Збірник робіт аспірантів
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

Е. І. ЛУНЬ

ДО ТЕОРІЇ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК*

1. В статті наводяться основні співвідношення пружних оболонок при умові [10, 8], що прямолінійний, нормальний до середньої поверхні, елемент оболонки до деформації зберігає свою довжину, залишаючись прямолінійним, але не нормальним до середньої поверхні після деформації, і що нормальним напруженням σ_{zz} можна нехтувати в порівнянні з іншими компонентами тензора напруження. При цьому маємо три незалежні компоненти пружного зміщення середньої поверхні u, v, w і дві незалежні компоненти кута повороту нормалі до середньої поверхні γ_3 і γ_4, де γ_3 — кут повороту нормалі в сторону вектора $\vec{\tau}_\alpha$, γ_4 — кут повороту нормалі в сторону вектора $\vec{\tau}_\beta$. Векторизований кут повороту пружного середовища має вигляд:

$$\omega = \omega_\alpha \vec{\tau}_\alpha + \omega_\beta \vec{\tau}_\beta + \omega_n \cdot \vec{n},$$

де

$$\omega_\alpha = \frac{\gamma_2 - \gamma_4}{2}, \quad \omega_\beta = \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{2}, \quad \omega_n = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2};$$

γ_1 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\alpha$ в сторону вектора $\vec{n}$,
γ_2 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\beta$ в сторону вектора $\vec{n}$,
ω_1 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\alpha$ в сторону $\vec{\tau}_\beta$,
ω_2 — кут повороту вектора $\vec{\tau}_\beta$ в сторону $\vec{\tau}_\alpha$.

Компоненти зміщення на еквідистантній поверхні мають вигляд:

$$u^* = u + z\gamma_3, \quad v^* = v + z\gamma_4, \quad w^* = w, \tag{1.1}$$

а компоненти деформації на еквідистантній поверхні так виражаються через компоненти деформації середньої поверхні:

$$e^*_{\alpha\alpha} = \frac{e_{\alpha\alpha} + z\varkappa_1}{1 + \frac{z}{R_1}}, \quad e^*_{\beta\beta} = \frac{e_{\beta\beta} + z\varkappa_2}{1 + \frac{z}{R_2}},$$

$$e^*_{\alpha n} = \frac{e_{\alpha n}}{1 + \frac{z}{R_1}}, \quad e^*_{\beta n} = \frac{e_{\beta n}}{1 + \frac{z}{R_2}}, \tag{1.2}$$

* Науковий керівник — проф. М. П. Шереметьєв.

$$e_{\alpha\beta}^{*}=\frac{e_{\alpha\beta}+z\left[\frac{\omega_1}{R_2}+\frac{\omega_2}{R_1}+\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\tau_1+\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\tau_2\right]}{\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}.$$

Зв'язок між компонентами деформації середньої поверхні і компонентами її зміщення та кутами повороту має вигляд:

$$\begin{aligned}
&e_{\alpha\alpha}=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{v}{AB}+\frac{w}{R_1},\quad e_{\beta\beta}=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{u}{AB}+\frac{w}{R_2},\\
&e_{\alpha\beta}=\omega_1+\omega_2=\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)+\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right),\\
&e_{\alpha n}=\gamma_3+\gamma_1=\gamma_3+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{u}{R_1},\\
&e_{\beta n}=\gamma_4+\gamma_2=\gamma_4+\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{v}{R_2},\\
&\varkappa_1=\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_3}{\partial\alpha}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\gamma_4}{AB},\quad \varkappa_2=\frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_4}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\gamma_3}{AB},\\
&\tau_1=\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_4}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\gamma_3}{AB},\quad \tau_2=\frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_3}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\gamma_4}{AB}.
\end{aligned}\tag{1.3}$$

Введемо нові компоненти деформації

$$\tau_1^{*}=\tau_1+\frac{\omega_2}{R_1},\qquad \tau_2^{*}=\tau_2+\frac{\omega_1}{R_2},\tag{1.4}$$

тоді

$$e_{\alpha\beta}^{*}=\frac{\left(1-\frac{z^2}{R_1R_2}\right)e_{\alpha\beta}+z\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\tau_1^{*}+z\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\tau_2^{*}}{\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}\tag{1.5}$$

і одержуємо, що компоненти деформації $e_{\alpha\alpha}^{*}$, $e_{\beta\beta}^{*}$, $e_{\alpha\beta}^{*}$, $e_{\alpha n}^{*}$, $e_{\beta n}^{*}$ в довільній точці оболонки виражаються через компоненти деформації середньої поверхні оболонки $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ_1^{*} і τ_2^{*}.

Зв'язок між компонентами деформації середньої поверхні оболонки при прийнятій умові виражається такими чотирма рівняннями нерозривності деформації:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A\tau_1^{*}}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau_2^{*}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varkappa_1-\frac{\partial B\varkappa_2}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial Be_{\beta\beta}}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{\alpha\alpha}-\frac{\partial Ae_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{\alpha\beta}-\frac{AB}{R_2}e_{\alpha n}\right)=0,\\
&\frac{\partial B\tau_2^{*}}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\tau_1^{*}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\varkappa_2-\frac{\partial A\varkappa_1}{\partial\beta}+\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial Ae_{\alpha\alpha}}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{\beta\beta}-\frac{\partial Be_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{\alpha\beta}-\frac{AB}{R_1}e_{\beta n}\right)=0,
\end{aligned}\tag{1.6}$$

$$\frac{\varkappa_1}{R_2}+\frac{\varkappa_2}{R_1}+\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Be_{\beta\beta}}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{\alpha\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{\alpha\beta}-\frac{A}{2}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-\frac{AB}{R_2}e_{\alpha n}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{B}\left(\frac{\partial Ae_{\alpha\alpha}}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{\beta\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{\alpha\beta}-\frac{B}{2}\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-\frac{AB}{R_1}e_{\beta n}\right)\right]\right\}=0,$$

$$\tau_2^*-\tau_1^*+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial Be_{\beta n}}{\partial\alpha}-\frac{\partial Ae_{\alpha n}}{\partial\beta}\right)=0.$$

Якщо в (1. 6) покласти $e_{\alpha n}=e_{\beta n}=0$, то одержимо рівняння нерозривності деформації, які відповідають гіпотезі Кірхгофа—Лява.

Виходячи з шостого рівняння рівноваги

$$S_1-S_2+\frac{H_1}{R_1}-\frac{H_2}{R_2}=0,$$

введемо нову величину

$$S_{\alpha\beta}=S_1-\frac{H_2}{R_2}=S_2-\frac{H_1}{R_1}, \tag{1.7}$$

тоді для зусиль S_1 і S_2 матимемо

$$S_1=S_{\alpha\beta}+\frac{H_2}{R_2},\ S_2=S_{\alpha\beta}+\frac{H_1}{R_1}, \tag{1.8}$$

і шосте рівняння рівноваги перетворюється в тотожність незалежно від виразів для $S_{\alpha\beta}$, H_1 і H_2.

П'ять диференціальних рівнянь рівноваги для компонентів T_1, T_2, $S_{\alpha\beta}$, N_1, N_2, G_1, G_2, H_1 і H_2 набирають вигляду:

$$\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\left(S_{\alpha\beta}+\frac{H_1}{R_1}\right)\right]+\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(S_{\alpha\beta}+\frac{H_2}{R_2}\right)+\frac{AB}{R_1}N_1+ABX=0,$$

$$\frac{\partial AT_2}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[B\left(S_{\alpha\beta}+\frac{H_2}{R_2}\right)\right]+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(S_{\alpha\beta}+\frac{H_1}{R_1}\right)+\frac{AB}{R_2}N_2+ABY=0,$$

$$\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial AN_2}{\partial\beta}-AB\left(\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}\right)+ABZ=0,$$

$$\frac{\partial BH_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}H_2+\frac{\partial AG_2}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}G_1-ABN_2-ABE=0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial AH_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}H_1+\frac{\partial BG_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}G_2-ABN_1+ABF=0.$$

Варіація пружного потенціалу оболонки представляється у вигляді:

$$\delta W=T_1\delta e_{\alpha\alpha}+T_2\delta e_{\beta\beta}+S_{\alpha\beta}\delta e_{\alpha\beta}+N_1\delta e_{\alpha n}+N_2\delta e_{\beta n}+$$
$$+G_1\delta\varkappa_1+G_2\delta\varkappa_2+H_1\delta\tau_1^*+H_2\delta\tau_2^*, \tag{1.10}$$

звідки одержуємо формули, аналогічні формулам Гріна теорії пружності для написання співвідношень пружності для оболонки:

$$T_1=\frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\alpha}},\ T_2=\frac{\partial W}{\partial e_{\beta\beta}},\ S_{\alpha\beta}=\frac{\partial W}{\partial e_{\alpha\beta}},\ N_1=\frac{\partial W}{\partial e_{\alpha n}},\ H_2=\frac{\partial W}{\partial e_{\beta n}},$$

$$G_1=\frac{\partial W}{\partial\varkappa_1},\ G_2=\frac{\partial W}{\partial\varkappa_2},\ H_1=\frac{\partial W}{\partial\tau_1^*},\ H_2=\frac{\partial W}{\partial\tau_2^*}. \tag{1.11}$$

Вираз пружного потенціалу для ізотропної пружної оболонки при прийнятих нами умовах і позначеннях має вигляд:

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_{-h}^{h}\Big[\frac{E}{1-\nu^2}(e^{*2}_{\alpha\alpha}+e^{*2}_{\beta\beta})+\frac{2E\nu}{1-\nu^2}e^{*}_{\alpha\alpha}e^{*}_{\beta\beta}+$$

$$+\frac{E}{2(1+\nu)}(e^{*2}_{\alpha\beta}+e^{*2}_{\alpha n}+e^{*2}_{\beta n})\Big]\Big(1+\frac{z}{R_1}\Big)\Big(1+\frac{z}{R_2}\Big)dz. \tag{1.12}$$

Підставивши в (1.12) вирази $e^{*}_{\alpha\alpha}$, $e^{*}_{\beta\beta}$, $e^{*}_{\alpha n}$ і $e^{*}_{\beta n}$ із (1.2) і $e^{*}_{\alpha\beta}$ із (1.5), проінтегрувавши по z і відкидаючи в розкладах одержаних при цьому логарифмів члени порядку $\frac{h^2}{R^2}$ і вищого в порівнянні з одиницею, одержимо:

$$W=\frac{Eh}{1-\nu^2}\Big[e^2_{\alpha\alpha}+e^2_{\beta\beta}+\frac{h^2}{3}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)+\frac{2h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)(e_{\alpha\alpha}\varkappa_1-e_{\beta\beta}\varkappa_2)\Big]+$$

$$+\frac{2E\nu h}{1-\nu^2}\Big(e_{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}+\frac{h^2}{3}\varkappa_1\varkappa_2\Big)+\frac{Eh}{2(1+\nu)}\Big\{e^2_{\alpha\beta}+e^2_{\alpha n}+e^2_{\beta n}+ \tag{1.13}$$

$$+\frac{h^2}{3}\Big[(\tau_1^*+\tau_2^*)^2+\Big(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\Big)e^2_{\alpha\beta}-\frac{2}{R_1}e_{\alpha\beta}\tau_1^*-\frac{2}{R_2}e_{\alpha\beta}\tau_2^*\Big]\Big\}.$$

Співвідношення пружності, які одержуються з (1. 13) за формулами (1. 11), мають вигляд

$$\begin{aligned}
T_1&=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\Big[e_{\alpha\alpha}+\nu e_{\beta\beta}+\frac{h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)\varkappa_1\Big],\\
T_2&=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\Big[e_{\beta\beta}+\nu e_{\alpha\alpha}-\frac{h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)\varkappa_2\Big],\\
S_{\alpha\beta}&=\frac{Eh}{1+\nu}\Big\{\Big[1+\frac{h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\Big)\Big]e_{\alpha\beta}-\frac{h^2}{3}\Big(\frac{\tau_1^*}{R_1}+\frac{\tau_2^*}{R_2}\Big)\Big\},\\
N_1&=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha n},\quad N_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\beta n},\\
G_1&=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Big[\varkappa_1+\nu\varkappa_2+\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)e_{\alpha\alpha}\Big],\\
G_2&=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Big[\varkappa_2+\nu\varkappa_1-\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)e_{\beta\beta}\Big],\\
H_1&=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\Big(\tau_1^*+\tau_2^*-\frac{e_{\alpha\beta}}{R_1}\Big),\\
H_2&=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\Big(\tau_1^*+\tau_2^*-\frac{e_{\alpha\beta}}{R_2}\Big).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Співвідношення пружності (1. 14) не є остаточними. Їх вигляд залежить від форми оболонки і від виду її завантаження. Вигляд співвідношень пружності в кожному окремому випадку може бути встановлений експериментально або іншими способами дослідження. Найбільш прості співвідношення пружності, запропоновані В. В. Новожиловим і Л. І. Балабухом, з доданими до них співвідношеннями для N_1 і N_2 мають вигляд:

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(e_{\alpha\alpha}+\nu e_{\beta\beta}),\quad T_2=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(e_{\beta\beta}+\nu e_{\alpha\alpha}),$$

$$
\begin{gathered}
S_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\alpha\beta}, \quad N_1 = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\alpha n}, \quad N_2 = \frac{Eh}{1+\nu} e_{\beta n}, \\
G_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\varkappa_1 + \nu\varkappa_2), \quad G_2 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (\varkappa_2 + \nu\varkappa_1), \\
H_1 = H_2 = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)} (\tau_1^* + \tau_2^*).
\end{gathered} \tag{1.15}
$$

Підставивши вирази зусиль і моментів з співвідношень пружності в рівняння рівноваги (1. 9) і замінивши компоненти деформації через u, v, w, γ_3 і γ_4 згідно з (1. 3) і (1. 4), одержимо п'ять рівнянь рівноваги оболонки в компонентах u, v, w, γ_3 і γ_4. Якщо, наприклад, співвідношення пружності взяти у вигляді (1. 15), то вказані рівняння будуть такі:

$$
\begin{gathered}
\Big\{ AB\Delta - \nu\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\frac{AB}{R_1} - \frac{1}{AB}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2\right] - \frac{1+\nu}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2 + \frac{AB}{R_1^2}\right]\Big\} u + \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) + \right. \\
\left. + \frac{3-\nu}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\right) - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)\right] v + \\
+ \left[\left(\frac{\nu}{R_2} + \frac{3-\nu}{2R_1}\right) B\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_2}\right) - \frac{1}{R_1}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right] w + \frac{1-\nu}{2}\frac{AB}{R_1}\gamma_3 + X^* = 0, \\
\Big\{ AB\Delta + \nu\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\frac{AB}{R_2} - \frac{1}{AB}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2\right] - \frac{1+\nu}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{AB}{R_2^2}\right]\Big\} v + \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) + \right. \\
\left. - \frac{3-\nu}{2}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\right] u + \\
+ \left[\left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{3-\nu}{2R_2}\right) A\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_1}\right) - \frac{1}{R_2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right] w + \frac{1-\nu}{2}\frac{AB}{R_2}\gamma_4 + Y^* = 0, \\
\left[\frac{1-\nu}{2} AB\Delta - \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) AB\right] w - \left[\left(\frac{\nu}{R_2} + \frac{3-\nu}{2R_1}\right) B\frac{\partial}{\partial\alpha} + \right. \\
\left. + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_1}\right) + \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right] u - \left[\left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{3-\nu}{2R_2}\right) A\frac{\partial}{\partial\beta} + \right. \\
\left. + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_2}\right) + \left(\frac{\nu}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)\frac{\partial A}{\partial\beta}\right] v + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial B\gamma_3}{\partial\alpha} + \frac{\partial A\gamma_4}{\partial\beta}\right) + Z^* = 0, \\
\Big\{ AB\Delta - \nu\frac{AB}{R_1R_2} - \frac{1}{AB}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2\right] - \frac{1+\nu}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) - \right. \\
\left. - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{3(1-\nu)}{h^2(1+\nu)} AB\right]\Big\} \gamma_4 + \left[\frac{1+\nu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) + \right. \\
\left. + \frac{3-\nu}{2}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\right] \gamma_3 - \\
- \frac{3(1-\nu)}{2h^2}\left(A\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{AB}{R_2} v\right) + E^* = 0.
\end{gathered} \tag{1.16}
$$

$$\Big\{AB\Delta - \nu\frac{AB}{R_1R_2} - \frac{1}{AB}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Big)^2\Big] - \frac{1+\nu}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big) + \frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big) -$$

$$-\frac{1}{AB}\Big(\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big)^2 + \frac{3(1-\nu)}{h^2(1+\nu)}AB\Big\}\gamma_3 + \Big[\frac{1+\nu}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Big) +$$

$$+\frac{3-\nu}{2}\Big(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big) - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Big) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big)\Big]\gamma_4 -$$

$$-\frac{3(1-\nu)}{2h^2}\Big(B\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{AB}{R_1}u\Big) + F^* = 0,$$

де $\Delta = \frac{1}{AB}\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big) + \frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)\Big]$ — оператор Лапласа в криволінійних координатах,

$$X^* = \frac{(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h}X,$$

$$Y^* = \frac{(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h}Y,\quad Z^* = \frac{(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h}Z,$$

$$E^* = -\frac{3(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h^3}E,\ F^* = \frac{3(1-\nu)(1+2\nu)AB}{2E(1+\nu)h^3}F.$$

Замінивши в рівняннях нерозривності (1. 5) компоненти деформації через зусилля і моменти, користуючись співвідношеннями пружності і перетворивши одержані рівності за допомогою рівнянь рівноваги (1. 9), одержимо рівняння нерозривності деформації в зусиллях і моментах. Якщо, наприклад, в співвідношеннях пружності (1. 14) у виразах для T_1 і T_2 відкинути $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$, то одержані при цьому відповідні рівняння нерозривності деформації в зусиллях і моментах матимуть вигляд:

$$2(1+\nu)\Big\{\frac{\partial AH_1}{\partial\beta} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial BG_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}G_2\Big) + \frac{h^2}{6R_1}\Big[A\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\frac{AH_1}{R_1}\Big) +$$

$$+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{H_2}{R_2} - \Big(\frac{2}{R_2} - \frac{1}{R_1}\Big)ABN_1\Big] + A\Big[\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{S_{\alpha\beta}}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}} + \frac{3}{h^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{H_2-H_1}{\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)^2} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{R_1\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)^2}\Big(\frac{H_1}{R_2} - \frac{H_2}{R_1}\Big)\Big]\Big\} - B\frac{\partial(G_1+G_2)}{\partial\alpha} + \frac{h^2}{3}\Big(\frac{1}{R_1}\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha} -$$

$$-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{T_1}{R_2} + \frac{B}{R_1}\frac{\partial T_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{BT_2}{R_2} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{BT_2}{R_1}\Big) + \frac{(1+\nu)h^2}{6R_1}ABX = 0,$$

$$2(1+\nu)\Big\{\frac{\partial BH_2}{\partial\alpha} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial AG_2}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}G_1\Big) + \frac{h^2}{6R_2}\Big[B\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\frac{BH_2}{R_2}\Big) +$$

$$+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{H_1}{R_1} + \Big(\frac{1}{R_2} - \frac{2}{R_1}\Big)ABN_2\Big] - B\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{S_{\alpha\beta}}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}} + \frac{3}{h_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_2-H_1}{\Big(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\Big)^2} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{R_2\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)^2}\left(\frac{H_2}{R_1}-\frac{H_1}{R_2}\right)\Bigg]\Bigg\}-A\frac{\partial(G_1+G_2)}{\partial\beta}+\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial AT_2}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{T_2}{R_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{A}{R_2}\frac{\partial T_1}{\partial\beta}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{AT_1}{R_1}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{AT_1}{R_2}\right)+\frac{(1+\nu)h^2}{6R_2}ABY=0, \tag{1.17}$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(G_1+G_2)-\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{T_1}{R_2}-\frac{T_2}{R_1}\right)-(1+\nu)\left(\frac{G_1}{R_1}+\frac{G_2}{R_2}\right)+$$

$$+\frac{(1+\nu)h^2}{3AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{AH_1}{R_1}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{H_2}{R_2}-AB\left(\frac{2}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)N_1+\frac{B}{1+\nu}\frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial\alpha}\right]+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{B}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{BH_2}{R_2}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{H_1}{R_1}-AB\left(\frac{2}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)N_2+\frac{A}{1+\nu}\frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial\beta}\right]+$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha}(BX)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AY)\right\}=0,$$

$$\frac{6}{h^2}\frac{H_1-H_2}{\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)^2}-\frac{2S_{\alpha\beta}}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}}+\frac{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}{\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)^2}\left(\frac{H_2}{R_1}-\frac{H_1}{R_2}\right)+$$

$$+\frac{h^2}{3AB}\left(\frac{\partial BN_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial AN_1}{\partial\beta}\right)=0.$$

Рівняння для циліндричної оболонки одержуються з наведених, якщо в них покласти $R_2=R$, $R_1\to\infty$.

2. Сферична оболонка. Співвідношення сферичної оболонки одержуємо, покладаючи $R_1=R_2=R$, де R — радіус кривини середньої поверхні оболонки.

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$B\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(T_1-T_2)+A\frac{\partial S}{\partial\beta}+2\frac{\partial A}{\partial\beta}S+\frac{AB}{R}N_1+ABX=0, \tag{2.1}$$

$$A\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}(T_2-T_1)+B\frac{\partial S}{\partial\alpha}+2\frac{\partial B}{\partial\alpha}S+\frac{AB}{R}N_2+ABY=0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial AN_2}{\partial\beta}-\frac{AB}{R}T-ABZ=0, \tag{2.3}$$

$$B\frac{\partial H}{\partial\alpha}+2\frac{\partial B}{\partial\alpha}H+A\frac{\partial G_2}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}(G_2-G_1)-ABN_2-ABE=0, \tag{2.4}$$

$$A\frac{\partial H}{\partial\beta}+2\frac{\partial A}{\partial\beta}H+B\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(G_1-G_2)-ABN_1+ABF=0, \tag{2.5}$$

де

$$S=S_1=S_2,\ H=H_1=H_2,\ T=T_1+T_2,\ G=G_1+G_2.$$

Питома потенціальна енергія сферичної оболонки

$$W_0^{(\text{сф})}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[e_{\alpha\alpha}^2+e_{\beta\beta}^2+\frac{h^2}{3}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)\right]+\frac{2E\nu h}{1-\nu^2}\left(e_{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}+\frac{h^2}{3}\varkappa_1\varkappa_2\right)+$$

$$+\frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(e_{\alpha\beta}^2+e_{\alpha n}^2+e_{\beta n}^2+\frac{h^2}{3}\tau^2\right), \tag{2.6}$$

де $\tau=\tau_1+\tau_2$. Із (2. 6), користуючись формулами (1. 11), одержуємо співвідношення пружності сферичної оболонки:

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(e_{\alpha\alpha}+\nu e_{\beta\beta}),\ T_2=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(e_{\beta\beta}+\nu e_{\alpha\alpha}),$$

$$S_1=S_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha\beta},\ N_1=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha n},\ N_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\beta n},$$

$$G_1=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_1+\nu\varkappa_2),\ G_2=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\varkappa_2+\nu\varkappa_1), \tag{2.7}$$

$$H_1=H_2=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\tau.$$

Рівняння нерозривності деформації в зусиллях і моментах можна представити в такому вигляді:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{1+\nu}{R}N_1+\frac{3R}{h^2}\left[(1+\nu)N_1-\frac{1}{A}\frac{\partial G}{\partial\alpha}\right]+(1+\nu)\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BN_2}{\partial\alpha}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial AN_1}{\partial\beta}\right)\right]+(1+\nu)\left(X-\frac{3R}{h^2}F\right)=0, \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{1+\nu}{R}N_2+\frac{3R}{h^2}\left[(1+\nu)N_2-\frac{1}{B}\frac{\partial G}{\partial\beta}\right]+(1+\nu)\frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial AN_1}{\partial\beta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial BN_2}{\partial\alpha}\right)\right]+(1+\nu)\left(Y+\frac{3R}{h^2}E\right)=0, \tag{2.9}$$

$$(1-\nu)\frac{3R}{h^2}G+\frac{R^2}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[B\left(\frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{1+\nu}{R}N_1\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\left(\frac{1}{B}\frac{\partial T}{\partial\beta}-\frac{1+\nu}{R}N_2\right)\right]\right\}+\right.$$

$$+\frac{(1+\nu)R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BX)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AY)\right]=0. \tag{2.10}$$

Наведемо ще вирази зусиль і моментів через чотири функції напружень.

$$T_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_2}{AB},\ T_2=\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_1}{AB},$$

$$S_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_1}{AB}+\frac{\varphi_3}{R},\ S_2=-\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_2}{AB}-\frac{\varphi_3}{R},$$

$$N_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta}-\frac{\varphi_2}{R},\ N_2=-\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha}+\frac{\varphi_1}{R},$$

$$G_1=R\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)\right]+\frac{\psi_3}{R}, \tag{2.11}$$

$$G_2=R\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)\right]+\frac{\psi_3}{R},$$

$$H_1=R\left[-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)\right]-\varphi_3,$$

$$H_2=R\left[-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)\right]+\varphi_3.$$

Формулами (2. 11) однорідні рівняння рівноваги перетворюються в тотожності, якими б не були функції φ_1, φ_2, φ_3 і ψ_3. При цьому у випадку сферичної оболонки рівності $S_1=S_2$ і $H_1=H_2$ накладають на функції напружень умову

$$\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A\varphi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial B\varphi_1}{\partial\alpha}\right)+\frac{2\varphi_3}{R}=0. \tag{2.12}$$

Зведемо повну систему однорідних рівнянь сферичної оболонки в зусиллях і моментах до рівняння, спосіб інтегрування якого відомий.

Оскільки однорідні рівняння рівноваги функціями напружень задовольняються, то шукані функції φ_1, φ_2, φ_3 і ψ_3 повинні бути такими, щоб задовольнялись рівняння нерозривності деформації (2. 8), (2. 9), (2. 10) і умова (2.12).

В (2.11) збережемо з чотирьох довільних функцій φ_1, φ_2, φ_3 і ψ_3 три, поклавши $\varphi_3=0$. Тоді формули (2.11) наберуть вигляду:

$$\begin{gathered}
T_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_2}{AB},\quad T_2=\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_1}{AB},\\
S_1=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_1}{AB},\quad S_2=-\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_2}{AB},\\
N_1=-\frac{\varphi_2}{R},\quad N_2=\frac{\varphi_1}{R},\\
G_1=\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{\psi_3}{R},\\
G_2=\frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{\psi_3}{R},\\
H_1=-\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right),\\
H_2=-\frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha}+\varphi_2\right),
\end{gathered} \tag{2.13}$$

а умова (2.12) стає такою:

$$\frac{\partial A\varphi_2}{\partial\beta}+\frac{\partial B\varphi_1}{\partial\alpha}=0. \tag{2.14}$$

Вирази N_1 і N_2 із (2. 13) підставимо в рівняння (2. 8) і (2. 9), звідки, враховуючи (2.14), одержуємо такі вирази для функцій φ_1 і φ_2 через T і G:

$$\begin{gathered}
\varphi_1=\frac{R^2h^2}{(1+\nu)(3R^2-h^2)}\left(-\frac{1}{B}\frac{\partial T}{\partial\beta}+\frac{3R}{h^2B}\frac{\partial G}{\partial\beta}\right),\\
\varphi_2=\frac{R^2h^2}{(1+\nu)(3R^2-h^2)}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha}-\frac{3R}{h^2A}\frac{\partial G}{\partial\alpha}\right).
\end{gathered} \tag{2.15}$$

Враховуючи (2. 3), рівняння нерозривності деформації (2. 10) записуємо у вигляді:

$$\frac{R^2}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right)\right]-(1+\nu)T+(1-\nu)\frac{3R}{h^2}G=0,$$

або

$$R^2\Delta T-(1+\nu)T+(1-\nu)\frac{3R}{h^2}G=0. \tag{2.16}$$

Підставивши в (2. 3) замість N_1 і N_2 їх вирази із (2. 13) і враховуючи (2. 15), одержимо друге рівняння для визначення T і G:

$$\frac{3R^3}{h^2}\Delta G - R^2\Delta T - (1+\nu)\left(\frac{3R^2}{h^2}-1\right)T = 0. \tag{2.17}$$

Рівняння (2.17) замінюємо сумою (2.16) і (2.17), що після перемноження на $\frac{h^2}{3R^3}$ дає

$$R\Delta G + \frac{1-\nu}{R}G - (1+\nu)T = 0. \tag{2.18}$$

Отже, для визначення T і G маємо систему двох рівнянь

$$\begin{aligned} &R^2\Delta T - (1+\nu)T + (1-\nu)\frac{3R}{h^2}G = 0,\\ &R\Delta G + \frac{1-\nu}{R}G - (1+\nu)T = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Систему (2.19) можна записати у вигляді одного комплексного рівняння:

$$R^2\Delta U + (1+ik)U = 0, \tag{2.20}$$

де

$$U = (-\nu+ik)\frac{G}{R} + (1+\nu)T, \quad k^2 = \left(1+\frac{3R^2}{h^2}\right)(1-\nu^2) - 1. \tag{2.21}$$

Рівняння (2. 20) (отже, і система рівнянь (2. 19)) співпадає з рівнянням А. Л. Гольденвейзера [3]. Спосіб інтегрування цього рівняння дав І. Н. Векуа [4], [5].

Через інтеграли системи (2. 19) T і G виразимо пружні зусилля і моменти так, щоб задовольнялась повна система рівнянь сферичної оболонки. Зусилля і моменти, представлені формулами (2.13), задовольняють однорідні рівняння рівноваги (2. 1) — (2. 5), якими б не були функції φ_1, φ_2 і ψ_3. Рівняння нерозривності деформації (2.8) і (2.9) та умова (2.14) задовольняються, якщо φ_1 і φ_2 визначені по (2.15). Залишається підібрати функцію ψ_3 так, щоб задовольнялось рівняння нерозривності деформації (2.10). Виявляється [3], що (2.10) задовольняється, якщо взяти функцію ψ_3 у вигляді:

$$\psi_3 = \frac{R}{1+\nu}G. \tag{2.22}$$

Тоді одержуємо

$$\begin{aligned} &T_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_2}{AB}, \quad T_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_1}{AB},\\ &S_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\varphi_1}{AB}, \quad S_2 = -\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\varphi_2}{AB},\\ &N_1 = -\frac{\varphi_2}{R}, \quad N_2 = \frac{\varphi_1}{R}, \qquad\qquad (2.23)\\ &G_1 = \frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{R}{(1+\nu)B}\frac{\partial G}{\partial\beta} - \varphi_1\right) + \frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{R}{(1+\nu)A}\frac{\partial G}{\partial\alpha} + \varphi_2\right) + \frac{G}{1+\nu}, \end{aligned}$$

$$G_2=\frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{R}{(1+\nu)A}\frac{\partial G}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{R}{(1+\nu)B}\frac{\partial G}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{G}{1+\nu},$$

$$H_1=-\frac{R}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{R}{(1+\nu)A}\frac{\partial G}{\partial\alpha}+\varphi_2\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{R}{(1+\nu)B}\frac{\partial G}{\partial\beta}-\varphi_1\right),$$

$$H_2=-\frac{R}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{R}{(1+\nu)B}\frac{\partial G}{\partial\beta}-\varphi_1\right)+\frac{R}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{R}{(1+\nu)A}\frac{\partial G}{\partial\alpha}+\varphi_2\right).$$

Визначені за цими формулами зусилля і моменти задовольняють однорідні рівняння рівноваги при довільних φ_1, φ_2 і G; перші два рівняння нерозривності задовольняються, якщо φ_1 і φ_2 визначені по (2.15), і третє рівняння нерозривності задовольняється, якщо T і G є інтегралами системи (2. 19) (при цьому також виконується умова (2. 14)). Аналіз напруженого стану сферичної оболонки дається в роботі [3].

Зусилля і моменти, вираховані за формулами (2. 23), відрізнятимуться від зусиль і моментів, вирахованих за формулами (2. 10), поданих в роботі [3], бо коефіцієнти у формулах (2. 15) відмінні від коефіцієнтів у формулах (2. 1) роботи [3].

Примітка. Якщо не приймати умови, що $\sigma_{zz}=0$, то інший вигляд матимуть тільки деякі постійні коефіцієнти у виразі W формули (1. 12) і у відповідних наступних формулах (див. [8]).

ЛІТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, т. VIII, в. 6, 1944.
4. Векуа И. Н. Интегрирование уравнений сферической оболочки. ПММ, т. IX, в. 5, 1945.
5. Векуа И. Н. Общее представление решений дифференциального уравнения сферических функций. ДАН СССР, т. 49, № 5, 1945.
6. Нигул У. К. Ассимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек. ПММ, т. 26, в. 5, 1962.
7. Даревский В. М. Об соотношениях теории тонких оболочек. ПММ, т. 25, в. 3, 1961.
8. Шереметьєв М. П., Пелех Б. Л. До питання про варіаційні принципи в теорії оболонок. Теоретична і прикладна математика, в. 2. Вид. Львівськ. ун-ту, 1962.
9. Шереметьєв М. П. До питання про функції напружень в оболонках. Питання математики і механіки, в. 9. Вид. Львівськ. ун-ту, 1962.
10. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. Journal of mathematics and physic, vol. 23, p.p. 184—191, 1944.

Э. И. ЛУНЬ

К ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Резюме

В статье приводятся основные уравнения теории упругих оболочек при условии, что прямолинейный, нормальный к срединной поверхности элемент оболочки до деформации сохраняет свою длину, оставаясь прямолинейным, но не нормальным к срединной поверхности после деформации. В случае сферической оболочки полная система однородных уравнений в усилиях и моментах сводится к разрешающему уравнению, способ решения которого известен. Полученные результаты сравниваются с данными А. Л. Гольденвейзера, которые получены им в случае выполнения гипотезы Кирхгофа—Лява. Оказывается, что разрешающие уравнения в обоих случаях одинаковые, но усилия и моменты будут различны вследствие различия коэффициентов в выражениях, определяющих функции напряжения.