МЕХАНІКА

С. П. ГАВЕЛЯ, В. М. КОСАРЧИН

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПОЛОГОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ОБМЕЖЕНОЇ ЕЛІПСОМ І ПРЯМОКУТНИКОМ

Використання обгрунтованого в [1] методу розв'язування задач типу Дирихле для системи рівнянь Ляме дозволяє побудувати розв'язки задач про шарнірне і жорстке закріплення прямокутної в плані пологої сферичної оболонки. За допомогою цих результатів нижче будуються алгоритми знаходження розв'язків аналогічних задач для випадку еліптичного контура. При цьому використовуються певні потенціали, які дозволяють зберегти виконання граничних умов і на прямокутнику. В результаті одержуються розв'язки задач для областей, обмежених еліпсом і прямокутником, зокрема: прямокутник з еліптичним вирізом, еліптичний сектор. Слід відмітити, що заміна еліпса іншими аналітичними кривими не викликає принципіальних труднощів.

I. ПРОГИН ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТОЇ ПО КРИВОЛІНІЙНОМУ КОНТУРУ

Спочатку побудуємо в зручному для дальшого вигляді розв'язок задачі:

$$\Delta\Delta\, w(x) = F(x) \text{ при } x \in \Omega, \tag{1}$$

$$w(x) = \Delta\, w(x) = 0 \text{ при } x \in S. \tag{2}$$

Тут $x = (x_1, x_2)$ — точка двовимірної області Ω з контуром S, рівняння якого

$$x = x(t)\,(x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Шукана функція $w = w(x)$ може бути інтерпретована як прогин деякої пластинки під дією заданого нормального навантаження $F(x)$.

Нехай

$$\Delta\, w = v \tag{3}$$

в Ω, так що

$$\Delta\, v = F \tag{4}$$

в Ω і, крім цього,

$$w|_S = 0 \tag{5}$$

$$v|_S = 0. \tag{6}$$

Розв'язок $v_0 = v_0(x)$ задачі (4), (6) для прямокутної області $-\alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_1$, $-\alpha_2 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2$ запишемо у вигляді

$$v_0 = -\sum_{l,m=1,2,3,\ldots} \frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2 F_{lm}}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right), \tag{7}$$

якщо

$$F = \sum_{l,m} F_{lm} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right). \tag{7''}$$

Розв'язок $v = v(x)$ задачі (4), (6) представляється у вигляді:

$$v(x) = v_0(x) - \int_0^{2\pi} g_0(x, \xi(t))\mu(t)dt, \tag{8}$$

де $g_0 = g_0(x, \xi)$ — функція Гріна

$$g_0 = -\sum_{lm} \frac{4\alpha_1\alpha_2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2}{\alpha_2}+1\right)\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+\right.$$

$$\left.+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right). \tag{9}$$

При цьому має місце також розклад

$$\mu(t) = \sum_{n=0,1,2,\ldots}^{\infty} (\mu_{1n}\cos nt + \mu_{2n}\sin nt). \tag{10}$$

Невідомі коефіцієнти μ_{1n} і μ_{2n} можуть бути, взагалі кажучи, визначені з умови (6), яка набирає вигляду рівняння:

$$-v_0(x(t)) = -\int_0^{2\pi} g_0(x(t), \xi(\tau))\mu(\tau)d\tau. \tag{11}$$

Нехай

$$P_{lmn} = \int_0^{2\pi} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1(t)}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2(t)}{\alpha_2}+1\right)\cos nt\, dt,$$

$$Q_{lmn} = \int_0^{2\pi} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1(t)}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2(t)}{\alpha_2}+1\right)\sin nt\, dt.$$

Тоді

$$\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1(t)}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2(t)}{\alpha_2}+1\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0,1,2,\ldots}(P_{lmn}\cos nt + Q_{lmn}\sin nt).$$

З (11) отримаємо:

$$\sum_{l,m}\frac{4\alpha_1\alpha_2 F_{lm}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\sum_n (P_{lmn}\cos nt + Q_{lmn}\sin nt) =$$

$$= \sum_{\substack{l,m;\\ k=0,1,2,\ldots}} \frac{4}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\sum_n (P_{lmn}\cos nt + Q_{lmn}\sin nt)(\mu_{1k}P_{lmk} + \mu_{2k}Q_{lmk}).$$

Звідси одержуємо систему рівнянь для визначення μ_{1k}, μ_{2k}:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l,m,k}\frac{P_{lmn}P_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{1k}+\sum_{l,m,k}\frac{P_{lmn}Q_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{2k}=\sum_{l,m}\frac{\alpha_1\alpha_2P_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm}\\
&\sum_{l,m,k}\frac{Q_{lmn}P_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{1k}+\sum_{l,m,k}\frac{Q_{lmn}Q_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{2k}=\sum_{l,m}\frac{\alpha_1\alpha_2Q_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm}.
\end{aligned}\tag{12}$$

Розв'язок цієї системи запишемо у вигляді

$$\mu_{1k}=\sum_n R_{1kn}q_n;\quad \mu_{2k}=\sum_n R_{2kn}q_n.\tag{13}$$

Тут R_{1kn} і R_{2kn} — елементи оберненої матриці системи (12), q_n — стовпчик

$$q_n=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{l,m}\frac{\alpha_1\alpha_2P_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm}\\ \displaystyle\sum_{lm}\frac{\alpha_1\alpha_2Q_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm}\end{pmatrix}.\tag{14}$$

Тоді розв'язок $v=v(x)$ набере форми

$$v(x)=\sum_{l,m}\left\{-\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2F_{lm}}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}+\frac{4\alpha_1\alpha_2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}\sum_n\left[P_{lmn}\sum_k R_{1nk}q_k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+Q_{lmn}\sum_k R_{2nk}q_k\right]\right\}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right).\tag{15}$$

Позначаючи далі

$$\sum_n P_{lmn}R_{1nk}=M_{1lmk};\quad \sum_n Q_{lmn}R_{2nk}=M_{2lmk},\tag{16}$$

$$\sum_k(M_{1lmk}q_k+M_{2lmk}q_k)=\sum_k(M_{1lmk}+M_{2lmk})q_k=F^*_{lm},\tag{17}$$

або

$$F^*_{lm}=\sum_{kn}N_{lmkn}F_{kn},\tag{18}$$

$$N_{lmkn}=\frac{\alpha_1\alpha_2}{k^2\alpha_2^2+n^2\alpha_1^2}\sum_{r=1,2,3}(M_{1lmr}P_{knr}+M_{2lmr}Q_{knr}),\tag{19}$$

одержимо $v(x)$ у вигляді

$$v(x)=\sum_{l,m}\left(\frac{F^*_{lm}}{\alpha_1\alpha_2}-F_{lm}\right)\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right)\tag{20}$$

або

$$v(x)=\sum_{l,m}v_{lm}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right),\tag{21}$$

де

$$v_{lm}=\left(\frac{F^{*}_{lm}}{\alpha_1\alpha_2}-F_{lm}\right)\frac{4\,\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}. \tag{21''}$$

Позначимо далі

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{l,m}\dfrac{\alpha_1\alpha_2 P_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}v_{lm} \\ \sum\limits_{lm}\dfrac{\alpha_1\alpha_2 Q_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}v_{lm}\end{pmatrix}=q_n^{*}. \tag{22}$$

і

$$\sum_k(M_{1lmk}\overset{*}{q}_k+M_{2lmk}\overset{*}{q}_k)=F^{**}_{lm}. \tag{23}$$

Тоді буде

$$w(x)=\sum_{l,m}w_{lm}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right), \tag{24}$$

де

$$w_{lm}=\left(\frac{F^{**}_{lm}}{\alpha_1\alpha_2}-v_{lm}\right)\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}. \tag{25}$$

Формули (15), (18), (22″), (23), (24) і (26) складають алгоритм, який визначає коефіцієнти w_{lm} шуканого прогину по довільно заданому нормальному навантаженню.

Підстановка (18) в (22″), а потім в (24) і (26) приводить до виразу

$$G(x,\xi)=\sum_{k,l,m,n}G_{klmn}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right)\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1}{\alpha_1}+\right.$$

$$\left.+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2}{\alpha_2}+1\right). \tag{26}$$

Цей вираз (26) являє собою розв'язок задачі про прогин $G(x,\xi)$ пластинки під дією сили, зосередженої в точці ξ.

Примітка. Густина $\mu(t)=\mu^*(t)\sqrt{\dot{x}_1^2(t)+\dot{x}_2^2(t)}$ потенціалу (11) може бути знайдена також і з інтегрального рівняння другого роду

$$\mu^*(t)=2\varphi(t)-\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\xi}(g_0(x(t),\xi(\tau)))\mu^*(\tau)d\tau$$

(n — нормаль, зовнішня до еліпса (тобто внутрішня до області))

$$\varphi(t)=\frac{\partial v_0(x(t))}{\partial n_x}.$$

2. ШАРНІРНЕ ЗАКРІПЛЕННЯ ОБОЛОНКИ

Систему рівнянь, які описують пружну рівновагу тонкої пологої сферичної оболонки, запишемо у вигляді

$$(1-\varkappa)\Delta u+2\varkappa\,\partial\partial' u=-\frac{4\varkappa}{R}\partial w \tag{1.2}$$

$$\Delta\Delta\, w + \frac{12}{h^2}\cdot\frac{1+\sigma}{R}\,\partial' u = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\,F, \tag{2.2}$$

де

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\ \partial = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix},\ \partial' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\right),\ \varkappa = \frac{1+\sigma}{3-\sigma}.$$

Умови закріплення контура S будуть:

$$u|_S = 0, \tag{3.2}$$

$$w|_S = \Delta\, w|_S = 0. \tag{4.2}$$

Нехай

$$u = \sum_{l,m} u_{lm} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{a_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{a_2}+1\right), \tag{5.2}$$

$$\cos\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{a_1}+1\right) = \sum_i \gamma_{li}(\alpha_1)\sin\frac{i\pi}{2}\left(\frac{x_1}{a_1}+1\right), \tag{6.2}$$

$$\cos\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{a_2}+1\right) = \sum_j \gamma_{mj}(\alpha_2)\sin\frac{j\pi}{2}\left(\frac{x_2}{a_2}+1\right), \tag{7.2}$$

$$\sum_l \frac{l\pi}{2a_1} u_{1lm}\gamma_{li}(\alpha_1) = \overset{*}{u}_{1im};\quad \sum_m \frac{m\pi}{2a_2} u_{2lm}\gamma_{mj}(\alpha_2) = \overset{*}{u}_{2jl}.$$

Тоді

$$\partial' u = \sum_{lm}(\overset{*}{u}_{lm} + \overset{*}{u}_{2lm})\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{a_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{a_2}+1\right).$$

Нехай далі

$$\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}F - \frac{12}{h^2}\,\frac{1+\sigma}{R}\,\partial' u = \overline{F};$$

$$\overline{F}_{lm} = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}F_{lm} - \frac{12}{h^2}\frac{1+\sigma}{R}(\overset{*}{u}_{1lm} + \overset{*}{u}_{2lm}), \tag{8.2}$$

$$\overline{q}_{1k} = \sum_{ij}\overline{F}_{ij}\,\frac{P_{ijk}\,4a_1^2a_2^2}{\pi^2(i^2a_2^2+j^2a_1^2)};\ \overline{q}_{2k} = \sum_{ij}\overline{F}_{ij}\,\frac{Q_{ijk}\,4a_1^2a_2^2}{\pi^2(i^2a_2^2+j^2a_1^2)};$$

$$\overset{*}{\overline{F}}_{lm} = \sum_k (M_{1lmk}\overline{q}_{1k} + M_{2lmk}\overline{q}_{2k}) \tag{9.2}$$

(P_{ijk}, Q_{ijk}, M_{1lmk}, M_{2lmk} — визначені вище).

Враховуючи викладене в попередньому пункті, одержимо

$$w_{lm} = \left(\frac{\overset{**}{\overline{F}}_{lm}}{a_1a_2} - v_{lm}\right)\frac{4a_1^2a_2^2}{\pi^2(l^2a_2^2+m^2a_1^2)} \tag{10.2}$$

$$v_{lm} = \left(\frac{\overset{*}{\overline{F}}_{lm}}{a_1a_2} - \overline{F}_{lm}\right)\frac{4a_1^2a_2^2}{\pi^2(l^2a_2^2+m^2a_1^2)}. \tag{11.2}$$

Як показано в [1], при заданому w, розв'язок $u = u(x)$ задачі (1.2), (3.2) представляється у вигляді

$$u = \sum_{q=0}^{\infty} \varkappa^q u_q,$$

причому коефіцієнти u_{1q}, u_{2q} визначаються задачами

$$\Delta u_q = \Delta u_{q-1} - 2\partial\partial' u_{q-1} - \frac{4}{R}\partial w_{q-1} \tag{12.2}$$

$$u_q|_S = 0, \tag{13.2}$$

де

$$w = \sum_{q=0}^{\infty} \varkappa^q w_q.$$

Задачі (12.2), (13.2) запишемо так

$$\Delta u_{1q} = \Phi_{1q-1} \tag{14.2}$$

$$\Delta u_{2q} = \Phi_{2q-1}. \tag{15.2}$$

І якщо

$$\Phi_{i,q-1} = \sum_{lm} \Phi_{iq-1;\,lm} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right), \tag{16.2}$$

то

$$\Phi_{1,q-1;\,lm} = \left(\frac{l^2\pi^2}{4\alpha_1^2} - \frac{m^2\pi^2}{4\alpha_2^2}\right) u_{1q-1;\,lm} - 2\sum_{ij}\frac{ij\pi^2}{4\alpha_1\alpha_2}\gamma_{il}(\alpha_1)\gamma_{jm}(\alpha_2)\,u_{2q-1ij} -$$

$$-\frac{4}{R}\sum_{i}\frac{i\pi}{2\alpha_1}\gamma_{il}(\alpha_1) w_{q-1,\,im}; \tag{17.2}$$

$$\Phi_{2q-1;\,lm} = \left(\frac{m^2\pi^2}{4\alpha_2^2} - \frac{l^2\pi^2}{4\alpha_1^2}\right) u_{2q-1;\,lm} - 2\sum_{ij}\frac{ij\pi^2}{4\alpha_1\alpha_2}\gamma_{il}(\alpha_1)\gamma_{jm}(\alpha_2)\,u_{1q-1ij} -$$

$$-\frac{4}{R}\sum_{i}\frac{i\pi}{2\alpha_2}\gamma_{im}(\alpha_2) w_{q-1,li}.$$

Згідно з формулою (23) одержуємо

$$u_{i,q;\,l,m} = \left(\frac{\Phi^*_{iq-1,\,l,m}}{\alpha_1\alpha_2} - \Phi_{i,q-1,\,l,m}\right)\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2 + m^2\alpha_1^2)}, \tag{18.2}$$

де

$$\Phi^*_{i,q-1,l,m} = \sum_{kn} N_{lmkn}\Phi_{i,q-1;kn}. \tag{19.2}$$

До цих рекурентних співвідношень слід приєднати також (10.2) і (11.2) або

$$w_{q;\,lm} = \sum_{kn} G_{knlm}\overline{F}_{qkn}, \tag{20.2}$$

де

$$G_{knlm}=\sum_{lj} B_{ijlm} B_{knij};\ B_{knlm}=\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}\left(\frac{N_{lmkn}}{\alpha_1\alpha_2}-\begin{bmatrix}kn\\lm\end{bmatrix}\right). \quad (21.2)$$

Рекурентні формули (12.2) — (20.2) становлять алгоритм послідовних наближень.

В [1] доведена збіжність рядів $u=\sum_q \varkappa^q u_q$ при $\varkappa<1$ $\left(\text{якщо } \frac{1}{R}=0\right)$.

Оскільки в нашому випадку $\varkappa=\frac{1+\sigma}{3-\sigma}\ll 1$, то збіжність застосованого методу буде зберігатись при умові достатньої пологості оболонки $\left(\text{тобто достатньої малості величини } \frac{1}{R}\right)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Об одном методе решения второй основной задачи теории упругости. «Теоретическая и прикладная математика», в. I, 1958.

С. П. ГАВЕЛЯ, В. Н. КОСАРЧИН

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПСОМ И ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ

Резюме

В статье построен алгоритм нахождения перемещений в пологой сферической оболочке, ограниченной эллипсом и прямоугольником, находящейся под действием равномерно распределенной по поверхности нормальной нагрузки.

Предварительно решена в удобном для дальнейшего виде аналогичная задача для пластинки.

Перемещения u, v и w получаются в результате решения рекуррентных задач типа Дирихле для уравнения Лапласа. Решения представляются двойными тригонометрическими рядами.

Е. І. ЛУНЬ

ДО ТЕОРІЇ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК*

1. В статті наводяться основні співвідношення пружних оболонок при умові [10, 8], що прямолінійний, нормальний до середньої поверхні, елемент оболонки до деформації зберігає свою довжину, залишаючись прямолінійним, але не нормальним до середньої поверхні після деформації, і що нормальним напруженням σ_{zz} можна нехтувати в порівнянні з іншими компонентами тензора напруження. При цьому маємо три незалежні компоненти пружного зміщення середньої поверхні u, v, w і дві незалежні компоненти кута повороту нормалі до середньої поверхні γ_3 і γ_4, де γ_3 — кут повороту нормалі в сторону вектора $\vec{\tau}_\alpha$, γ_4 — кут повороту нормалі в сторону вектора $\vec{\tau}_\beta$. Векторизований кут повороту пружного середовища має вигляд:

$$\omega = \omega_\alpha \vec{\tau}_\alpha + \omega_\beta \vec{\tau}_\beta + \omega_n \cdot \vec{n},$$

де

$$\omega_\alpha = \frac{\gamma_2 - \gamma_4}{2}, \quad \omega_\beta = \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{2}, \quad \omega_n = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2};$$

γ_1 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\alpha$ в сторону вектора $\vec{n}$,
γ_2 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\beta$ в сторону вектора $\vec{n}$,
ω_1 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\alpha$ в сторону $\vec{\tau}_\beta$,
ω_2 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\beta$ в сторону $\vec{\tau}_\alpha$.

Компоненти зміщення на еквідистантній поверхні мають вигляд:

$$u^* = u + z\gamma_3, \quad v^* = v + z\gamma_4, \quad w^* = w, \tag{1.1}$$

а компоненти деформації на еквідистантній поверхні так виражаються через компоненти деформації середньої поверхні:

$$e^z_{\alpha\alpha} = \frac{e_{\alpha\alpha} + z\varkappa_1}{1 + \frac{z}{R_1}}, \quad e^z_{\beta\beta} = \frac{e_{\beta\beta} + z\varkappa_2}{1 + \frac{z}{R_2}},$$

$$e^*_{\alpha n} = \frac{e_{\alpha n}}{1 + \frac{z}{R_1}}, \quad e^*_{\beta n} = \frac{e_{\beta n}}{1 + \frac{z}{R_2}}, \tag{1.2}$$

* Науковий керівник — проф. М. П. Шереметьєв.

$$e^*_{\alpha\beta}=\frac{e_{\alpha\beta}+z\left[\frac{\omega_1}{R_2}+\frac{\omega_2}{R_1}+\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\tau_1+\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\tau_2\right]}{\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}.$$

Зв'язок між компонентами деформації середньої поверхні і компонентами її зміщення та кутами повороту має вигляд:

$$\begin{aligned}
&e_{\alpha\alpha}=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{v}{AB}+\frac{w}{R_1},\quad e_{\beta\beta}=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{u}{AB}+\frac{w}{R_2},\\
&e_{\alpha\beta}=\omega_1+\omega_2=\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)+\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right),\\
&e_{\alpha n}=\gamma_3+\gamma_1=\gamma_3+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{u}{R_1},\\
&e_{\beta n}=\gamma_4+\gamma_2=\gamma_4+\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{v}{R_2},\\
&\varkappa_1=\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_3}{\partial\alpha}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\gamma_4}{AB},\quad \varkappa_2=\frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_4}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\gamma_3}{AB},\\
&\tau_1=\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_4}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\gamma_3}{AB},\quad \tau_2=\frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_3}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\gamma_4}{AB}.
\end{aligned}\tag{1.3}$$

Введемо нові компоненти деформації

$$\tau_1^*=\tau_1+\frac{\omega_2}{R_1},\qquad \tau_2^*=\tau_2+\frac{\omega_1}{R_2},\tag{1.4}$$

тоді

$$e^*_{\alpha\beta}=\frac{\left(1-\frac{z^2}{R_1R_2}\right)e_{\alpha\beta}+z\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\tau_1^*+z\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\tau_2^*}{\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}\tag{1.5}$$

і одержуємо, що компоненти деформації $e^*_{\alpha\alpha}$, $e^*_{\beta\beta}$, $e^*_{\alpha\beta}$, $e^*_{\alpha n}$, $e^*_{\beta n}$ в довільній точці оболонки виражаються через компоненти деформації середньої поверхні оболонки $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ_1^* і τ_2^*.

Зв'язок між компонентами деформації середньої поверхні оболонки при прийнятій умові виражається такими чотирма рівняннями нерозривності деформації:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A\tau_1^*}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau_2^*+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varkappa_1-\frac{\partial B\varkappa_2}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial Be_{\beta\beta}}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{\alpha\alpha}-\frac{\partial Ae_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{\alpha\beta}-\frac{AB}{R_2}e_{\alpha n}\right)=0,\\
&\frac{\partial B\tau_2^*}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\tau_1^*+\frac{\partial A}{\partial\beta}\varkappa_2-\frac{\partial A\varkappa_1}{\partial\beta}+\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial Ae_{\alpha\alpha}}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{\beta\beta}-\frac{\partial Be_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{\alpha\beta}-\frac{AB}{R_1}e_{\beta n}\right)=0,
\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\frac{\varkappa_1}{R_2}+\frac{\varkappa_2}{R_1}+\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Be_{\beta\beta}}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{\alpha\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{\alpha\beta}-\frac{A}{2}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-\frac{AB}{R_2}e_{\alpha n}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{B}\left(\frac{\partial Ae_{\alpha\alpha}}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{\beta\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{\alpha\beta}-\frac{B}{2}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-\frac{AB}{R_1}e_{\beta n}\right)\right]\right\}=0,$$
$$\tau_2^*-\tau_1^*+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial Be_{\beta n}}{\partial\alpha}-\frac{\partial Ae_{\alpha n}}{\partial\beta}\right)=0.$$

Якщо в (1. 6) покласти $e_{\alpha n}=e_{\beta n}=0$, то одержимо рівняння нерозривності деформації, які відповідають гіпотезі Кірхгофа—Лява.

Виходячи з шостого рівняння рівноваги
$$S_1-S_2+\frac{H_1}{R_1}-\frac{H_2}{R_2}=0,$$
введемо нову величину
$$S_{\alpha\beta}=S_1-\frac{H_2}{R_2}=S_2-\frac{H_1}{R_1}, \tag{1.7}$$
тоді для зусиль S_1 і S_2 матимемо
$$S_1=S_{\alpha\beta}+\frac{H_2}{R_2},\ S_2=S_{\alpha\beta}+\frac{H_1}{R_1}, \tag{1.8}$$
і шосте рівняння рівноваги перетворюється в тотожність незалежно від виразів для $S_{\alpha\beta}$, H_1 і H_2.

П'ять диференціальних рівнянь рівноваги для компонентів T_1, T_2, $S_{\alpha\beta}$, N_1, N_2, G_1, G_2, H_1 і H_2 набирають вигляду:
$$\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\left(S_{\alpha\beta}+\frac{H_1}{R_1}\right)\right]+\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(S_{\alpha\beta}+\frac{H_2}{R_2}\right)+\frac{AB}{R_1}N_1+ABX=0,$$
$$\frac{\partial AT_2}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[B\left(S_{\alpha\beta}+\frac{H_2}{R_2}\right)\right]+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(S_{\alpha\beta}+\frac{H_1}{R_1}\right)+\frac{AB}{R_2}N_2+ABY=0,$$
$$\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial AN_2}{\partial\beta}-AB\left(\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}\right)+ABZ=0,$$
$$\frac{\partial BH_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}H_2+\frac{\partial AG_2}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}G_1-ABN_2-ABE=0, \tag{1.9}$$
$$\frac{\partial AH_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}H_1+\frac{\partial BG_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}G_2-ABN_1+ABF=0.$$

Варіація пружного потенціалу оболонки представляється у вигляді:
$$\delta W=T_1\delta e_{\alpha\alpha}+T_2\delta e_{\beta\beta}+S_{\alpha\beta}\delta e_{\alpha\beta}+N_1\delta e_{\alpha n}+N_2\delta e_{\beta n}+$$
$$+G_1\delta\varkappa_1+G_2\delta\varkappa_2+H_1\delta\tau_1^*+H_2\delta\tau_2^*, \tag{1.10}$$
звідки одержуємо формули, аналогічні формулам Гріна теорії пружності для написання співвідношень пружності для оболонки:
$$T_1=\frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\alpha}},\ T_2=\frac{\partial W}{\partial e_{\beta\beta}},\ S_{\alpha\beta}=\frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\beta}},\ N_1=\frac{\partial W}{\partial e_{\alpha n}},\ H_2=\frac{\partial W}{\partial e_{\beta n}},$$
$$G_1=\frac{\partial W}{\partial\varkappa_1},\ G_2=\frac{\partial W}{\partial\varkappa_2},\ H_1=\frac{\partial W}{\partial\tau_1^*},\ H_2=\frac{\partial W}{\partial\tau_2^*}. \tag{1.11}$$

Вираз пружного потенціалу для ізотропної пружної оболонки при прийнятих нами умовах і позначеннях має вигляд:

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_{-h}^{h}\Big[\frac{E}{1-\nu^2}(e^{*2}_{\alpha\alpha}+e^{*2}_{\beta\beta})+\frac{2E\nu}{1-\nu^2}e^{*}_{\alpha\alpha}e^{*}_{\beta\beta}+$$

$$+\frac{E}{2(1+\nu)}(e^{*2}_{\alpha\beta}+e^{*2}_{\alpha n}+e^{*2}_{\beta n})\Big]\Big(1+\frac{z}{R_1}\Big)\Big(1+\frac{z}{R_2}\Big)dz. \qquad (1.12)$$

Підставивши в (1.12) вирази $e^*_{\alpha\alpha}$, $e^*_{\beta\beta}$, $e^*_{\alpha n}$ і $e^*_{\beta n}$ із (1.2) і $e^*_{\alpha\beta}$ із (1.5), проінтегрувавши по z і відкидаючи в розкладах одержаних при цьому логарифмів члени порядку $\frac{h^2}{R^2}$ і вищого в порівнянні з одиницею, одержимо:

$$W=\frac{Eh}{1-\nu^2}\Big[e^2_{\alpha\alpha}+e^2_{\beta\beta}+\frac{h^2}{3}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)+\frac{2h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)(e_{\alpha\alpha}\varkappa_1-e_{\beta\beta}\varkappa_2)\Big]+$$

$$+\frac{2E\nu h}{1-\nu^2}\Big(e_{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}+\frac{h^2}{3}\varkappa_1\varkappa_2\Big)+\frac{Eh}{2(1+\nu)}\Big\{e^2_{\alpha\beta}+e^2_{\alpha n}+e^2_{\beta n}+ \qquad (1.13)$$

$$+\frac{h^2}{3}\Big[(\tau_1^*+\tau_2^*)^2+\Big(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\Big)e^2_{\alpha\beta}-\frac{2}{R_1}e_{\alpha\beta}\tau_1^*-\frac{2}{R_2}e_{\alpha\beta}\tau_2^*\Big]\Big\}.$$

Співвідношення пружності, які одержуються з (1. 13) за формулами (1. 11), мають вигляд

$$\begin{aligned}
T_1&=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\Big[e_{\alpha\alpha}+\nu e_{\beta\beta}+\frac{h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)\varkappa_1\Big],\\
T_2&=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\Big[e_{\beta\beta}+\nu e_{\alpha\alpha}-\frac{h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)\varkappa_2\Big],\\
S_{\alpha\beta}&=\frac{Eh}{1+\nu}\Big\{\Big[1+\frac{h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\Big)\Big]e_{\alpha\beta}-\frac{h^2}{3}\Big(\frac{\tau_1^*}{R_1}+\frac{\tau_2^*}{R_2}\Big)\Big\},\\
N_1&=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha n},\quad N_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\beta n},\\
G_1&=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Big[\varkappa_1+\nu\varkappa_2+\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)e_{\alpha\alpha}\Big],\\
G_2&=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Big[\varkappa_2+\nu\varkappa_1-\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)e_{\beta\beta}\Big],\\
H_1&=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\Big(\tau_1^*+\tau_2^*-\frac{e_{\alpha\beta}}{R_1}\Big),\\
H_2&=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\Big(\tau_1^*+\tau_2^*-\frac{e_{\alpha\beta}}{R_2}\Big).
\end{aligned} \qquad (1.14)$$

Співвідношення пружності (1. 14) не є остаточними. Їх вигляд залежить від форми оболонки і від виду її завантаження. Вигляд співвідношень пружності в кожному окремому випадку може бути встановлений експериментально або іншими способами дослідження. Найбільш прості співвідношення пружності, запропоновані В. В. Новожиловим і Л. І. Балабухом, з доданими до них співвідношеннями для N_1 і N_2 мають вигляд:

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(e_{\alpha\alpha}+\nu e_{\beta\beta}),\quad T_2=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(e_{\beta\beta}+\nu e_{\alpha\alpha}),$$

$$
\begin{aligned}
&S_{\alpha\beta}=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha\beta},\quad N_1=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha n},\quad N_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\beta n},\\
&G_1=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_1+\nu\varkappa_2),\quad G_2=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_2+\nu\varkappa_1),\\
&H_1=H_2=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}(\tau_1^*+\tau_2^*).
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Підставивши вирази зусиль і моментів з співвідношень пружності в рівняння рівноваги (1. 9) і замінивши компоненти деформації через u, v, w, γ_3 і γ_4 згідно з (1. 3) і (1. 4), одержимо п'ять рівнянь рівноваги оболонки в компонентах u, v, w, γ_3 і γ_4. Якщо, наприклад, співвідношення пружності взяти у вигляді (1. 15), то вказані рівняння будуть такі:

$$
\begin{aligned}
&\Big\{AB\Delta-\nu\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{AB}{R_1}-\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2\right]-\frac{1+\nu}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2+\frac{AB}{R_1^2}\right]\Big\}u+\left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{3-\nu}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)\right]v+\\
&+\left[\left(\frac{\nu}{R_2}+\frac{3-\nu}{2R_1}\right)B\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_2}\right)-\frac{1}{R_1}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right]w+\frac{1-\nu}{2}\frac{AB}{R_1}\gamma_3+X^*=0,\\
&\Big\{AB\Delta+\nu\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{AB}{R_2}-\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2\right]-\frac{1+\nu}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{AB}{R_2^2}\right]\Big\}v+\left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)+\right.\\
&\left.-\frac{3-\nu}{2}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\right]u+\\
&+\left[\left(\frac{\nu}{R_1}+\frac{3-\nu}{2R_2}\right)A\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_1}\right)-\frac{1}{R_2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right]w+\frac{1-\nu}{2}\frac{AB}{R_2}\gamma_4+Y^*=0,\qquad(1.16)\\
&\left[\frac{1-\nu}{2}AB\Delta-\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\nu}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)AB\right]w-\left[\left(\frac{\nu}{R_2}+\frac{3-\nu}{2R_1}\right)B\frac{\partial}{\partial\alpha}+\right.\\
&\left.+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_1}\right)+\left(\frac{\nu}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right]u-\left[\left(\frac{\nu}{R_1}+\frac{3-\nu}{2R_2}\right)A\frac{\partial}{\partial\beta}+\right.\\
&\left.+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_2}\right)+\left(\frac{\nu}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)\frac{\partial A}{\partial\beta}\right]v+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial B\gamma_3}{\partial\alpha}+\frac{\partial A\gamma_4}{\partial\beta}\right)+Z^*=0,\\
&\Big\{AB\Delta-\nu\frac{AB}{R_1R_2}-\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2\right]-\frac{1+\nu}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)-\right.\\
&\left.-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{3(1-\nu)}{h^2(1+\nu)}AB\right]\Big\}\gamma_4+\left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{3-\nu}{2}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\right]\gamma_3-\\
&-\frac{3(1-\nu)}{2h^2}\left(A\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{AB}{R_2}v\right)+E^*=0.
\end{aligned}
$$

$$\Big\{AB\Delta-\nu\frac{AB}{R_1R_2}-\frac{1}{AB}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big)^2+\Big(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Big)^2\Big]-\frac{1+\nu}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)+\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big)-$$

$$-\frac{1}{AB}\Big(\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big)^2+\frac{3(1-\nu)}{h^2(1+\nu)}AB\Big\}\gamma_3+\Big[\frac{1+\nu}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Big)+$$

$$+\frac{3-\nu}{2}\Big(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)-\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Big)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big)\Big]\gamma_4-$$

$$-\frac{3(1-\nu)}{2h^2}\Big(B\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{AB}{R_1}u\Big)+F^*=0,$$

де $\Delta=\frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big)+\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)\Big]$ — оператор Лапласа в криволінійних координатах,

$$X^*=\frac{(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h}X,$$

$$Y^*=\frac{(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h}Y,\quad Z^*=\frac{(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h}Z,$$

$$E^*=-\frac{3(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h^3}E,\ F^*=\frac{3(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h^3}F.$$

Замінивши в рівняннях нерозривності (1. 5) компоненти деформації через зусилля і моменти, користуючись співвідношеннями пружності і перетворивши одержані рівності за допомогою рівнянь рівноваги (1. 9), одержимо рівняння нерозривності деформації в зусиллях і моментах. Якщо, наприклад, в співвідношеннях пружності (1. 14) у виразах для T_1 і T_2 відкинути $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$, то одержані при цьому відповідні рівняння нерозривності деформації в зусиллях і моментах матимуть вигляд:

$$2(1+\nu)\Big\{\frac{\partial AH_1}{\partial\beta}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial BG_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}G_2\Big)+\frac{h^2}{6R_1}\Big[A\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{AH_1}{R_1}\Big)+$$

$$+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{H_2}{R_2}-\Big(\frac{2}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)ABN_1\Big]+A\Bigg[\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{S_{\alpha\beta}}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}}+\frac{3}{h^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{H_2-H_1}{\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{R_1\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)^2}\Big(\frac{H_1}{R_2}-\frac{H_2}{R_1}\Big)\Bigg]\Bigg\}-B\frac{\partial(G_1+G_2)}{\partial\alpha}+\frac{h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_1}\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha}-$$

$$-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{T_1}{R_2}+\frac{B}{R_1}\frac{\partial T_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{BT_2}{R_2}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{BT_2}{R_1}\Big)+\frac{(1+\nu)h^2}{6R_1}ABX=0,$$

$$2(1+\nu)\Big\{\frac{\partial BH_2}{\partial\alpha}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial AG_2}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}G_1\Big)+\frac{h^2}{6R_2}\Big[B\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{BH_2}{R_2}\Big)+$$

$$+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{H_1}{R_1}+\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{2}{R_1}\Big)ABN_2\Big]-B\Bigg[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{S_{\alpha\beta}}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}}+\frac{3}{h_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_2-H_1}{\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)^2}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{R_2\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)^2}\left(\frac{H_2}{R_1}-\frac{H_1}{R_2}\right)\Bigg]\Bigg\}-A\frac{\partial(G_1+G_2)}{\partial\beta}+\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial AT_2}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{T_2}{R_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{A}{R_2}\frac{\partial T_1}{\partial\beta}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{AT_1}{R_1}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{AT_1}{R_2}\right)+\frac{(1+\nu)h^2}{6R_2}ABY=0, \tag{1.17}$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(G_1+G_2)-\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{T_1}{R_2}-\frac{T_2}{R_1}\right)-(1+\nu)\left(\frac{G_1}{R_1}+\frac{G_2}{R_2}\right)+$$

$$+\frac{(1+\nu)h^2}{3AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{AH_1}{R_1}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{H_2}{R_2}-AB\left(\frac{2}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)N_1+\frac{B}{1+\nu}\frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial\alpha}\right]+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{B}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{BH_2}{R_2}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{H_1}{R_1}-AB\left(\frac{2}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)N_2+\frac{A}{1+\nu}\frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial\beta}\right]+$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha}(BX)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AY)\right\}=0,$$

$$\frac{6}{h^2}\frac{H_1-H_2}{\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)^2}-\frac{2S_{\alpha\beta}}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}}+\frac{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)^2}\left(\frac{H_2}{R_1}-\frac{H_1}{R_2}\right)+$$

$$+\frac{h^2}{3AB}\left(\frac{\partial BN_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial AN_1}{\partial\beta}\right)=0.$$

Рівняння для циліндричної оболонки одержуються з наведених, якщо в них покласти $R_2=R$, $R_1\to\infty$.

2. Сферична оболонка. Співвідношення сферичної оболонки одержуємо, покладаючи $R_1=R_2=R$, де R — радіус кривини середньої поверхні оболонки.

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$B\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(T_1-T_2)+A\frac{\partial S}{\partial\beta}+2\frac{\partial A}{\partial\beta}S+\frac{AB}{R}N_1+ABX=0, \tag{2.1}$$

$$A\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}(T_2-T_1)+B\frac{\partial S}{\partial\alpha}+2\frac{\partial B}{\partial\alpha}S+\frac{AB}{R}N_2+ABY=0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial AN_2}{\partial\beta}-\frac{AB}{R}T-ABZ=0, \tag{2.3}$$

$$B\frac{\partial H}{\partial\alpha}+2\frac{\partial B}{\partial\alpha}H+A\frac{\partial G_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}(G_2-G_1)-ABN_2-ABE=0, \tag{2.4}$$

$$A\frac{\partial H}{\partial\beta}+2\frac{\partial A}{\partial\beta}H+B\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(G_1-G_2)-ABN_1+ABF=0, \tag{2.5}$$

де

$$S=S_1=S_2,\ H=H_1=H_2,\ T=T_1+T_2,\ G=G_1+G_2.$$

Питома потенціальна енергія сферичної оболонки

$$W_0^{(\text{сф})}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[e_{\alpha\alpha}^2+e_{\beta\beta}^2+\frac{h^2}{3}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)\right]+\frac{2E\nu h}{1-\nu^2}\left(e_{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}+\frac{h^2}{3}\varkappa_1\varkappa_2\right)+$$

$$+\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(e_{\alpha\beta}^2+e_{\alpha n}^2+e_{\beta n}^2+\frac{h^2}{3}\tau^2\right), \tag{2.6}$$

де $\tau=\tau_1+\tau_2$. Із (2. 6), користуючись формулами (1. 11), одержуємо співвідношення пружності сферичної оболонки:

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(e_{\alpha\alpha}+\nu e_{\beta\beta}),\ T_2=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(e_{\beta\beta}+\nu e_{\alpha\alpha}),$$
$$S_1=S_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha\beta},\ N_1=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha n},\ N_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\beta n},$$
$$G_1=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_1+\nu\varkappa_2),\ G_2=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_2+\nu\varkappa_1), \tag{2.7}$$
$$H_1=H_2=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\tau.$$

Рівняння нерозривності деформації в зусиллях і моментах можна представити в такому вигляді:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{1+\nu}{R}N_1+\frac{3R}{h^2}\left[(1+\nu)N_1-\frac{1}{A}\frac{\partial G}{\partial\alpha}\right]+(1+\nu)\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BN_2}{\partial\alpha}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial AN_1}{\partial\beta}\right)\right]+(1+\nu)\left(X-\frac{3R}{h^2}F\right)=0, \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{1+\nu}{R}N_2+\frac{3R}{h^2}\left[(1+\nu)N_2-\frac{1}{B}\frac{\partial G}{\partial\beta}\right]+(1+\nu)\frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial AN_1}{\partial\beta}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial BN_2}{\partial\alpha}\right)\right]+(1+\nu)\left(Y+\frac{3R}{h^2}E\right)=0, \tag{2.9}$$

$$(1-\nu)\frac{3R}{h^2}G+\frac{R^2}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[B\left(\frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{1+\nu}{R}N_1\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\left(\frac{1}{B}\frac{\partial T}{\partial\beta}-\frac{1+\nu}{R}N_2\right)\right]\right\}+\right.$$
$$+\frac{(1+\nu)R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BX)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AY)\right]=0. \tag{2.10}$$

Наведемо ще вирази зусиль і моментів через чотири функції напружень.

$$T_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_2}{AB},\ T_2=\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_1}{AB},$$
$$S_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_1}{AB}+\frac{\varphi_3}{R},\ S_2=-\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_2}{AB}-\frac{\varphi_3}{R},$$
$$N_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta}-\frac{\varphi_2}{R},\ N_2=-\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha}+\frac{\varphi_1}{R},$$
$$G_1=R\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)\right]+\frac{\psi_3}{R}, \tag{2.11}$$
$$G_2=R\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)\right]+\frac{\psi_3}{R},$$
$$H_1=R\left[-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)\right]-\varphi_3,$$
$$H_2=R\left[-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)\right]+\varphi_3.$$

Формулами (2. 11) однорідні рівняння рівноваги перетворюються в тотожності, якими б не були функції φ_1, φ_2, φ_3 і ψ_3. При цьому у випадку сферичної оболонки рівності $S_1=S_2$ і $H_1=H_2$ накладають на функції напружень умову

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A\varphi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial B\varphi_1}{\partial\alpha}\right)+\frac{2\varphi_3}{R}=0. \tag{2.12}$$

Зведемо повну систему однорідних рівнянь сферичної оболонки в зусиллях і моментах до рівняння, спосіб інтегрування якого відомий.

Оскільки однорідні рівняння рівноваги функціями напружень задовольняються, то шукані функції φ_1, φ_2, φ_3 і ψ_3 повинні бути такими, щоб задовольнялись рівняння нерозривності деформації (2. 8), (2. 9), (2. 10) і умова (2.12).

В (2.11) збережемо з чотирьох довільних функцій φ_1, φ_2, φ_3 і ψ_3 три, поклавши $\varphi_3=0$. Тоді формули (2.11) наберуть вигляду:

$$\begin{aligned}
&T_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_2}{AB},\quad T_2=\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_1}{AB},\\
&S_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_1}{AB},\quad S_2=-\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_2}{AB},\\
&N_1=-\frac{\varphi_2}{R},\quad N_2=\frac{\varphi_1}{R},\\
&G_1=\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{\psi_3}{R},\\
&G_2=\frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{\psi_3}{R},\\
&H_1=-\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right),\\
&H_2=-\frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

а умова (2.12) стає такою:

$$\frac{\partial A\varphi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial B\varphi_1}{\partial\alpha}=0. \tag{2.14}$$

Вирази N_1 і N_2 із (2. 13) підставимо в рівняння (2. 8) і (2. 9), звідки, враховуючи (2.14), одержуємо такі вирази для функцій φ_1 і φ_2 через T і G:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1=\frac{R^2h^2}{(1+\nu)(3R^2-h^2)}\left(-\frac{1}{B}\frac{\partial T}{\partial\beta}+\frac{3R}{h^2B}\frac{\partial G}{\partial\beta}\right),\\
&\varphi_2=\frac{R^2h^2}{(1+\nu)(3R^2-h^2)}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{3R}{h^2A}\frac{\partial G}{\partial\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Враховуючи (2. 3), рівняння нерозривності деформації (2. 10) записуємо у вигляді:

$$\frac{R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right)\right]-(1+\nu)T+(1-\nu)\frac{3R}{h^2}G=0,$$

або

$$R^2\Delta T-(1+\nu)T+(1-\nu)\frac{3R}{h^2}G=0. \tag{2.16}$$

Підставивши в (2. 3) замість N_1 і N_2 їх вирази із (2. 13) і враховуючи (2. 15), одержимо друге рівняння для визначення T і G:

$$\frac{3R^3}{h^2}\Delta G - R^2\Delta T - (1+\nu)\left(\frac{3R^2}{h^2}-1\right)T = 0. \tag{2.17}$$

Рівняння (2.17) замінюємо сумою (2.16) і (2.17), що після перемноження на $\frac{h^2}{3R^3}$ дає

$$R\Delta G + \frac{1-\nu}{R}G - (1+\nu)T = 0. \tag{2.18}$$

Отже, для визначення T і G маємо систему двох рівнянь

$$\begin{aligned} &R^2\Delta T - (1+\nu)T + (1-\nu)\frac{3R}{h^2}G = 0,\\ &R\Delta G + \frac{1-\nu}{R}G - (1+\nu)T = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Систему (2.19) можна записати у вигляді одного комплексного рівняння:

$$R^2\Delta U + (1+ik)U = 0, \tag{2.20}$$

де

$$U = (-\nu + ik)\frac{G}{R} + (1+\nu)T,\ k^2 = \left(1+\frac{3R^2}{h^2}\right)(1-\nu^2) - 1. \tag{2.21}$$

Рівняння (2. 20) (отже, і система рівнянь (2. 19)) співпадає з рівнянням А. Л. Гольденвейзера [3]. Спосіб інтегрування цього рівняння дав І. Н. Векуа [4], [5].

Через інтеграли системи (2. 19) T і G виразимо пружні зусилля і моменти так, щоб задовольнялась повна система рівнянь сферичної оболонки. Зусилля і моменти, представлені формулами (2.13), задовольняють однорідні рівняння рівноваги (2. 1) — (2. 5), якими б не були функції φ_1, φ_2 і ψ_3. Рівняння нерозривності деформації (2.8) і (2.9) та умова (2.14) задовольняються, якщо φ_1 і φ_2 визначені по (2.15). Залишається підібрати функцію ψ_3 так, щоб задовольнялось рівняння нерозривності деформації (2.10). Виявляється [3], що (2.10) задовольняється, якщо взяти функцію ψ_3 у вигляді:

$$\psi_3 = \frac{R}{1+\nu}G. \tag{2.22}$$

Тоді одержуємо

$$\begin{aligned} &T_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_2}{AB},\ T_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_1}{AB},\\ &S_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_1}{AB},\ S_2 = -\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_2}{AB},\\ &N_1 = -\frac{\varphi_2}{R},\ N_2 = \frac{\varphi_1}{R}, \qquad (2.23)\\ &G_1 = \frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{R}{(1+\nu)B}\frac{\partial G}{\partial\beta} - \varphi_1\right) + \frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{R}{(1+\nu)A}\frac{\partial G}{\partial\alpha} + \varphi_2\right) + \frac{G}{1+\nu}, \end{aligned}$$

$$G_2 = \frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{R}{(1+\nu)A}\frac{\partial G}{\partial\alpha} + \varphi_2\right) + \frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{R}{(1+\nu)B}\frac{\partial G}{\partial\beta} - \varphi_1\right) + \frac{G}{1+\nu},$$

$$H_1 = -\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{R}{(1+\nu)A}\frac{\partial G}{\partial\alpha} + \varphi_2\right) + \frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{R}{(1+\nu)B}\frac{\partial G}{\partial\beta} - \varphi_1\right),$$

$$H_2 = -\frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{R}{(1+\nu)B}\frac{\partial G}{\partial\beta} - \varphi_1\right) + \frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{R}{(1+\nu)A}\frac{\partial G}{\partial\alpha} + \varphi_2\right).$$

Визначені за цими формулами зусилля і моменти задовольняють однорідні рівняння рівноваги при довільних φ_1, φ_2 і G; перші два рівняння нерозривності задовольняються, якщо φ_1 і φ_2 визначені по (2.15), і третє рівняння нерозривності задовольняється, якщо T і G є інтегралами системи (2. 19) (при цьому також виконується умова (2. 14)). Аналіз напруженого стану сферичної оболонки дається в роботі [3].

Зусилля і моменти, враховані за формулами (2. 23), відрізнятимуться від зусиль і моментів, врахованих за формулами (2. 10), поданих в роботі [3], бо коефіцієнти у формулах (2. 15) відмінні від коефіцієнтів у формулах (2. 1) роботи [3].

Примітка. Якщо не приймати умови, що $\sigma_{zz}=0$, то інший вигляд матимуть тільки деякі постійні коефіцієнти у виразі W формули (1. 12) і у відповідних наступних формулах (див. [8]).

ЛІТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, т. VIII, в. 6, 1944.
4. Векуа И. Н. Интегрирование уравнений сферической оболочки. ПММ, т. IX, в. 5, 1945.
5. Векуа И. Н. Общее представление решений дифференциального уравнения сферических функций. ДАН СССР, т. 49, № 5, 1945.
6. Нигул У. К. Ассимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек. ПММ, т. 26, в. 5, 1962.
7. Даревский В. М. Об соотношениях теории тонких оболочек. ПММ, т. 25, в. 3, 1961.
8. Шереметьєв М. П., Пелех Б. Л. До питання про варіаційні принципи в теорії оболонок. Теоретична і прикладна математика, в. 2. Вид. Львівськ. ун-ту, 1962.
9. Шереметьєв М. П. До питання про функції напружень в оболонках. Питання математики і механіки, в. 9. Вид. Львівськ. ун-ту, 1962.
10. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. Journal of mathematics and physic, vol. 23, p.p. 184—191, 1944.

Э. И. ЛУНЬ

К ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Резюме

В статье приводятся основные уравнения теории упругих оболочек при условии, что прямолинейный, нормальный к срединной поверхности элемент оболочки до деформации сохраняет свою длину, оставаясь прямолинейным, но не нормальным к срединной поверхности после деформации. В случае сферической оболочки полная система однородных уравнений в усилиях и моментах сводится к разрешающему уравнению, способ решения которого известен. Полученные результаты сравниваются с данными А. Л. Гольденвейзера, которые получены им в случае выполнения гипотезы Кирхгофа—Лява. Оказывается, что разрешающие уравнения в обоих случаях одинаковые, но усилия и моменты будут различны вследствие различия коэффициентов в выражениях, определяющих функции напряжения.

Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

Д. Г. ХЛЕБНІКОВ

ДО ПИТАННЯ ПРО ГРАНИЧНІ УМОВИ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПЛАСТИНОК З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ*

М. П. Шереметьєв [1, 2] вперше сформулював у функціях комплексної змінної граничні умови плоскої задачі для пластинки, край якої підкріплено тонким пружним стержнем. У припущенні, що підкріпний стержень працює лише на розтяг, а його згинна жорсткість дорівнює нулю, Г. М. Савіним та Н. П. Флейшманом [3, 4] одержано зм'якшені граничні умови, що зводять задачу безпосередньо до граничної проблеми для комплексних потенціалів Колосова—Мусхелішвілі. На основі цих результатів у даній роботі виводяться граничні умови такого ж типу, проте без обмеження відносно жорсткості стержня на згин. Одержані умови можуть бути використані для розв'язку ряду конкретних задач. Як найпростіший приклад одержано відомий [1, 2] розв'язок задачі про пружну рівновагу нескінченної пластинки з підкріпленим круговим отвором.

§ 1. Розглянемо тонку ізотропну пластинку, що займає в площині $z=x+iy$ область, яка обмежена контуром L. Край пластинки підкріплено тонким пружним криволінійним стержнем змінної жорсткості. Припускається, що стержень спаяно з пластинкою вздовж його осі, тобто стержень розглядається як пружна крива, що працює на розтяг та згин. За додатний напрямок відрахунку дуги s на L вважаємо такий, що залишає область пластинки зліва.

На контурі спаю пластинки і стержня, крім рівності напружень, має місце також умова рівності зміщень:

$$u = u_0, \tag{1.1}$$

де $u = u_n + iu_t$, $u_0 = u_n^0 + iu_t^0$, причому u_n і u_t — проекції вектора зміщення точок края пластинки на зовнішню нормаль та дотичну, u_n^0 і u_t^0 — ті ж самі величини для стержня.

Нехай далі $p_x = p_x(s)$ і $p_y = p_y(s)$ — проекції на осі координат заданого зовнішнього навантаження, прикладеного до стержня, σ_n і τ_n — нормальний та дотичний компоненти напружень в пластинці на контурі спаю, t — афікс точки контура L, $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$, h — товщина пластинки. Тоді нормальна $q=q(s)$ та дотична $n=n(s)$ складові зусиль, що діють на стержень, запишуться

$$q + in = i\bar{\dot{t}}(p_x + ip_y) - h(\sigma_n + i\tau_n). \tag{1.2}$$

* Науковий керівник — проф. М. П. Шереметьєв.

Напружено-деформований стан плоского криволінійного стержня характеризується такими рівностями [2]:

а) рівняння рівноваги:

$$\frac{dN}{ds} = -n \mp \frac{Q}{r}, \quad \frac{dQ}{ds} = -q \pm \frac{N}{r}, \quad \frac{dM}{ds} = Q, \tag{1.3}$$

б) закон Гука:

$$\varepsilon = \frac{N}{G_1} \pm \frac{M}{rG_1}, \quad \frac{d\Theta}{ds} = \frac{M}{G_2} \pm \frac{N}{rG_1} + \frac{M}{r^2G_1}, \tag{1.4}$$

в) співвідношення між деформаціями та переміщеннями:

$$\varepsilon = \frac{du_t^0}{ds} \pm \frac{u_n^0}{r}, \quad \Theta = \pm \frac{u_t^0}{r} - \frac{du_n^0}{ds}. \tag{1.5}$$

Тут N, Q, M — поздовжна і перерізуюча сили та згинаючий момент; ε — відносне видовження осі стержня, Θ — кут повороту, r — радіус кривини, G_1, G_2 — жорсткості на розтяг та згин. У формулах (1.3) — (1.5) і далі верхній (нижній) знак перед $\frac{1}{r}$ відноситься до випадку, коли зовнішня нормаль направлена від (до) центра кривини осі стержня.

Якщо ввести лінійний оператор A ($f = f(s)$ — деяка функція)

$$Af = \left(\pm \frac{1}{r} + i\frac{d}{ds}\right) f = i\dot{t}\frac{d}{ds}(\bar{\dot{t}} f) \tag{1.6}$$

і комплексно-спряжений $\bar{A}$

$$\bar{A}f = \left(\pm \frac{1}{r} - i\frac{d}{ds}\right) f = -i\bar{\dot{t}}\frac{d}{ds}(\dot{t}f), \tag{1.7}$$

то з (1.3) — (1.5) випливає:

$$\begin{gathered} q + in = \bar{A}(N - iQ), \quad N - iQ = G_1\varepsilon - AM \\ \varepsilon + i\Theta = \bar{A}u_0, \quad M = -G_2 Re(A\bar{A}u_0). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Тому

$$q + in = \bar{A}[G_1 Re(\bar{A}u_0)] + \bar{A}A[G_2 Re(A\bar{A}u_0)]. \tag{1.9}$$

Виражаючи тепер напруження $\sigma_n + i\tau_n$ та зміщення $u_n + iu_t$ через комплексні потенціали $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ за відомими формулами [5] та враховуючи (1.1) та (1.2), одержимо з (1.9) після інтегрування по s граничну умову для функцій $\varphi(z)$ та $\psi(z)$:

$$\begin{gathered} \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - iK_1\dot{t}Re\left(\bar{\dot{t}}\frac{d}{ds}[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]\right) + \\ + \dot{t}^2\frac{d}{ds}\left(\bar{\dot{t}}K_2 Re\left[i\dot{t}\frac{d}{ds}\left\{\bar{\dot{t}}^2\frac{d}{ds}[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]\right\}\right]\right) = f_0(t) \text{ на } L, \end{gathered} \tag{1.10}$$

де

$$f_0(t) = \frac{i}{h}\int_0^s (p_x + ip_y)ds + C, \quad K_j = \frac{G_j}{2\mu h} \quad (j = 1, 2), \tag{1.11}$$

$\varkappa$, μ — пружні константи пластинки, C — стала інтегрування.

Зокрема, якщо вважати, що підкріпний стержень працює лише на розтяг, то при $K_2=0$ з (1. 10) випливає зм'якшена гранична умова, що дана в роботах [3, 4].

Гранична умова (1. 10) дозволяє врахувати вплив жорсткості стержня на згин. Шукані функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ можна представити у вигляді:

$$\varphi(z)=\varphi_0(z)+\varphi_1(z)+\varphi_2(z),\ \psi(z)=\psi_0(z)+\psi_1(z)+\psi_2(z), \qquad (1.12)$$

де $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функції, які характеризують напружений стан непідкріпленої пластинки, а $\varphi_c(z)=\varphi_1(z)+\varphi_2(z)$ та $\psi_c(z)=\psi_1(z)+\psi_2(z)$ — голоморфні всюди в області пластинки функції, що характеризують вплив підкріпного стержня, причому функції $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ враховують вплив розтягливості стержня, а $\varphi_2(z)$ та $\psi_2(z)$ — вплив його згинності. Функції $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ можуть бути знайдені методом, викладеним в [4], а для відшукання $\varphi_2(z)$ та $\psi_2(z)$ одержимо після підстановки (1.12) в (1.10) таку граничну умову:

$$(1+\varkappa)\varphi_2(t)-U_2(t,\overline{t})-iK_1\dot{t}Re\left[\dot{\overline{t}}\frac{d}{ds}U_2(t,\overline{t})\right]+$$

$$+\dot{t}^2\frac{d}{ds}\left(\dot{\overline{t}}K_2Re\left[i\dot{t}\frac{d}{ds}\left\{\dot{\overline{t}}^2\frac{d}{ds}U_2(t,\overline{t})\right\}\right]\right)=F(t)\ \text{на}\ L, \qquad (1.13)$$

де позначено

$$F(t)=-\dot{t}^2\frac{d}{ds}\left(\dot{\overline{t}}K_2Re\left[i\dot{t}\frac{d}{ds}\left\{\dot{\overline{t}}^2\frac{d}{ds}\left[U_0(t,\overline{t})+U_1(t,\overline{t})\right]\right\}\right]\right), \qquad (1.14)$$

$$U_k(t,\overline{t})=\varkappa\varphi_k(t)-t\overline{\varphi_k'(t)}-\overline{\psi_k(t)} \quad (k=0,1,2). \qquad (1.15)$$

§ 2. Нехай функція $z=\omega(\zeta)$ відображає на скінченну (або нескінченну) область D, зайняту пластинкою, внутрішність (зовнішність) кола γ радіуса $\rho=1$ в площині $\zeta=\xi+i\eta$, якщо область D є однозв'язною, або кругове кільце у випадку двозв'язної області. В дальших формулах верхній (нижній) знак відповідає випадку, коли область D знаходиться всередині (зовні) контура L.

Позначаючи

$$\varphi_2(z)=\varphi_2[\omega(\zeta)]=\varphi(\zeta),\ \psi_2(z)=\psi_2[\omega(\zeta)]=\psi(\zeta),$$

$$U_2(t,\overline{t})=U(\sigma),\ F(t)=F[\omega(\sigma)]=f(\sigma), \qquad (2.1)$$

де $\sigma=\rho e^{i\vartheta}$ — афікс точки контура γ, та враховуючи, що на γ

$$\dot{t}=\pm\frac{i\sigma}{\rho}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|},\ \frac{d}{ds}=\pm\frac{i\sigma}{\rho|\omega'(\sigma)|}\frac{d}{d\sigma}, \qquad (2.2)$$

запишемо граничну умову (1. 13) в перетвореній області:

$$(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-U(\sigma)\pm K_1\frac{\sigma}{\rho}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}Re\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\pm$$

$$\pm\frac{\sigma^3}{\rho^3}\frac{|\omega'(\sigma)|}{[\omega'(\sigma)]^2}\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}K_2Re\left(\frac{\sigma^2}{\omega'(\sigma)}\frac{d}{d\sigma}\frac{|\omega'(\sigma)|U'(\sigma)}{\sigma[\omega'(\sigma)]^2}\right)\right]=f(\sigma)\ \text{на}\ \gamma, \qquad (2.3)$$

причому

$$U(\sigma)=\varkappa\varphi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}. \qquad (2.4)$$

Наведемо також дещо видозмінений запис граничної умови. Для цього зауважимо, що

$$\pm\frac{1}{r}=-i\dot{\bar{t}}\ddot{t}=-\frac{i}{2}\dot{\bar{t}}^2\frac{d}{ds}\dot{t}^2=\pm\frac{1}{\rho|\omega'(\sigma)|}\pm\frac{\sigma|\omega'(\sigma)|}{2\rho[\omega'(\sigma)]^2}\frac{d}{d\sigma}\frac{\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}},\qquad(2.5)$$

і, отже, з (1.6)

$$Af=\pm\frac{1}{\rho|\omega'(\sigma)|}\left(1+\frac{\sigma\overline{\omega'(\sigma)}}{2\omega'(\sigma)}\frac{d}{d\sigma}\frac{\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}-\sigma\frac{d}{d\sigma}\right)f.\qquad(2.6)$$

Тому, виходячи з (1.13), ґраничну умову на γ можна записати:

$$(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-U(\sigma)\pm\delta_1(\sigma)\sigma\omega'(\sigma)\,Re\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\pm$$

$$\pm\frac{\sigma}{\overline{\omega'(\sigma)}}B\left[\delta_2(\sigma)Re\left(B\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right)\right]=f(\sigma).\qquad(2.7)$$

Тут позначено:

$$Bf=\left(1+\frac{\sigma\overline{\omega'(\sigma)}}{2\omega'(\sigma)}\frac{d}{d\sigma}\frac{\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}-\sigma\frac{d}{d\sigma}\right)f\qquad(2.8)$$

і

$$\delta_1(\sigma)=\frac{K_1}{\rho|\omega'(\sigma)|},\quad\delta_2(\sigma)=\frac{K_2}{\rho^3|\omega'(\sigma)|}.\qquad(2.9)$$

Гранична умова в формі (2.7) може бути ефективно використана, якщо $\omega(\zeta)$ — раціональна функція, наприклад, при розв'язанні плоскої задачі для пластинки з підкріпленим еліптичним отвором. При цьому у випадку сталих жорсткостей G_1 та G_2 розв'язок може бути побудований методом послідовних наближень, розвиненим в роботах [2, 6] при розв'язанні аналогічних задач згину плит.

У випадку, коли контур L в площині z являє собою коло радіуса R,

$$Af=\pm\left(\frac{1}{R}-\frac{\sigma}{\rho|\omega'(\sigma)|}\frac{d}{d\sigma}\right)f\qquad(2.10)$$

і гранична умова на γ при $K_2=\text{const}$ може бути записана так:

$$(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-U(\sigma)\pm\left(K_1+\frac{K_2}{R^2}\right)\frac{\sigma\omega'(\sigma)}{\rho|\omega'(\sigma)|}Re\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\pm$$

$$\pm K_2\frac{\sigma^2}{\rho^2\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{i\sigma}{\rho|\omega'(\sigma)|}\frac{d}{d\sigma}\left(Im\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right)-\frac{1}{R}\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right]=f(\sigma).\qquad(2.11)$$

§ 3. Як приклад розглянемо задачу про пружну рівновагу нескінченної пластинки з підкріпленим круговим отвором радіуса R. В цьому випадку

$$\omega(\zeta)=R\zeta,\ \omega'(\zeta)=R,\ \rho=1,\qquad(3.1)$$

і умова (2.11) буде мати вигляд:

$$(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-U(\sigma)-l_1\sigma\,ReU'(\sigma)-l_2\left\{i\sigma\,Im\left(\sigma\frac{d}{d\sigma}\left[\sigma U''(\sigma)\right]\right)-\sigma^2U''(\sigma)\right\}=$$

$$=f(\sigma)\ \text{на}\ \gamma,\qquad(3.2)$$

де

$$U(\sigma)=\varkappa\varphi(\sigma)-\sigma\overline{\varphi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}\qquad(3.3)$$

та

$$l_1 = \frac{1}{R}\left(K_1 + \frac{K_2}{R^2}\right), \ l_2 = \frac{K_2}{R^3}. \tag{3.4}$$

Нехай

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{-n}, \ \psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n}$$

$$U(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \sigma^n, \ f(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \sigma^n. \tag{3.5}$$

Підставляючи ці розклади в (3.2) та (3.3) та порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ, одержимо:

$$[2 + l_1(n+2) + l_2(n^2-1)(n+2)]\overline{\alpha}_{n+2} + [l_2(n+1)^2 - l_1]n\,\alpha_{-n} =$$
$$= -2\overline{A}_{n+2} \quad (n \geqslant -1),$$
$$[l_2(n+1)^2 - l_1](n+2)\overline{\alpha}_{n+2} + \left[\frac{2}{\varkappa} + nl_1 + l_2 n(n+1)(n+3)\right]\alpha_{-n} =$$
$$= 2A_{-n} \quad (n > 0), \tag{3.6}$$
$$\alpha_1 = -\overline{b}_1, \ \alpha_n = (n-2)\overline{a}_{n-2} - \overline{b}_n \ (n \geqslant 2), \ \alpha_{-n} = \varkappa\, a_n \quad (n > 0).$$

Звідси визначаємо

$$b_1 = \frac{(l_1+2)\overline{A}_1 - l_1 A_1}{2(1+l_1)},$$

$$a_n = \frac{1}{\Delta_n}\{[2 + l_1(n+2) + l_2(n^2-1)(n+2)]A_{-n} + [l_2(n+1)^2 -$$
$$- l_1](n+2)\overline{A}_{n+2}\} \quad (n>0),$$

$$b_{n+2} = \frac{1}{\Delta_n}\{[2 + l_1(n+2-\varkappa) + l_2((n+1)^2\varkappa + (n^2-1)(n+2))]nA_{-n} +$$
$$+ [2 - l_1 n(n+2-\varkappa) + l_2 n(n+1)((n+3)\varkappa + (n+1) \tag{3.7}$$
$$(n+2))]\,\overline{A}_{n+2}\} \quad (n \geqslant 0),$$

де

$$\Delta_n = 2 + l_1(n\varkappa + n + 2) + l_2(n+1)[n(n+3)\varkappa + (n-1)(n+2)] +$$
$$+ 2l_2(l_2 - l_1)\,n(n+1)^2(n+2)\varkappa. \tag{3.8}$$

Якщо, зокрема, пластинка розтягається зусиллями $\sigma_x^{(\infty)} = p$ та $\sigma_y^{(\infty)} = q$, а підкріплений круговий контур є вільним від зовнішнього навантаження, то напружений стан пластинки визначається функціями

$$\varphi^*(\zeta) = \frac{p+q}{4}R\zeta + \varphi(\zeta), \ \psi^*(\zeta) = \frac{q-p}{2}R\zeta + \psi(\zeta), \tag{3.9}$$

а

$$f(\sigma) = \frac{R}{4}\{(l_1 + 8l_2 - 2)(q-p)\sigma^{-1} + [l_1(\varkappa - 1) - 2](p+q)\sigma +$$
$$+ (l_1 - 4l_2)(q-p)\sigma^3\}. \tag{3.10}$$

Тому з (3.5) та (3.7) знаходимо

$$a_1 = \frac{[1+l_1-4l_2-12l_2(l_1-l_2)](p-q)R}{2+l_1(\varkappa+3)+8l_2\varkappa+24l_2(l_1-l_2)\varkappa},$$

$$b_1 = \frac{l_1(\varkappa-1)-2}{1+l_1} \cdot \frac{(p+q)R}{4},$$

$$b_3 = \frac{2+(4l_2-l_1)(\varkappa-1)-24l_2(l_1-l_2)}{2+l_1(\varkappa+3)+8l_2\varkappa+24l_2(l_1-l_2)\varkappa} \cdot \frac{(p-q)R}{2}, \tag{3.11}$$

причому інші коефіцієнти рівні нулю. Це співпадає з результатом М. П. Шереметьева [2], одержаним іншим шляхом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шереметьев М. П. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сборник, т. 14, 1953.
2. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд. Львовск. ун-та, 1960.
3. Флейшман Н. П. Замечания к одной статье М. П. Шереметьева. Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-ту, в. 7, ч. III, 1957.
4. Савін Г. М., Флейшман Н. П. Пластинки, краї яких підкріплені тонкими ребрами. «Прикладна механіка», т. VII, в. 4, 1961.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
6. Шереметьєв М. П., Мартинович Т. Л. Згин нескінченної пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. «Прикладна механіка», т. III, в. 2, 1957.

Д. Г. ХЛЕБНИКОВ

К ВОПРОСУ О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛАСТИНОК С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

Резюме

Плоская задача об упругом равновесии пластинки, криволинейный край которой подкреплен тонким упругим стержнем, обладающим жесткостями на растяжение и на изгиб, приведена к граничной задаче для комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили. Полученные граничные условия (1.10) и в преобразованной области (2.7) могут быть использованы при решении ряда конкретных задач. В качестве примера дано известное решение задачи для бесконечной пластинки с подкрепленным круговым отверстием.