

Оператор G_k діє у функціональному просторі $L_\varepsilon(\sigma_k)$ з нормою

$$\|u(x)\| = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\sigma_k} r^{-\varepsilon}(x) |u_i(x)|\, d_x S,$$

де $0 < \varepsilon < 1$, $r(x) = |x - a_k|$.

Твердження 1. *Для будь-якого малого числа $\rho > 0$ можна вибрати такі числа $\gamma > 0$ і $\delta > 0$, що $\|G_k\| < \rho$, якщо тільки $l_k \leqslant \gamma$ і $|\pi - \omega_k| \leqslant \delta$, де l_k — половина довжини дуги σ_k з центром у точці a_k. Тут і в дальшому мається на увазі, що кутові точки пронумеровані згідно з спаданням величини $|\pi - \omega_k|$.*

Доведення проводиться на оцінці постійної, що входить у нерівність

$$\|G_k u(x)\| \leqslant K\, \|u(x)\|. \qquad (*)$$

У нашому випадку на цю постійну припадає інтеграл

$$I_k(y)=\int\limits_{\sigma_k}\frac{r^{\varepsilon}(y)r^{-\varepsilon}(x)}{|x-y|}\left|G\left(x,y,\nu(x),\nu(y),\frac{x-y}{|x-y|}\right)\right|d_xS,\ y\in\sigma_k.$$

Проектуючи дугу σ_k на ліву і праву дотичні в точці a_k, переходячи до локальної системи координат (τ_k,ν_k) з центром у точці a_k, а також використовуючи оцінку (А), ми одержимо, що

$$I_k(y)\leqslant\frac{2C}{\alpha\varepsilon(1-\varepsilon)}\left[5\varepsilon a l_k^{\alpha}+\alpha\operatorname{tg}\frac{|\pi-\omega_k|}{2}\right],\tag{2}$$

де C — взята з оцінки (А), a і α — постійні Ляпунова, $0<\varepsilon<1$.

Звідси й випливає, що можна знайти таку кутову точку a_k і заключити її в такий окіл σ_k, що норма оператора G_k може стати як завгодно малою.

Розглянемо тепер усю границю S, де кутові точки можуть входити і не ізольованим чином.

Множину всіх кутових точок кривої S позначимо через M. Тоді, за нашим допущенням, $\operatorname{mes}\overline{M}=0$. Покриємо кожну кутову точку a_k кривої S деяким криволінійним інтервалом σ_k — куском кривої S так, щоб ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ був збіжний. Для конкретності будемо вважати, що всі σ_k відкриті множини, $\sigma=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\sigma_k$ також відкрита множина, яка покриває всю множину $\overline{M}$. Оскільки $\overline{M}$ — замкнена, то $\sigma\setminus\overline{M}$ — відкрита. Отже, вона може бути представлена у вигляді об'єднання не більше як зчисленної кількості відкритих криволінійних інтервалів, що не перетинаються:

$$\sigma\setminus\overline{M}=\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\ldots$$

Довжину інтервала Δ_k позначимо через l_k. Очевидно, оскільки M — зчисленна множина, то можна вибрати таке її покриття σ, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}l_k$ не тільки збігається, але й його сума може бути зроблена як завгодно малою.

Розглянемо тепер оператор G_σ:

$$G_\sigma u(x)=\int\limits_{\sigma}\frac{1}{|x-y|}G\left(x,y,\nu(x),\nu(y),\frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)d_yS,\ x\in\sigma.$$

Очевидно, можна записати:

$$G_\sigma u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta_k}\frac{1}{|x-y|}G\left(x,y,\nu(x),\nu(y),\frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)d_yS,\ x\in\sigma.$$

Мається на увазі, що оператор G_σ діє в просторі $L_\varepsilon(\sigma)$ з нормою:

$$\|u(x)\| = \sum_{l=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{p}\int_{\Delta_l} r^{-\varepsilon}(x)\,|u_i(x)|\,d_xS\right],$$

де $r(x)$ — віддаль точки x до найближчої кутової точки.

Зауважимо, що нумерація інтервалів Δ_k узгоджена з нумерацією кутових точок a_k.

Згідно з відомою теоремою [4], індекс оператора $I-G$ рівний індексу оператора $I-G_\sigma$.

Покажемо, що індекс останнього можна числити, враховуючи лише скінченну кількість кутових точок. А саме:

Твердження 2. Для будь-якого малого числа $\rho>0$ можна підібрати такий номер N, що норма оператора

$$G_\sigma^N u(x) = \sum_{k=N}^{\infty}\int_{\Delta_k}\frac{1}{|x-y|}\,G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)\,d_yS$$

стане меншою, ніж ρ.

Справедливість цього твердження знову випливає з нерівності(*). У даному випадку на долю константи K припадає залишок ряду

$$I_N(y) = \sum_{k=N}^{\infty}\int_{\Delta_k}\frac{r^{\varepsilon}(y)\,r^{-\varepsilon}(x)}{|x-y|}\left|G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)\right|d_xS.$$

Очевидно, для кожного інтеграла можна скористатися оцінкою (2). Тоді ми одержимо:

$$I_N(y) \leqslant \frac{2C}{\alpha\varepsilon(1-\varepsilon)}\left\{5\,\varepsilon\, a\sum_{k=N}^{\infty} l_k^{\alpha} + \alpha\sum_{k=N}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{|\pi-\omega_k|}{2}\right\}.$$

Число N будемо вважати настільки великим, що

$$\operatorname{tg}\frac{|\pi-\omega_k|}{2} \leqslant \frac{|\pi-\omega_k|}{2\varepsilon}, \text{ при } k \geqslant N.$$

Тоді

$$I_N(y) \leqslant \frac{2C}{\alpha\varepsilon(1-\varepsilon)}\left\{5\,\varepsilon\, a\sum_{k=N}^{\infty} l_k^{\alpha} + \frac{\alpha}{2\varepsilon}\sum_{k=N}^{\infty}|\pi-\omega_k|\right\}. \qquad (3)$$

Очевидно, можна вибрати таке покриття множини $\overline{M}$, що залишок ряду $\sum\limits_{k=N}^{\infty} l_k^{\alpha}$ може бути зроблений як завгодно малим, починаючи з деякого N.

Оскільки S — крива з обмеженим обертанням, то підбором N величина $\sum\limits_{k=N}^{\infty}|\pi-\omega_k|$ також може бути зроблена як завгодно малою. Звідси випливає, що за рахунок N норма оператора G_σ^N може бути зроблена як завгодно малою.

Все це означає, що кутові точки a_k, для яких величина $|\pi-\omega_k|$ досить мала, не впливають на індекс рівняння (1). Це дає можливість відкинути їх і обчислювати індекс лише по скінченній кількості кутових точок, для яких величина $|\pi-\omega_k|$ обмежена знизу.

Покажемо, що індекс рівняння (1) у випадку кривої з обмеженим обертанням можна обчислювати по формулі (B).

Твердження 3. Знайдеться такий номер N, що

$$\int\limits_{-\infty+\varepsilon_1 i}^{+\infty+\varepsilon_1 i} d_\lambda \arg \Delta_k(\lambda) = 0, \text{ якщо } k \geqslant N.$$

Враховуючи, що $\Delta_k(\lambda)$ також залежить і від кута ω_k, ми запишемо:

$$\Delta_k(\lambda, \omega_k) = \det\left[E - U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda, \omega_k) \cdot U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda, \omega_k)\right].$$

Переходячи до локальної системи координат (τ_k, ν_k) (див. [1]) і враховуючи оцінку (A), ми одержимо таку оцінку для елементів $u_{ij}(\lambda, \omega_k)$ матриць $U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda, \omega_k)$, $U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda, \omega_k)$:

$$|u_{ij}(\lambda, \omega_k)| \leqslant \frac{2\pi C}{\sin \varepsilon\pi} \sin \frac{|\pi-\omega_k|}{2}$$

і таку оцінку для елементів $w_{ij}(\lambda, \omega_k)$ матриці-добутку $U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda, \omega_k) \times$ $\times\, U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda, \omega_k)$

$$|w_{ij}(\lambda, \omega_k)| \leqslant \frac{4\pi^2 C^2 p}{\sin^2 \varepsilon\pi} \sin^2 \frac{|\pi-\omega_k|}{2}, \tag{4}$$

де C — постійна з умови (A), $0 < \varepsilon < 1$.

Число ε вибрано так, щоб на прямій $\operatorname{Im} \lambda = \frac{1}{2} - \varepsilon$ ні один з визначників $\Delta_k(\lambda)$ не перетворювався в нуль, p — порядок матриці. Очевидно, можна записати

$$\Delta_k(\lambda, \omega_k) = 1 - \varphi(\lambda, \omega_k),$$

де $\varphi(\lambda, \omega_k)$ — функція, що одержується після розкриття вказаного визначника.

Використовуючи нерівність Адамара, а також (4), неважко одержати таку оцінку

$$|\varphi(\lambda, \omega_k)| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i \left[\frac{4\pi^2 C^2 p^{3/2}}{\sin^2 \varepsilon\pi} \cdot \sin^2 \frac{\pi-\omega_k}{2}\right]^{p-i}. \tag{5}$$

Вибравши таке N, щоб при $k \geqslant N$

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_p^i \left[\frac{4\pi^2 C^2 p^{3/2}}{\sin^2 \varepsilon\pi} \cdot \sin^2 \frac{\pi-\omega_k}{2}\right]^{p-i} < 1, \tag{6}$$

ми переконаємось у справедливості твердження 3.

Висновок. Індекс рівняння (1) можна обчислювати по формулі (B), враховуючи лише ті кутові точки, для яких не виконується умова (6), а їх — скінченна кількість.

Примітка: В даній статті ми не наводимо повного доказу того, що наш оператор — Ф-оператор. Ми це робимо окремо в іншій статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Об одном типе сингулярных интегральных уравнений. Теор. і прикл. мат. Вид. Львівськ. ун-ту, № 2, 1963.
2. И. Радон. О краевых задачах для логарифмического потенциала, УМН I, вып. 3—4, 1946.
3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН XII, вып. 2, 1957.
4. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН XIII, вып. 2, 1958.

Е. М. ПАРАСЮК

Резюме

ОБ ОДНОМ ТИПЕ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуются системы интегральных уравнений, к которым приводятся граничные задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях, ограниченных кривыми, допускающих наличие бесконечного количества угловых точек.

В работе приводится формула для вычисления индекса указанного типа задач.