Є. М. ПАРАСЮК

ПРО ОДИН ТИП СИСТЕМ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ*.

Спираючись на одержані недавно результати Я. Б. Лопатинського [1], в даній статті наводимо формулу для обчислення індекса одного типу систем сингулярних інтегральних рівнянь, що відповідають краєвим задачам для областей з безмежною кількістю кутових точок на границі. Вказаний тип задач визначається одним частинним випадком досить загальних кривих з кутовими точками — так званих кривих з обмеженим обертанням.

Означення. Згідно з Радоном [2], плоска неперервна спрямлювана крива S, що задається параметрично рівняннями

$$\begin{aligned} x &= x(s), \\ y &= y(s), \end{aligned} \qquad o \leqslant s \leqslant l,$$

де s — довжина дуги, взята за параметр, називається кривою з обмеженим обертанням, якщо кут $\Theta(s)$, означений за допомогою рівностей

$$\cos\Theta(s) = x'(s),$$
$$\sin\Theta(s) = y'(s),$$

як функція довжини дуги s, може бути означений так, що його повна варіація на проміжку $[o, l]$ є величина обмежена. В дальшому функцію $\Theta(s)$ будемо називати кутовою функцією.

Як відомо, $\Theta(s)$ визначається для всіх $o \leqslant s \leqslant l$, за винятком множини міри нуль, де вона може приймати довільні значення. Кутова функція як функція з обмеженою варіацією може мати лише зчисленну множину точок розриву I роду. Якщо позначити через $\Theta(s+)$ $[\Theta(s-)]$ односторонні границі кутової функції в точці s відповідно справа (зліва), то враховуючи означення $\Theta(s)$ (mod 2π), ми можемо вважати, що в кожній точці s виконується умова

$$|\Theta(s+) - \Theta(s-)| \leqslant \pi.$$

Точка, в якій $|\Theta(s+) - \Theta(s-)| = \pi$, називається точкою загострення, а точка, в якій $|\Theta(s+) - \Theta(s-)| < \pi$, — кутовою точкою. Тоді, очевидно, крива S може мати лише скінченну кількість точок загострення і зчисленну множину кутових точок. Крива з обмеженим обертанням має ще й ту особливість, що в кожній її точці існує єдина одностороння дотична

* Науковий керівник — член-кор. АН УРСР Я. Б. Лопатинський.

(ліва і права). Для прикладу візьмемо точку, що є граничною точкою для послідовності кутових точок.

Лема. В кожній граничній точці кривої з обмеженим обертанням, існує єдина одностороння дотична (ліва і права). Справедливість цієї леми легко встановлюється від протилежного. Якщо б існували, наприклад, дві праві дотичні в якійсь граничній точці s, то, позначивши кут між ними через ε, легко побачити, що, починаючи з деякого місця на шляху до точки s, стрибок $|\Theta(s+)-\Theta(s-)|$ кутової функції буде не менший, ніж ε. А це суперечить тому, що $\Theta(s)$ — функція обмеженої варіації. Таким чином, кожна гранична точка є або точкою гладкості $[\Theta(s+]=\Theta\ (s-)]$, або кутовою точкою. У дальнійшому ми будемо виключати точки загострення. Зауважимо, що криві з обмеженим обертанням можуть мати всюди щільну множину кутових точок. З усіх кривих з обмеженим обертанням ми виберемо такі, які не мають точок загострення і для яких замикання множини всіх кутових точок має міру нуль. Ці і тільки ці криві ми будемо використовувати у дальшому.

Цим і визначається наш частинний випадок кривих з обмеженим обертанням. Зрозуміло, що наш тип кривих також допускає зчисленну множину кутових точок, але уже не всюди щільну.

Розглянемо тепер краєву задачу для системи диференціальних рівнянь еліптичного типу в області, обмеженій кривою S нашого типу.

Як відомо [1], така задача приводиться до системи інтегральних рівнянь вигляду:

$$u(x)-\int\limits_S \frac{1}{|x-y|}\,G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)d_y s=f(x), \tag{1}$$

де $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $u(x)$ — стовпчик висоти p, $G(x, y, \xi, \eta, \zeta)$ — квадратна $p\times p$ матриця, неперервна при $x, y\in S$, $|\xi|=|\eta|=|\zeta|=1$ $\nu(x)$ — одиничний вектор внутрішньої нормалі до S у точці x.

На матрицю $G(x, y, \xi, \eta, \zeta)$ допускається ще одна умова:

$$G(x, y, \xi, \eta, \zeta)=O[|(\xi, \zeta)|+|(\eta, \zeta)|]. \tag{A}$$

Виділимо окремо інтегральний оператор

$$Gu(x)=\int\limits_S \frac{1}{|x-y|}\,G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)d_y s.$$

Тоді попередня система інтегральних рівнянь коротко може бути записана так:

$$(I-G)\,u(x)=f(x),$$

де I — одиничний оператор. Зауважимо, що оскільки границя S може мати кутові точки, то оператор G не завжди є цілком неперервним.

У роботі [1] подається формула для обчислення індекса оператора $I-G$ при обмеженні, що границя S може мати лише скінченну кількість (n) кутових точок. Точки загострення також виключаються. Формула Я. Б. Лопатинського має такий вигляд:

$$\varkappa=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty+\varepsilon_2 i}^{+\infty+\varepsilon_1 i} d_\lambda \arg \Delta_k(\lambda), \tag{B}$$

де

$$\Delta_k(\lambda) = \det[E - U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda) \cdot U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda)],$$

$$U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}} G(a_k, a_k, -\tau_k \sin\omega_k -$$

$$- \nu_k \cos\omega_k, \nu_k, -\zeta_k(t))dt,$$

$$U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}} G(a_k, a_k, \nu_k, -\tau_k \sin\omega_k -$$

$$- \nu_k \cos\omega_k, \zeta_k(-t))\, dt,$$

$$\zeta_k(t) = \frac{\left(e^{-\frac{t}{2}} \cos\omega_k - e^{\frac{t}{2}}\right)\tau_k - e^{-\frac{t}{2}} \sin\omega_k \cdot \nu_k}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}},$$

$$\lambda = \xi + i\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right), \; 0 < \varepsilon < 1, \; \varepsilon_1 = \operatorname{Im}\lambda = \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

a_k — кутова точка з номером k, ω_k — внутрішній кут при вершині a_k, τ_k, ν_k — одиничні вектори дотичної і нормалі відповідно до дуги S_k в точці a_k. (Тут мається на увазі, що границя поділена кутовими точками на n частин $S_1, S_2, \ldots, S_n$, пронумерованих згідно з нумерацією самих кутових точок $a_1, a_2, \ldots, a_n$).

Ми покажемо, що формула (B) має місце й у нашому випадку, який допускає наявність безмежної кількості кутових точок. Інакше кажучи, ми покажемо, що в наших умовах у формулі (B) можна переходити до границі при $n \to \infty$.

Наше доведення буде спиратися на три твердження.

Розглянемо спочатку ізольовані кутові точки a_k; заключимо кожну із них у деякий окіл σ_k — дужку границі S. Інтегральний оператор, що відповідає цій дужці, позначимо через G_k:

$$G_k u(x) = \int_{\sigma_k} \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y) d_y S, \; x \in \sigma_k.$$

Оператор G_k діє у функціональному просторі $L_\varepsilon(\sigma_k)$ з нормою

$$\|u(x)\| = \sum_{i=1}^{p} \int_{\sigma_k} r^{-\varepsilon}(x) |u_i(x)|\, d_x S,$$

де $0 < \varepsilon < 1$, $r(x) = |x - a_k|$.

Твердження 1. Для будь-якого малого числа $\rho > 0$ можна вибрати такі числа $\gamma > 0$ і $\delta > 0$, що $\|G_k\| < \rho$, якщо тільки $l_k \leqslant \gamma$ і $|\pi - \omega_k| \leqslant \delta$, де l_k — половина довжини дуги σ_k з центром у точці a_k. Тут і в дальшому мається на увазі, що кутові точки пронумеровані згідно з спаданням величини $|\pi - \omega_k|$.

Доведення проводиться на оцінці постійної, що входить у нерівність

$$\|G_k u(x)\| \leqslant K\, \|u(x)\|. \qquad (*)$$

У нашому випадку на цю постійну припадає інтеграл

$$I_k(y) = \int\limits_{\sigma_k} \frac{r^{\varepsilon}(y) r^{-\varepsilon}(x)}{|x-y|} \left| G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)\right| d_x S, \ y \in \sigma_k.$$

Проектуючи дугу σ_k на ліву і праву дотичні в точці a_k, переходячи до локальної системи координат (τ_k, ν_k) з центром у точці a_k, а також використовуючи оцінку (A), ми одержимо, що

$$I_k(y) \leqslant \frac{2C}{\alpha\varepsilon(1-\varepsilon)} \left[5 \varepsilon a l_k^{\alpha} + \alpha \operatorname{tg} \frac{|\pi - \omega_k|}{2}\right], \tag{2}$$

де C — взята з оцінки (A), a і α — постійні Ляпунова, $0 < \varepsilon < 1$.

Звідси й випливає, що можна знайти таку кутову точку a_k і заключити її в такий окіл σ_k, що норма оператора G_k може стати як завгодно малою.

Розглянемо тепер усю границю S, де кутові точки можуть входити і не ізольованим чином.

Множину всіх кутових точок кривої S позначимо через M. Тоді, за нашим допущенням, $\operatorname{mes} \overline{M} = 0$. Покриємо кожну кутову точку a_k кривої S деяким криволінійним інтервалом σ_k — куском кривої S так, щоб ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ був збіжний. Для конкретності будемо вважати, що всі σ_k відкриті множини, $\sigma = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ також відкрита множина, яка покриває всю множину $\overline{M}$. Оскільки $\overline{M}$ — замкнена, то $\sigma \setminus \overline{M}$ — відкрита. Отже, вона може бути представлена у вигляді об'єднання не більше як зчисленної кількості відкритих криволінійних інтервалів, що не перетинаються:

$$\sigma \setminus \overline{M} = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \ldots$$

Довжину інтервала Δ_k позначимо через l_k. Очевидно, оскільки $\dot{M}$ — зчисленна множина, то можна вибрати таке її покриття σ, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k$ не тільки збігається, але й його сума може бути зроблена як завгодно малою.

Розглянемо тепер оператор G_σ:

$$G_\sigma u(x) = \int\limits_{\sigma} \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y) d_y S, \ x \in \sigma.$$

Очевидно, можна записати:

$$G_\sigma u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_k} \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y) d_y S, \ x \in \sigma.$$

Мається на увазі, що оператор G_σ діє в просторі $L_\varepsilon(\sigma)$ з нормою:

$$\|u(x)\| = \sum_{l=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{p}\int_{\Delta_l} r^{-\varepsilon}(x)\,|u_i(x)|\,d_xS\right],$$

де $r(x)$ — віддаль точки x до найближчої кутової точки.

Зауважимо, що нумерація інтервалів Δ_k узгоджена з нумерацією кутових точок a_k.

Згідно з відомою теоремою [4], індекс оператора $I - G$ рівний індексу оператора $I - G_\sigma$.

Покажемо, що індекс останнього можна числити, враховуючи лише скінченну кількість кутових точок. А саме:

Твердження 2. Для будь-якого малого числа $\rho > 0$ можна підібрати такий номер N, що норма оператора

$$G_\sigma^N u(x) = \sum_{k=N}^{\infty}\int_{\Delta_k}\frac{1}{|x-y|}\,G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)\,d_yS$$

стане меншою, ніж ρ.

Справедливість цього твердження знову випливає з нерівності(*). У даному випадку на долю константи K припадає залишок ряду

$$I_N(y) = \sum_{k=N}^{\infty}\int_{\Delta_k}\frac{r^{\varepsilon}(y)\,r^{-\varepsilon}(x)}{|x-y|}\left|G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)\right|d_xS.$$

Очевидно, для кожного інтеграла можна скористатися оцінкою (2). Тоді ми одержимо:

$$I_N(y) \leqslant \frac{2C}{\alpha\varepsilon(1-\varepsilon)}\left\{5\,\varepsilon\,a\sum_{k=N}^{\infty} l_k^{\alpha} + \alpha\sum_{k=N}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{|\pi-\omega_k|}{2}\right\}.$$

Число N будемо вважати настільки великим, що

$$\operatorname{tg}\frac{|\pi-\omega_k|}{2} \leqslant \frac{|\pi-\omega_k|}{2\varepsilon}, \text{ при } k \geqslant N.$$

Тоді

$$I_N(y) \leqslant \frac{2C}{\alpha\varepsilon(1-\varepsilon)}\left\{5\,\varepsilon\,a\sum_{k=N}^{\infty} l_k^{\alpha} + \frac{\alpha}{2\varepsilon}\sum_{k=N}^{\infty}|\pi-\omega_k|\right\}. \tag{3}$$

Очевидно, можна вибрати таке покриття множини $\overline{M}$, що залишок ряду $\sum\limits_{k=N}^{\infty} l_k^{\alpha}$ може бути зроблений як завгодно малим, починаючи з деякого N.

Оскільки S — крива з обмеженим обертанням, то підбором N величина $\sum\limits_{k=N}^{\infty}|\pi-\omega_k|$ також може бути зроблена як завгодно малою. Звідси випливає, що за рахунок N норма оператора G_σ^N може бути зроблена як завгодно малою.

Все це означає, що кутові точки a_k, для яких величина $|\pi - \omega_k|$ досить мала, не впливають на індекс рівняння (1). Це дає можливість відкинути їх і обчислювати індекс лише по скінченній кількості кутових точок, для яких величина $|\pi - \omega_k|$ обмежена знизу.

Покажемо, що індекс рівняння (1) у випадку кривої з обмеженим обертанням можна обчислювати по формулі (B).

Твердження 3. Знайдеться такий номер N, що

$$\int_{-\infty+\varepsilon_1 i}^{+\infty+\varepsilon_1 i} d_\lambda \arg \Delta_k(\lambda) = 0, \text{ якщо } k \geqslant N.$$

Враховуючи, що $\Delta_k(\lambda)$ також залежить і від кута ω_k, ми запишемо:

$$\Delta_k(\lambda, \omega_k) = \det\left[E - U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda, \omega_k) \cdot U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda, \omega_k)\right].$$

Переходячи до локальної системи координат (τ_k, ν_k) (див. [1]) і враховуючи оцінку (A), ми одержимо таку оцінку для елементів $u_{ij}(\lambda, \omega_k)$ матриць $U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda, \omega_k)$, $U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda, \omega_k)$:

$$|u_{ij}(\lambda, \omega_k)| \leqslant \frac{2\pi C}{\sin \varepsilon\pi} \sin \frac{|\pi - \omega_k|}{2}$$

і таку оцінку для елементів $w_{ij}(\lambda, \omega_k)$ матриці-добутку $U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda, \omega_k) \times$ $\times U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda, \omega_k)$

$$|w_{ij}(\lambda, \omega_k)| \leqslant \frac{4\pi^2 C^2 p}{\sin^2 \varepsilon\pi} \sin^2 \frac{|\pi - \omega_k|}{2}, \tag{4}$$

де C — постійна з умови (A), $0 < \varepsilon < 1$.

Число ε вибрано так, щоб на прямій $\operatorname{Im} \lambda = \frac{1}{2} - \varepsilon$ ні один з визначників $\Delta_k(\lambda)$ не перетворювався в нуль, p — порядок матриці. Очевидно, можна записати

$$\Delta_k(\lambda, \omega_k) = 1 - \varphi(\lambda, \omega_k),$$

де $\varphi(\lambda, \omega_k)$ — функція, що одержується після розкриття вказаного визначника.

Використовуючи нерівність Адамара, а також (4), неважко одержати таку оцінку

$$|\varphi(\lambda, \omega_k)| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i \left[\frac{4\pi^2 C^2 p^{3/2}}{\sin^2 \varepsilon\pi} \cdot \sin^2 \frac{\pi - \omega_k}{2}\right]^{p-i}. \tag{5}$$

Вибравши таке N, щоб при $k \geqslant N$

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_p^i \left[\frac{4\pi^2 C^2 p^{3/2}}{\sin^2 \varepsilon\pi} \cdot \sin^2 \frac{\pi - \omega_k}{2}\right]^{p-i} < 1, \tag{6}$$

ми переконаємось у справедливості твердження 3.

Висновок. Індекс рівняння (1) можна обчислювати по формулі (B), враховуючи лише ті кутові точки, для яких не виконується умова (6), а їх — скінченна кількість.

Примітка: В даній статті ми не наводимо повного доказу того, що наш оператор — Ф-оператор. Ми це робимо окремо в іншій статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Об одном типе сингулярных интегральных уравнений. Теор. і прикл. мат. Вид. Львівськ. ун-ту, № 2, 1963.
2. И. Радон. О краевых задачах для логарифмического потенциала, УМН I, вып. 3—4, 1946.
3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН XII, вып. 2, 1957.
4. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН XIII, вып. 2, 1958.

Е. М. ПАРАСЮК

Резюме

ОБ ОДНОМ ТИПЕ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуются системы интегральных уравнений, к которым приводятся граничные задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях, ограниченных кривыми, допускающих наличие бесконечного количества угловых точек.

В работе приводится формула для вычисления индекса указанного типа задач.