Д. Г. ХЛЕБНІКОВ

ДО ПИТАННЯ ПРО ГРАНИЧНІ УМОВИ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПЛАСТИНОК З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ*

М. П. Шереметьєв [1, 2] вперше сформулював у функціях комплексної змінної граничні умови плоскої задачі для пластинки, край якої підкріплено тонким пружним стержнем. У припущенні, що підкріпний стержень працює лише на розтяг, а його згинна жорсткість дорівнює нулю, Г. М. Савіним та Н. П. Флейшманом [3, 4] одержано зм'якшені граничні умови, що зводять задачу безпосередньо до граничної проблеми для комплексних потенціалів Колосова—Мусхелішвілі. На основі цих результатів у даній роботі виводяться граничні умови такого ж типу, проте без обмеження відносно жорсткості стержня на згин. Одержані умови можуть бути використані для розв'язку ряду конкретних задач. Як найпростіший приклад одержано відомий [1, 2] розв'язок задачі про пружну рівновагу нескінченної пластинки з підкріпленим круговим отвором.

§ 1. Розглянемо тонку ізотропну пластинку, що займає в площині $z=x+iy$ область, яка обмежена контуром L. Край пластинки підкріплено тонким пружним криволінійним стержнем змінної жорсткості. Припускається, що стержень спаяно з пластинкою вздовж його осі, тобто стержень розглядається як пружна крива, що працює на розтяг та згин. За додатний напрямок відрахунку дуги s на L вважаємо такий, що залишає область пластинки зліва.

На контурі спаю пластинки і стержня, крім рівності напружень, має місце також умова рівності зміщень:

$$u = u_0, \tag{1.1}$$

де $u = u_n + iu_t$, $u_0 = u_n^0 + iu_t^0$, причому u_n і u_t — проекції вектора зміщення точок края пластинки на зовнішню нормаль та дотичну, u_n^0 і u_t^0 — ті ж самі величини для стержня.

Нехай далі $p_x = p_x(s)$ і $p_y = p_y(s)$ — проекції на осі координат заданого зовнішнього навантаження, прикладеного до стержня, σ_n і τ_n — нормальний та дотичний компоненти напружень в пластинці на контурі спаю, t — афікс точки контура L, $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$, h — товщина пластинки. Тоді нормальна $q=q(s)$ та дотична $n=n(s)$ складові зусиль, що діють на стержень, запишуться

$$q + in = i\bar{\dot{t}}(p_x + ip_y) - h(\sigma_n + i\tau_n). \tag{1.2}$$

* Науковий керівник — проф. М. П. Шереметьєв.

Напружено-деформований стан плоского криволінійного стержня характеризується такими рівностями [2]:

а) рівняння рівноваги:

$$\frac{dN}{ds} = -n \mp \frac{Q}{r}, \quad \frac{dQ}{ds} = -q \pm \frac{N}{r}, \quad \frac{dM}{ds} = Q, \tag{1.3}$$

б) закон Гука:

$$\varepsilon = \frac{N}{G_1} \pm \frac{M}{rG_1}, \quad \frac{d\Theta}{ds} = \frac{M}{G_2} \pm \frac{N}{rG_1} + \frac{M}{r^2G_1}, \tag{1.4}$$

в) співвідношення між деформаціями та переміщеннями:

$$\varepsilon = \frac{du_t^0}{ds} \pm \frac{u_n^0}{r}, \quad \Theta = \pm \frac{u_t^0}{r} - \frac{du_n^0}{ds}. \tag{1.5}$$

Тут N, Q, M — поздовжна і перерізуюча сили та згинаючий момент; ε — відносне видовження осі стержня, Θ — кут повороту, r — радіус кривини, G_1, G_2 — жорсткості на розтяг та згин. У формулах (1.3) — (1.5) і далі верхній (нижній) знак перед $\frac{1}{r}$ відноситься до випадку, коли зовнішня нормаль направлена від (до) центра кривини осі стержня.

Якщо ввести лінійний оператор A ($f=f(s)$ — деяка функція)

$$Af = \left(\pm \frac{1}{r} + i\frac{d}{ds}\right) f = i\dot{t}\frac{d}{ds}(\bar{\dot{t}} f) \tag{1.6}$$

і комплексно-спряжений $\bar{A}$

$$\bar{A}f = \left(\pm \frac{1}{r} - i\frac{d}{ds}\right) f = -i\bar{\dot{t}}\frac{d}{ds}(\dot{t} f), \tag{1.7}$$

то з (1.3) — (1.5) випливає:

$$\begin{gathered} q + in = \bar{A}(N - iQ), \quad N - iQ = G_1\varepsilon - AM \\ \varepsilon + i\Theta = \bar{A}u_0, \quad M = -G_2 Re(A\bar{A}u_0). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Тому

$$q + in = \bar{A}[G_1 Re(\bar{A}u_0)] + \bar{A}A[G_2 Re(A\bar{A}u_0)]. \tag{1.9}$$

Виражаючи тепер напруження $\sigma_n + i\tau_n$ та зміщення $u_n + iu_t$ через комплексні потенціали $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ за відомими формулами [5] та враховуючи (1.1) та (1.2), одержимо з (1.9) після інтегрування по s граничну умову для функцій $\varphi(z)$ та $\psi(z)$:

$$\begin{gathered} \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - iK_1\dot{t} Re\left(\bar{\dot{t}}\frac{d}{ds}[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]\right) + \\ + \dot{t}^2\frac{d}{ds}\left(\bar{\dot{t}}K_2 Re\left[i\dot{t}\frac{d}{ds}\left\{\bar{\dot{t}}^2\frac{d}{ds}[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]\right\}\right]\right) = f_0(t) \text{ на } L, \end{gathered} \tag{1.10}$$

де

$$f_0(t) = \frac{i}{h}\int_0^s (p_x + ip_y)ds + C, \quad K_j = \frac{G_j}{2\mu h} \quad (j = 1, 2), \tag{1.11}$$

$\varkappa$, μ — пружні константи пластинки, C — стала інтегрування.

Зокрема, якщо вважати, що підкріпний стержень працює лише на розтяг, то при $K_2=0$ з (1. 10) випливає зм'якшена гранична умова, що дана в роботах [3, 4].

Гранична умова (1. 10) дозволяє врахувати вплив жорсткості стержня на згин. Шукані функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ можна представити у вигляді:

$$\varphi(z)=\varphi_0(z)+\varphi_1(z)+\varphi_2(z),\ \psi(z)=\psi_0(z)+\psi_1(z)+\psi_2(z), \tag{1.12}$$

де $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функції, які характеризують напружений стан непідкріпленої пластинки, а $\varphi_c(z)=\varphi_1(z)+\varphi_2(z)$ та $\psi_c(z)=\psi_1(z)+\psi_2(z)$ — голоморфні всюди в області пластинки функції, що характеризують вплив підкріпного стержня, причому функції $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ враховують вплив розтягливості стержня, а $\varphi_2(z)$ та $\psi_2(z)$ — вплив його згинності. Функції $\varphi_1(z)$ і $\psi_1(z)$ можуть бути знайдені методом, викладеним в [4], а для відшукання $\varphi_2(z)$ та $\psi_2(z)$ одержимо після підстановки (1.12) в (1.10) таку граничну умову:

$$(1+\varkappa)\varphi_2(t)-U_2(t,\bar t)-iK_1\dot tRe\left[\bar{\dot t}\frac{d}{ds}U_2(t,\bar t)\right]+$$

$$+\dot t^2\frac{d}{ds}\left(\bar{\dot t}K_2Re\left[i\dot t\frac{d}{ds}\left\{\bar{\dot t}^2\frac{d}{ds}U_2(t,\bar t)\right\}\right]\right)=F(t)\ \text{на}\ L, \tag{1.13}$$

де позначено

$$F(t)=-\dot t^2\frac{d}{ds}\left(\bar{\dot t}K_2Re\left[i\dot t\frac{d}{ds}\left\{\bar{\dot t}^2\frac{d}{ds}\left[U_0(t,\bar t)+U_1(t,\bar t)\right]\right\}\right]\right), \tag{1.14}$$

$$U_k(t,\bar t)=\varkappa\varphi_k(t)-t\overline{\varphi_k'(t)}-\overline{\psi_k(t)}\quad(k=0,1,2). \tag{1.15}$$

§ 2. Нехай функція $z=\omega(\zeta)$ відображає на скінченну (або нескінченну) область D, зайняту пластинкою, внутрішність (зовнішність) кола γ радіуса $\rho=1$ в площині $\zeta=\xi+i\eta$, якщо область D є однозв'язною, або кругове кільце у випадку двозв'язної області. В дальших формулах верхній (нижній) знак відповідає випадку, коли область D знаходиться всередині (зовні) контура L.

Позначаючи

$$\varphi_2(z)=\varphi_2[\omega(\zeta)]=\varphi(\zeta),\ \psi_2(z)=\psi_2[\omega(\zeta)]=\psi(\zeta),$$

$$U_2(t,\bar t)=U(\sigma),\ F(t)=F[\omega(\sigma)]=f(\sigma), \tag{2.1}$$

де $\sigma=\rho e^{i\vartheta}$ — афікс точки контура γ, та враховуючи, що на γ

$$\dot t=\pm\frac{i\sigma}{\rho}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|},\ \frac{d}{ds}=\pm\frac{i\sigma}{\rho|\omega'(\sigma)|}\frac{d}{d\sigma}, \tag{2.2}$$

запишемо граничну умову (1. 13) в перетвореній області:

$$(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-U(\sigma)\pm K_1\frac{\sigma}{\rho}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}Re\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\pm$$

$$\pm\frac{\sigma^3}{\rho^3}\frac{|\omega'(\sigma)|}{[\omega'(\sigma)]^2}\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}K_2Re\left(\frac{\sigma^2}{\omega'(\sigma)}\frac{d}{d\sigma}\frac{|\omega'(\sigma)|U'(\sigma)}{\sigma[\omega'(\sigma)]^2}\right)\right]=f(\sigma)\ \text{на}\ \gamma, \tag{2.3}$$

причому

$$U(\sigma)=\varkappa\varphi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}. \tag{2.4}$$

Наведемо також дещо видозмінений запис граничної умови. Для цього зауважимо, що

$$\pm\frac{1}{r}=-i\dot{\bar{t}}\ddot{t}=-\frac{i}{2}\dot{\bar{t}}^2\frac{d}{ds}\dot{t}^2=\pm\frac{1}{\rho|\omega'(\sigma)|}\pm\frac{\sigma|\omega'(\sigma)|}{2\rho[\omega'(\sigma)]^2}\frac{d}{d\sigma}\frac{\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}},\tag{2.5}$$

і, отже, з (1.6)

$$Af=\pm\frac{1}{\rho|\omega'(\sigma)|}\left(1+\frac{\sigma\overline{\omega'(\sigma)}}{2\omega'(\sigma)}\frac{d}{d\sigma}\frac{\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}-\sigma\frac{d}{d\sigma}\right)f.\tag{2.6}$$

Тому, виходячи з (1.13), ґраничну умову на γ можна записати:

$$(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-U(\sigma)\pm\delta_1(\sigma)\sigma\omega'(\sigma)\,Re\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\pm$$

$$\pm\frac{\sigma}{\overline{\omega'(\sigma)}}B\left[\delta_2(\sigma)Re\left(B\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right)\right]=f(\sigma).\tag{2.7}$$

Тут позначено:

$$Bf=\left(1+\frac{\sigma\overline{\omega'(\sigma)}}{2\omega'(\sigma)}\frac{d}{d\sigma}\frac{\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}-\sigma\frac{d}{d\sigma}\right)f\tag{2.8}$$

і

$$\delta_1(\sigma)=\frac{K_1}{\rho|\omega'(\sigma)|},\quad \delta_2(\sigma)=\frac{K_2}{\rho^3|\omega'(\sigma)|}.\tag{2.9}$$

Гранична умова в формі (2.7) може бути ефективно використана, якщо $\omega(\zeta)$ — раціональна функція, наприклад, при розв'язанні плоскої задачі для пластинки з підкріпленим еліптичним отвором. При цьому у випадку сталих жорсткостей G_1 та G_2 розв'язок може бути побудований методом послідовних наближень, розвиненим в роботах [2, 6] при розв'язанні аналогічних задач згину плит.

У випадку, коли контур L в площині z являє собою коло радіуса R,

$$Af=\pm\left(\frac{1}{R}-\frac{\sigma}{\rho|\omega'(\sigma)|}\frac{d}{d\sigma}\right)f\tag{2.10}$$

і гранична умова на γ при $K_2=\text{const}$ може бути записана так:

$$\begin{gathered}(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-U(\sigma)\pm\left(K_1+\frac{K_2}{R^2}\right)\frac{\sigma\omega'(\sigma)}{\rho|\omega'(\sigma)|}Re\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\pm\\ \pm K_2\frac{\sigma^2}{\rho^2\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{i\sigma}{\rho|\omega'(\sigma)|}\frac{d}{d\sigma}\left(Im\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right)-\frac{1}{R}\frac{U'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right]=f(\sigma).\end{gathered}\tag{2.11}$$

§ 3. Як приклад розглянемо задачу про пружну рівновагу нескінченної пластинки з підкріпленим круговим отвором радіуса R. В цьому випадку

$$\omega(\zeta)=R\zeta,\ \omega'(\zeta)=R,\ \rho=1,\tag{3.1}$$

і умова (2.11) буде мати вигляд:

$$(1+\varkappa)\varphi(\sigma)-U(\sigma)-l_1\sigma ReU'(\sigma)-l_2\left\{i\sigma\,Im\left(\sigma\frac{d}{d\sigma}\left[\sigma U''(\sigma)\right]\right)-\sigma^2U''(\sigma)\right\}=$$

$$=f(\sigma)\text{ на }\gamma,\tag{3.2}$$

де

$$U(\sigma)=\varkappa\varphi(\sigma)-\sigma\overline{\varphi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}\tag{3.3}$$

та

$$l_1 = \frac{1}{R}\left(K_1 + \frac{K_2}{R^2}\right),\ l_2 = \frac{K_2}{R^3}. \tag{3.4}$$

Нехай

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{-n},\ \psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n}$$

$$U(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \sigma^n,\ f(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n \sigma^n. \tag{3.5}$$

Підставляючи ці розклади в (3.2) та (3.3) та порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ, одержимо:

$$[2 + l_1(n+2) + l_2(n^2-1)(n+2)]\overline{a}_{n+2} + [l_2(n+1)^2 - l_1]n\,\alpha_{-n} =$$
$$= -2\overline{A}_{n+2} \quad (n \geqslant -1),$$
$$[l_2(n+1)^2 - l_1](n+2)\overline{a}_{n+2} + \left[\frac{2}{\varkappa} + nl_1 + l_2 n(n+1)(n+3)\right]\alpha_{-n} =$$
$$= 2A_{-n} \quad (n > 0), \tag{3.6}$$
$$\alpha_1 = -\overline{b}_1,\ \alpha_n = (n-2)\overline{a}_{n-2} - \overline{b}_n\ (n \geqslant 2),\ \alpha_{-n} = \varkappa\, a_n \quad (n > 0).$$

Звідси визначаємо

$$b_1 = \frac{(l_1+2)\overline{A}_1 - l_1 A_1}{2(1+l_1)},$$

$$a_n = \frac{1}{\Delta_n}\{[2 + l_1(n+2) + l_2(n^2-1)(n+2)]A_{-n} + [l_2(n+1)^2 -$$
$$- l_1](n+2)\overline{A}_{n+2}\} \quad (n>0),$$
$$b_{n+2} = \frac{1}{\Delta_n}\{[2 + l_1(n+2-\varkappa) + l_2((n+1)^2\varkappa + (n^2-1)(n+2))]nA_{-n} +$$
$$+ [2 - l_1 n(n+2-\varkappa) + l_2 n(n+1)((n+3)\varkappa + (n+1) \tag{3.7}$$
$$(n+2))]\overline{A}_{n+2}\} \quad (n \geqslant 0),$$

де

$$\Delta_n = 2 + l_1(n\varkappa + n + 2) + l_2(n+1)[n(n+3)\varkappa + (n-1)(n+2)] +$$
$$+ 2l_2(l_2 - l_1)\,n(n+1)^2(n+2)\varkappa. \tag{3.8}$$

Якщо, зокрема, пластинка розтягається зусиллями $\sigma_x^{(\infty)} = p$ та $\sigma_y^{(\infty)} = q$, а підкріплений круговий контур є вільним від зовнішнього навантаження, то напружений стан пластинки визначається функціями

$$\varphi^*(\zeta) = \frac{p+q}{4}R\zeta + \varphi(\zeta),\ \psi^*(\zeta) = \frac{q-p}{2}R\zeta + \psi(\zeta), \tag{3.9}$$

а

$$f(\sigma) = \frac{R}{4}\{(l_1 + 8l_2 - 2)(q-p)\sigma^{-1} + [l_1(\varkappa - 1) - 2](p+q)\sigma +$$
$$+ (l_1 - 4l_2)(q-p)\sigma^3\}. \tag{3.10}$$

Тому з (3.5) та (3.7) знаходимо

$$a_1 = \frac{[1+l_1-4l_2-12l_2(l_1-l_2)](p-q)R}{2+l_1(\varkappa+3)+8l_2\varkappa+24l_2(l_1-l_2)\varkappa},$$

$$b_1 = \frac{l_1(\varkappa-1)-2}{1+l_1}\cdot\frac{(p+q)R}{4},$$

$$b_3 = \frac{2+(4l_2-l_1)(\varkappa-1)-24l_2(l_1-l_2)}{2+l_1(\varkappa+3)+8l_2\varkappa+24l_2(l_1-l_2)\varkappa}\cdot\frac{(p-q)R}{2}, \qquad (3.11)$$

причому інші коефіцієнти рівні нулю. Це співпадає з результатом М. П. Шереметьева [2], одержаним іншим шляхом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шереметьев М. П. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сборник, т. 14, 1953.
2. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Изд. Львовск. ун-та, 1960.
3. Флейшман Н. П. Замечания к одной статье М. П. Шереметьева. Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-ту, в. 7, ч. III, 1957.
4. Савін Г. М., Флейшман Н. П. Пластинки, краї яких підкріплені тонкими ребрами. «Прикладна механіка», т. VII, в. 4, 1961.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
6. Шереметьєв М. П., Мартинович Т. Л. Згин нескінченної пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. «Прикладна механіка», т. III, в. 2, 1957.

Д. Г. ХЛЕБНИКОВ

К ВОПРОСУ О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛАСТИНОК С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ

Резюме

Плоская задача об упругом равновесии пластинки, криволинейный край которой подкреплен тонким упругим стержнем, обладающим жесткостями на растяжение и на изгиб, приведена к граничной задаче для комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили. Полученные граничные условия (1.10) и в преобразованной области (2.7) могут быть использованы при решении ряда конкретных задач. В качестве примера дано известное решение задачи для бесконечной пластинки с подкрепленным круговым отверстием.