С. П. ГАВЕЛЯ, В. М. КОСАРЧИН

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПОЛОГОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ОБМЕЖЕНОЇ ЕЛІПСОМ І ПРЯМОКУТНИКОМ

Використання обгрунтованого в [1] методу розв'язування задач типу Дирихле для системи рівнянь Ляме дозволяє побудувати розв'язки задач про шарнірне і жорстке закріплення прямокутної в плані пологої сферичної оболонки. За допомогою цих результатів нижче будуються алгоритми знаходження розв'язків аналогічних задач для випадку еліптичного контура. При цьому використовуються певні потенціали, які дозволяють зберегти виконання граничних умов і на прямокутнику. В результаті одержуються розв'язки задач для областей, обмежених еліпсом і прямокутником, зокрема: прямокутник з еліптичним вирізом, еліптичний сектор. Слід відмітити, що заміна еліпса іншими аналітичними кривими не викликає принципіальних труднощів.

I. ПРОГИН ПЛАСТИНКИ, ОПЕРТОЇ ПО КРИВОЛІНІЙНОМУ КОНТУРУ

Спочатку побудуємо в зручному для дальшого вигляді розв'язок задачі:

$$\Delta\Delta w(x) = F(x) \text{ при } x \in \Omega, \tag{1}$$

$$w(x) = \Delta w(x) = 0 \text{ при } x \in S. \tag{2}$$

Тут $x = (x_1, x_2)$ — точка двовимірної області Ω з контуром S, рівняння якого

$$x = x(t)\,(x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Шукана функція $w = w(x)$ може бути інтерпретована як прогин деякої пластинки під дією заданого нормального навантаження $F(x)$.

Нехай

$$\Delta w = v \tag{3}$$

в Ω, так що

$$\Delta v = F \tag{4}$$

в Ω і, крім цього,

$$w|_S = 0 \tag{5}$$

$$v|_S = 0. \tag{6}$$

Розв'язок $v_0 = v_0(x)$ задачі (4), (6) для прямокутної області $-\alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_1$, $-\alpha_2 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2$ запишемо у вигляді

$$v_0 = -\sum_{l,m=1,2,3,\ldots} \frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2 F_{lm}}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right), \tag{7}$$

якщо

$$F = \sum_{l,m} F_{lm} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right). \tag{7''}$$

Розв'язок $v = v(x)$ задачі (4), (6) представляється у вигляді:

$$v(x) = v_0(x) - \int_0^{2\pi} g_0(x, \xi(t))\mu(t)dt, \tag{8}$$

де $g_0 = g_0(x, \xi)$ — функція Гріна

$$g_0 = -\sum_{lm} \frac{4\alpha_1\alpha_2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2}{\alpha_2}+1\right)\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+\right.$$

$$\left.+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right). \tag{9}$$

При цьому має місце також розклад

$$\mu(t) = \sum_{n=0,1,2,\ldots}^{\infty} (\mu_{1n}\cos nt + \mu_{2n}\sin nt). \tag{10}$$

Невідомі коефіцієнти μ_{1n} і μ_{2n} можуть бути, взагалі кажучи, визначені з умови (6), яка набирає вигляду рівняння:

$$-v_0(x(t)) = -\int_0^{2\pi} g_0(x(t), \xi(\tau))\mu(\tau)d\tau. \tag{11}$$

Нехай

$$P_{lmn} = \int_0^{2\pi} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1(t)}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2(t)}{\alpha_2}+1\right)\cos nt\,dt,$$

$$Q_{lmn} = \int_0^{2\pi} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1(t)}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2(t)}{\alpha_2}+1\right)\sin nt\,dt.$$

Тоді

$$\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1(t)}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2(t)}{\alpha_2}+1\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0,1,2,\ldots}(P_{lmn}\cos nt + Q_{lmn}\sin nt).$$

З (11) отримаємо:

$$\sum_{l,m} \frac{4\alpha_1\alpha_2 F_{lm}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\sum_n (P_{lmn}\cos nt + Q_{lmn}\sin nt) =$$

$$= \sum_{\substack{l,m;\\ k=0,1,2,\ldots}} \frac{4}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\sum_n (P_{lmn}\cos nt + Q_{lmn}\sin nt)(\mu_{1k}P_{lmk} + \mu_{2k}Q_{lmk}).$$

Звідси одержуємо систему рівнянь для визначення μ_{1k}, μ_{2k}:

$$\begin{aligned}\sum_{l,m,k}\frac{P_{lmn}P_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{1k}+\sum_{l,m,k}\frac{P_{lmn}Q_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{2k}&=\sum_{l,m}\frac{\alpha_1\alpha_2P_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm}\\ \sum_{l,m,k}\frac{Q_{lmn}P_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{1k}+\sum_{l,m,k}\frac{Q_{lmn}Q_{lmk}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\mu_{2k}&=\sum_{l,m}\frac{\alpha_1\alpha_2Q_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm}.\end{aligned}\tag{12}$$

Розв'язок цієї системи запишемо у вигляді

$$\mu_{1k}=\sum_n R_{1kn}q_n;\quad \mu_{2k}=\sum_n R_{2kn}q_n.\tag{13}$$

Тут R_{1kn} і R_{2kn} — елементи оберненої матриці системи (12), q_n — стовпчик

$$q_n=\begin{pmatrix}\sum\limits_{l,m}\frac{\alpha_1\alpha_2P_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm}\\ \sum\limits_{lm}\frac{\alpha_1\alpha_2Q_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}F_{lm}\end{pmatrix}.\tag{14}$$

Тоді розв'язок $v=v(x)$ набере форми

$$\begin{aligned}v(x)=\sum_{l,m}\Big\{-\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2F_{lm}}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}+\frac{4\alpha_1\alpha_2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}\sum_n\Big[P_{lmn}\sum_k R_{1nk}q_k+\\ +Q_{lmn}\sum_k R_{2nk}q_k\Big]\Big\}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right).\end{aligned}\tag{15}$$

Позначаючи далі

$$\sum_n P_{lmn}R_{1nk}=M_{1lmk};\quad \sum_n Q_{lmn}R_{2nk}=M_{2lmk},\tag{16}$$

$$\sum_k(M_{1lmk}q_k+M_{2lmk}q_k)=\sum_k(M_{1lmk}+M_{2lmk})q_k=F^*_{lm},\tag{17}$$

або

$$F^*_{lm}=\sum_{kn}N_{lmkn}F_{kn},\tag{18}$$

$$N_{lmkn}=\frac{\alpha_1\alpha_2}{k^2\alpha_2^2+n^2\alpha_1^2}\sum_{r=1,2,3}(M_{1lmr}P_{knr}+M_{2lmr}Q_{knr}),\tag{19}$$

одержимо $v(x)$ у вигляді

$$v(x)=\sum_{l,m}\left(\frac{F^*_{lm}}{\alpha_1\alpha_2}-F_{lm}\right)\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right)\tag{20}$$

або

$$v(x)=\sum_{l,m}v_{lm}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right),\tag{21}$$

де

$$v_{lm}=\left(\frac{F^{*}_{lm}}{\alpha_1\alpha_2}-F_{lm}\right)\frac{4\,\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}. \qquad (21'')$$

Позначимо далі

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{l,m}\dfrac{\alpha_1\alpha_2 P_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\,v_{lm}\\ \sum\limits_{lm}\dfrac{\alpha_1\alpha_2 Q_{lmn}}{l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2}\,v_{lm}\end{pmatrix}=q_n^{*}. \qquad (22)$$

і

$$\sum_k(M_{1lmk}\overset{*}{q_k}+M_{2lmk}\overset{*}{q_k})=F^{**}_{lm}. \qquad (23)$$

Тоді буде

$$w(x)=\sum_{l,m}w_{lm}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right), \qquad (24)$$

де

$$w_{lm}=\left(\frac{F^{**}_{lm}}{\alpha_1\alpha_2}-v_{lm}\right)\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}. \qquad (25)$$

Формули (15), (18), (22″), (23), (24) і (26) складають алгоритм, який визначає коефіцієнти w_{lm} шуканого прогину по довільно заданому нормальному навантаженню.

Підстановка (18) в (22″), а потім в (24) і (26) приводить до виразу

$$G(x,\xi)=\sum_{k,l,m,n}G_{klmn}\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right)\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{\xi_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{\xi_2}{\alpha_2}+1\right). \qquad (26)$$

Цей вираз (26) являє собою розв'язок задачі про прогин $G(x,\xi)$ пластинки під дією сили, зосередженої в точці ξ.

Примітка. Густина $\mu(t)=\mu^*(t)\sqrt{\dot{x}_1^2(t)+\dot{x}_2^2(t)}$ потенціалу (11) може бути знайдена також і з інтегрального рівняння другого роду

$$\mu^*(t)=2\varphi(t)-\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\xi}(g_0(x(t),\xi(\tau)))\mu^*(\tau)d\tau$$

(n — нормаль, зовнішня до еліпса (тобто внутрішня до області))

$$\varphi(t)=\frac{\partial v_0(x(t))}{\partial n_x}.$$

2. ШАРНІРНЕ ЗАКРІПЛЕННЯ ОБОЛОНКИ

Систему рівнянь, які описують пружну рівновагу тонкої пологої сферичної оболонки, запишемо у вигляді

$$(1-\varkappa)\Delta u+2\varkappa\,\partial\partial' u=-\frac{4\varkappa}{R}\partial w \qquad (1.2)$$

$$\Delta\Delta\, w + \frac{12}{h^2}\cdot\frac{1+\sigma}{R}\,\partial' u = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\,F, \tag{2.2}$$

де

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\ \partial = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix},\ \partial' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\right),\ \varkappa = \frac{1+\sigma}{3-\sigma}.$$

Умови закріплення контура S будуть:

$$u|_S = 0, \tag{3.2}$$

$$w|_S = \Delta w|_S = 0. \tag{4.2}$$

Нехай

$$u = \sum_{l,m} u_{lm} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{a_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{a_2}+1\right), \tag{5.2}$$

$$\cos\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{a_1}+1\right) = \sum_i \gamma_{li}(a_1)\sin\frac{i\pi}{2}\left(\frac{x_1}{a_1}+1\right), \tag{6.2}$$

$$\cos\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{a_2}+1\right) = \sum_j \gamma_{mj}(a_2)\sin\frac{j\pi}{2}\left(\frac{x_2}{a_2}+1\right), \tag{7.2}$$

$$\sum_l \frac{l\pi}{2a_1} u_{1lm}\gamma_{li}(a_1) = \overset{*}{u}_{1im};\quad \sum_m \frac{m\pi}{2a_2} u_{2lm}\gamma_{mj}(a_2) = \overset{*}{u}_{2jl}.$$

Тоді

$$\partial' u = \sum_{lm}\left(\overset{*}{u}_{lm} + \overset{*}{u}_{2lm}\right)\sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{a_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{a_2}+1\right).$$

Нехай далі

$$\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}F - \frac{12}{h^2}\,\frac{1+\sigma}{R}\,\partial' u = \overline{F};$$

$$\overline{F}_{lm} = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}F_{lm} - \frac{12}{h^2}\,\frac{1+\sigma}{R}\left(\overset{*}{u}_{1lm} + \overset{*}{u}_{2lm}\right), \tag{8.2}$$

$$\overline{q}_{1k} = \sum_{ij}\overline{F}_{ij}\,\frac{P_{ijk}\,4a_1^2 a_2^2}{\pi^2(i^2 a_2^2 + j^2 a_1^2)};\quad \overline{q}_{2k} = \sum_{ij}\overline{F}_{ij}\,\frac{Q_{ijk}\,4a_1^2 a_2^2}{\pi^2(i^2 a_2^2 + j^2 a_1^2)};$$

$$\overset{*}{\overline{F}}_{lm} = \sum_k\left(M_{1lmk}\,\overline{q}_{1k} + M_{2lmk}\,\overline{q}_{2k}\right) \tag{9.2}$$

(P_{ijk}, Q_{ijk}, M_{1lmk}, M_{2lmk} — визначені вище).

Враховуючи викладене в попередньому пункті, одержимо

$$w_{lm} = \left(\frac{\overset{**}{\overline{F}}_{lm}}{a_1 a_2} - v_{lm}\right)\frac{4a_1^2 a_2^2}{\pi^2(l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)} \tag{10.2}$$

$$v_{lm} = \left(\frac{\overset{*}{\overline{F}}_{lm}}{a_1 a_2} - \overline{F}_{lm}\right)\frac{4a_1^2 a_2^2}{\pi^2(l^2 a_2^2 + m^2 a_1^2)}. \tag{11.2}$$

Як показано в [1], при заданому w, розв'язок $u = u(x)$ задачі (1.2), (3.2) представляється у вигляді

$$u = \sum_{q=0}^{\infty} \varkappa^q u_q,$$

причому коефіцієнти u_{1q}, u_{2q} визначаються задачами

$$\Delta u_q = \Delta u_{q-1} - 2\partial\partial' u_{q-1} - \frac{4}{R}\partial w_{q-1} \tag{12.2}$$

$$u_q|_S = 0, \tag{13.2}$$

де

$$w = \sum_{q=0}^{\infty} \varkappa^q w_q.$$

Задачі (12.2), (13.2) запишемо так

$$\Delta u_{1q} = \Phi_{1q-1} \tag{14.2}$$

$$\Delta u_{2q} = \Phi_{2q-1}. \tag{15.2}$$

І якщо

$$\Phi_{i,q-1} = \sum_{lm} \Phi_{iq-1;\, lm} \sin\frac{l\pi}{2}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}+1\right)\sin\frac{m\pi}{2}\left(\frac{x_2}{\alpha_2}+1\right), \tag{16.2}$$

то

$$\Phi_{1,q-1;\, lm} = \left(\frac{l^2\pi^2}{4\alpha_1^2} - \frac{m^2\pi^2}{4\alpha_2^2}\right) u_{1q-1;\, lm} - 2\sum_{ij}\frac{ij\pi^2}{4\alpha_1\alpha_2}\gamma_{il}(\alpha_1)\gamma_{jm}(\alpha_2)\, u_{2q-1ij} -$$

$$-\frac{4}{R}\sum_{i}\frac{i\pi}{2\alpha_1}\gamma_{il}(\alpha_1) w_{q-1,\, im}; \tag{17.2}$$

$$\Phi_{2q-1;\, lm} = \left(\frac{m^2\pi^2}{4\alpha_2^2} - \frac{l^2\pi^2}{4\alpha_1^2}\right) u_{2q-1;\, lm} - 2\sum_{ij}\frac{ij\pi^2}{4\alpha_1\alpha_2}\gamma_{il}(\alpha_1)\gamma_{jm}(\alpha_2)\, u_{1q-1ij} -$$

$$-\frac{4}{R}\sum_{i}\frac{i\pi}{2\alpha_2}\gamma_{im}(\alpha_2) w_{q-1,li}.$$

Згідно з формулою (23) одержуємо

$$u_{i,q;\, l,m} = \left(\frac{\Phi^*_{iq-1,\, l,m}}{\alpha_1\alpha_2} - \Phi_{i,q-1,\, l,m}\right)\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2 + m^2\alpha_1^2)}, \tag{18.2}$$

де

$$\Phi^*_{i,q-1,l,m} = \sum_{kn} N_{lmkn}\Phi_{i,q-1;kn}. \tag{19.2}$$

До цих рекурентних співвідношень слід приєднати також (10.2) і (11.2) або

$$w_{q;\, lm} = \sum_{kn} G_{knlm}\overline{F}_{qkn}, \tag{20.2}$$

де

$$G_{knlm}=\sum_{lj}B_{ijlm}B_{knij};\ B_{knlm}=\frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2+m^2\alpha_1^2)}\left(\frac{N_{lmkn}}{\alpha_1\alpha_2}-\begin{bmatrix}kn\\lm\end{bmatrix}\right). \quad (21.2)$$

Рекурентні формули (12.2) — (20.2) становлять алгоритм послідовних наближень.

В [1] доведена збіжність рядів $u=\sum_q \varkappa^q u_q$ при $\varkappa<1$ $\left(\text{якщо } \frac{1}{R}=0\right)$. Оскільки в нашому випадку $\varkappa=\frac{1+\sigma}{3-\sigma}\ll 1$, то збіжність застосованого методу буде зберігатись при умові достатньої пологості оболонки $\left(\text{тобто достатньої малості величини } \frac{1}{R}\right)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Об одном методе решения второй основной задачи теории упругости. «Теоретическая и прикладная математика», в. I, 1958.

С. П. ГАВЕЛЯ, В. Н. КОСАРЧИН

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПСОМ И ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ

Резюме

В статье построен алгоритм нахождения перемещений в пологой сферической оболочке, ограниченной эллипсом и прямоугольником, находящейся под действием равномерно распределенной по поверхности нормальной нагрузки.

Предварительно решена в удобном для дальнейшего виде аналогичная задача для пластинки.

Перемещения u, v и w получаются в результате решения рекуррентных задач типа Дирихле для уравнения Лапласа. Решения представляются двойными тригонометрическими рядами.