А. П. КОПИЛОВ

ВИМІРНІСТЬ ФУНКЦІЙ ПО ЖОРДАНУ ТА ІНТЕГРАЛ РІМАНА*

В роботі «Sur l'intégration des fonctions discontinues» (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 27, 1910, 361—450) А. Лебег відмічав, що коли при визначенні вимірної функції виходити з міри Жордана, то одержиться функція, інтегровна по Ріману. Однак к «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften» (II Analysis, III, 2, 1044) вказується, що визначення вимірності функцій по Жордану беззмістовне.

Нижче розглянемо, яким чином треба визначити вимірні функції, спираючись на поняття міри Жордана, щоб клас останніх співпав з класом функцій, інтегровних (R).

Позначення:

m — міра Лебега;

e — міра Жордана;

e_e— зовнішня міра Жордана;

e_i— внутрішня міра Жордана;

вимірна (J) множина — множина, вимірна по Жордану;

майже всюди (L) — з точністю до множини лебегової міри нуль;

майже всюди (J) — з точністю до множини жорданової міри нуль;

$S\ (E,f)=\{(x,y): x\in E, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ — підграфік невід'ємної функції;

$\Gamma\ (E)$ — границя множини, $\Gamma(E)=\overline{E}\cdot\overline{cE}$; $\operatorname{Int}(E)=E-\Gamma(E)$.

1°. Нехай функція $f(x)$ інтегровна (R) на відрізку $[a, b]$. Виникають питання: чи вимірні (J) множини $E(f\geqslant d)$ $(E(f\leqslant d))$; якщо так, то чи для всіх d. Перед тим як відповісти на ці питання, розглянемо твердження, що будуть потрібні нам у дальшому.

Теорема 1. Для того щоб невід'ємна обмежена функція $f(x)$ була інтегровна (R) на $[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб множина $S([a, b], f)$ була вимірна (J).

(Доведення див., наприклад: А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, 1934, 47).

Лема. Нехай E — вимірна (J) плоска множина. Тоді майже для всіх (L) y множини $E_y=\{(x,y)\in E,\ y$ — фіксоване число$\}$ вимірні (J).

Доведення. Справедливе твердження: для того щоб множина E була вимірною (J), необхідно і достатньо, щоб $e\Gamma(E)=0$, або $m\Gamma(E)=0$.

---

* Науковий керівник — доц. І. Н. Песин.

В нашому випадку $\mathrm{Int}_y(E) \subset \mathrm{Int}(E_y)$ і $(\overline{E})_y \supset (\overline{E_y})$. Звідси

$$\Gamma(E_y) = (\overline{E_y}) - \mathrm{Int}(E_y) \subset (\overline{E})_y - \mathrm{Int}_y(E) = (\overline{E} - \mathrm{Int}(E))_y = \Gamma_y(E).$$

Через те, що $m\Gamma(E) = 0$, то майже для всіх (L) y $m\Gamma_y(E) = 0$. Тому для цих y $m\Gamma(E_y) = 0$ і множини E_y вимірні (J).

Лема доведена.

Відповіді на питання, поставлені на початку цього параграфа, дає теорема 2.

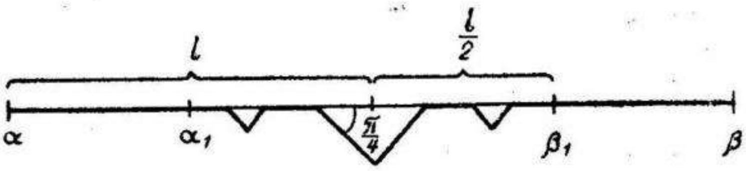
Теорема 2. Для того щоб невід'ємна обмежена функція $f(x)$ була інтегровна (R) на $[a, b]$, необхідно, щоб для майже всіх (L) d з проміжку $[0, \sup f(x)]$ множини $E\,(f \geqslant d)$ $(E\,(f \leqslant d))$ були вимірні (J).

Ця теорема є наслідок теореми 1 і тільки що доведеної леми, бо для невід'ємної функції $E(f \geqslant d) = np_x S_d([a, b], f)$.

У випадку множин $E(f \leqslant d)$ слід розглянути інтегровну (R) функцію $\varphi(x) = c - f(x)$, де c підібране так, що $c - f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$.

2°. Наступний приклад показує, що теорему 2 не можна підсилити (не можна замінити вираз «майже для всіх (L)» виразом «майже для всіх (J)»).

Розглянемо на $[a, b]$ множину P типу канторової (досконалої) додатньої або нульової лебегової міри і монотонно зростаючу неперервну функцію, сталу на кожному доповняльному інтервалі P і таку, що множина значень її на вказаних інтервалах щільна на сегменті $[\min f(x), \max f(x)]$. Значення функції $f(x)$ на кожному з доповняльних інтервалів змінимо таким чином:



На $[\alpha_1, \beta_1]$ розглянемо множину типу канторової додатньої лебегової міри. На доповняльних інтервалах цієї множини замінимо функцію $f(x)$ ламаними (як вказано на рисунку). Побудована таким шляхом функція неперервна, але для неї маємо: множини $E(f \geqslant d)$ невимірні (J) для щільної на відрізку $[\min f(x), \max f(x)]$ множини і невимірної (J). Останнє випливає з того, що канторова множина додатньої лебегової міри невимірна по Жордану.

3°. Проте, теорему 2 можна уточнити.

Теорема 2'. Для того щоб невід'ємна обмежена функція була інтегровна (R) на $[a, b]$, необхідно, щоб множини $E\,(f \geqslant d)$ $(E\,(f \leqslant d))$ були вимірні (J), за винятком хіба що зчисленої множини.

Д о в е д е н н я. Множини $E(f \geqslant d)$ монотонні: якщо $d_1 > d_2$, то $E(f \geqslant d_1) \subset E(f \geqslant d_2)$. Тому функції $\varphi_e(d) = e_e E(f \geqslant d)$ і $\varphi_i(d) = e_i E(f \geqslant d)$ монотонні і мають, таким чином, хіба що зчисленні множини точок розриву. В кожній же точці, в якій вони разом неперервні, $\varphi_e(d) = \varphi_i(d)$. Це випливає з того, що для інтегровної (R) функції множина тих d, для яких множини $E(f \geqslant d)$ вимірні (J), всюди щільна на відрізку $[0, \sup f(x)]$ (останнє є наслідок теореми 2).

Теорема доведена.

4°. Перейдемо до розгляду достатніх умов інтегровності функцій по Ріману.

Теорема 3. Для того щоб невід'ємна обмежена функція була інтегровна (R) на $[a, b]$, достатньо, щоб існувала на відрізку $[\inf f(x), \sup f(x)]$ всюди щільна множина $\{d\}$, для всіх елементів якої множини $E(f \geqslant d)$ $(E(f \leqslant d))$ вимірні (J).

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[\inf f(x), \sup f(x) + \alpha]$ $(\alpha > 0)$ на частини точками

$$\inf f(x) = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = \sup f(x) + \alpha$$

і множини

$$S_k = S(E_k, \alpha_k), \quad \widetilde{S}_k = S(E_k, \alpha_{k+1}),$$

де

$$E_k = E(\alpha_k \leqslant f < \alpha_{k+1}) = E(f \geqslant \alpha_k) - E(f \geqslant \alpha_{k+1}) \quad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Мають місце включення

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k \subset S([a, b], f) \subset \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{S}_k.$$

Легко бачити, що $S_{k_1} \cdot S_{k_2} = \varnothing$, коли $k_1 \neq k_2$. Тому

$$\sum_{k=0}^{n-1} e_i S_k \leqslant e_i\left(\sum_{k=0}^{n-1} S_k\right) \leqslant e_i S([a, b], f) \leqslant$$

$$\leqslant e_e S([a, b], f) \leqslant e_e\left(\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{S}_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} e_e \widetilde{S}_k.$$

Звідси (на підставі рівностей, які легко перевіряються, $e_e S(E, h) = h e_e E$ і $e_i S(E, h) = h e_i E$) одержуємо

$$e_e S([a, b], f) - e_i S([a, b], f) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (e_e \widetilde{S}_k - e_i S_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} e_e E_k - \alpha_k e_i E_k).$$

Нехай $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1} \subset \{d\}$. Через те, що $\alpha_0, \alpha_n \in \{d\}$ також, то

$$e_e E_k = e_i E_k = e E_k = e E(f \geqslant \alpha_k) - e E(f \geqslant \alpha_{k+1})$$

і, таким чином,

$$e_e S([a, b], f) - e_i S([a, b], f) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) e E_k \leqslant \lambda \sum_{k=0}^{n-1} e E_k = \lambda(b-a),$$

де $\lambda = \max\limits_k (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$.

λ можна підібрати так, щоб виконувалась нерівність $\lambda(b-a) < \varepsilon$, де $\varepsilon (> 0)$ — довільне число ($\{d\}$ — всюди щільна множина на сегменті $[\inf f(x), \sup f(x)]$). Звідси $e_e S([a, b], f) = e_i S([a, b], f)$ і $f(x)$ інтегровна (R) (див. теорему 1).

Якщо тепер всюди щільна на $[\inf f(x), \sup f(x)]$ множина $\{d\}$ така, що для всіх елементів її множини $E(f \leqslant d)$ вимірні (J), то цей випадок можна звести до попереднього, розглядаючи функцію $\varphi(x) = c - f(x)$ $(c \geqslant f(x))$.

5°. З доведення теореми 3 та теореми 1 випливає, що для інтеграла Рімана можна дати таку побудову.

Нехай на $[a, b]$ задана невід'ємна функція $f(x)$, причому $f(x) < c < +\infty$.

Розіб'ємо сегмент $[o, c]$ на частини точками

$$o = y_0 < y_1 < \dots < y_n = c$$

і віднесемо кожному півсегменту $[y_k, y_{k+1}]$ множину

$$E_k = E(y_k \leqslant f < y_{k+1}) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Розглянемо далі суми

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k e_i E_k \quad \text{і} \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} e_e E_k.$$

Нехай $\underline{s} = \sup\{s\}$, а $\overline{S} = \inf\{S\}$. Якщо $\underline{s} = \overline{S}$, то функція $f(x)$ інтегровна (R) на $[a, b]$ і

$$\underline{s} = \overline{S} = (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

6°. Одержані результати можна перенести на випадок, коли $f(x)$ — довільна обмежена функція одного змінного, а також коли $f(x)$ — функція багатьох змінних.

На цій підставі введемо означення: обмежена функція $f(x)$, задана в n-мірному просторі, називається вимірною по Жордану, якщо існує всюди щільна на осі Y множина $\{d\}$, для всіх елементів якої множини $E(f \geqslant d)$ вимірні по Жордану.

Тепер зв'язок між вимірністю функцій по Жордану та інтегровністю по Ріману можна описати таким чином.

Теорема 4. Для того щоб обмежена функція була інтегровна (R), необхідно і достатньо, щоб вона була вимірна по Жордану (згідно введеному означенню).

А. П. КОПЫЛОВ

ИЗМЕРИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ПО ЖОРДАНУ И ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Резюме

Пусть $f(x)$ — ограниченная функция, заданная в n-мерном эвклидовом пространстве. Имеет место утверждение:

Для того, чтобы $f(x)$ была интегрируема по Лебегу (на любом измеримом по Лебегу множестве), необходимо и достаточно, чтобы она была измерима по Лебегу.

В работе устанавливается признак интегрируемости, аналогичный сформулированному, для функций, интегрируемых по Риману. Оказывается, что если определить измеримой по Жордану функцию, для которой существует всюду плотное на оси Y множество $\{d\}$, обладающее свойством: множества $E(f \geqslant d)$ измеримы по Жордану для всех d из $\{d\}$, то класс измеримых в этом смысле функций совпадает с классом функций, интегрируемых по Риману.

В настоящей работе дано также построение интеграла Римана, основанное на понятии меры Жордана, подобное построению интеграла Лебега (5°).