МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ СИСТЕМНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ОСВІТИ
ЛЬВІВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

АЛГЕБРА І ТОПОЛОГІЯ

Київ 1993

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ СИСТЕМНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ОСВІТИ
ЛЬВІВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

АЛГЕБРА І ТОПОЛОГІЯ

Тематичний збірник наукових праць

Рекомендовано Інститутом системних досліджень освіти України

Київ 1993

УДК 512. + 515.12

Алгебра і топологія: Тематичний збірник наукових праць / Під ред. М.Я.Комарницького. - К.: ІСДО, 1993. - 116 с.

Статті збірника присвячені проблемам теорії кілець, теорії топологічних півгруп, теорії еліптичних кривих над псевдолокальними полями, нескінченновимірної топології.

Для спеціалістів у галузі алгебри і топології, функціонального аналізу, аспірантів, студентів.

ISBN 5-7763-1672-2

УДК 512.7/.78

В.І.Андрійчук

ПРО ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ НАД ЛОКАЛЬНИМИ ТА ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ З ПОЛЯМИ ЛИШКІВ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

Під локальним /загальним локальним, псевдолокальним/ полем k розуміємо повне дискретно нормоване поле із скінченним /квазіскінченним [7], псевдоскінченним [6]/ полем лишків $\varkappa$. У цій роботі розглядаємо поля k з $\operatorname{char} \varkappa = 2$.

Нехай A - еліптична крива, визначена над полем k; $H^1(k,A)$ - група головних однорідних просторів кривої A над полем k; A_k - група k-раціональних точок кривої A.

Метою цієї роботи є доведення невиродженості /невиродженості зліва/ добутку Тейта - Шафаревича [I; 2]

$$H^1(k,A) \times A_k \longrightarrow Q/Z$$

для еліптичних кривих типів (a) і (b), за Нероном [3], визначених над локальним /псевдолокальним/ полем k з $\operatorname{char} \varkappa = 2$. Це доведення грунтується на виконаному О.М.Введенським [4] прямому обчисленні добутку Тейта - Шафаревича

$$H^1(Gal(\ell/k), A_\ell) \times H^0(Gal(\ell/k), A_\ell) \xrightarrow{T_\ell} Q/Z$$

для простих циклічних розширень ℓ/k.

Випадок кривих типу (c), за Нероном [3], буде розглянутий у наступній роботі.

Позначаємо π - простий елемент поля k; v_k - нормування k; $\mathcal{O}_k$ - кільце цілих поля k; U_k - групу одиниць кільця $\mathcal{O}_k$. Якщо $a \in \mathcal{O}_k$, то $a(\operatorname{mod} \pi)$ позначаємо символом $\bar{a}$. Нехай ℓ - скінченне розширення поля k. Відповідні елементи поля ℓ позначаємо

I*

Π, v_l, V_l, U_l. Якщо l/k – розширення Галуа, то $\mathfrak{g} = Gal(l/k)$ – група Галуа розширення l/k; $H^i(\mathfrak{g}, X)$ – тейтівські когомології Галуа $\mathfrak{g}$-модуля X.

Якщо A – еліптична крива, визначена над полем k, то Вейєрштрассове рівняння кривої A має вигляд

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6, \ (a_i \in v_k). \qquad /1/$$

Крива A має тип (a), за Нероном, якщо крива A' – редукція кривої A – з рівнянням $y^2 + \bar{a}_1 xy + \bar{a}_3 y = x^3 + \bar{a}_2 x^2 + \bar{a}_4 x + \bar{a}_6$ є еліптичною кривою, і має тип (b_n), за Нероном, якщо

$$V_k(a_1^2 + 4a_2) = 0, \ V_k(a_3) > \frac{n}{2}, \ V_k(a_4) > \frac{n}{2}, \ V_k(a_6) = n. \qquad /2/$$

Крива типу (b_n) є кривою з мультиплікативною редукцією, якщо корені рівняння $X^2 + \bar{a}_1 X + \bar{a}_2 = 0$ лежать у полі $\varkappa$.

<u>Теорема</u>. Нехай A – еліптична крива типу (a), визначена над локальним або псевдолокальним полем k з $char\, \varkappa = 2$, або еліптична крива типу (b_n) над загальним локальним полем k з $char\, \varkappa = 2$. Добуток Тейта – Шафаревича невироджений зліва для кривої A.

Щоб довести теорему, досить довести, за О.М.Введенським [4], невиродженість добутку Тейта – Шафаревича

$$H^1(\mathfrak{g}, A_l) \times H^0(\mathfrak{g}, A_l) \xrightarrow{T_l} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \qquad /3/$$

для простих циклічних розширень l/k.

Для простого циклічного розширення l/k нехай σ – твірний елемент групи $Gal(l/k)$; $f(\sigma)$ – представник класу групи $H^1(\mathfrak{g}, A_l)$; $a_k \in A_k$ – представник класу групи $H^0(\mathfrak{g}, A_l)$; $N_{\mathfrak{g}} : l \to k$ – нормований гомоморфізм розширення l/k. У [4] показано, що невиродженість добутку /3/ для простого циклічного розширення степеня q можна довести так.

Нехай $\varphi(x, y)$ – функція з поля функцій на кривій A з дивізором $f(\sigma) + \sigma f(\sigma) + \ldots + \sigma^{q-1} f(\sigma) - q\infty$ і a_k, $u \in A_k$ не належать множині нулів і полюсів функції $\varphi(x,y)$. Добуток, за Тейтом - Шафаревичем, класів з представниками $f(\sigma)$ і a_k відмінний від нуля тоді і тільки тоді, коли /"+" - додавання точок на A /

$$\frac{\varphi(a_k + u)}{\varphi(u)} \notin N_g \ell^*.$$

Використовуючи обчислення, наведені в [4], легко побачити, що функція $\varphi(x,y)$ на кривій A з дивізором

$$a_\ell + \sigma a_\ell + \ldots + \sigma^{q-1} a_\ell - q\infty$$

має з точністю до множника-константи вигляд $P(x) + yQ(x)$, де $P(X), Q(X) \in k[X]$; $\deg Q(X) = \frac{q-3}{2}$; $\deg P(X) \le \frac{q-1}{2}$, причому на кривій A справджується рівність

$$(P+yQ)(-P+(y+a_1x+a_3)Q) = \prod_{i=0}^{q-1}(x-\sigma^i \text{абсц.}\, a_\ell).$$

Якщо $q = 2$, то $\varphi(x,y) = x -$ абсц. a_ℓ.

Конкретність інформації про коефіцієнти многочленів $P(X)$ і $Q(X)$ залежить від a_ℓ.

Доведення теореми розбивається на кілька кроків, в яких послідовно розглядаються криві типів (a) і (b) та можливі типи розширень.

<u>1-й крок</u>. A - крива типу (a) ; k - локальне або псевдолокальне поле і ℓ/k - нерозгалужене розширення.

У цьому випадку, як показано в [8] /лема 1 у [8]/, $H^1(\mathcal{G}, A_\ell) = H^0(\mathcal{G}, A_\ell) = 0$ і тому добуток /3/ невироджений зліва.

<u>2-й крок</u>. A - крива типу (a); k - загальне локальне поле і ℓ/k - слабо розгалужене розширення.

У цьому випадку невиродженість добутку /3/ випливає, як і у випадку $char\, \varkappa > 3$, з невиродженості добутку Вейля на точках скінченного порядку кривої A /лема 2 у [8]/.

<u>3-й крок</u>. A - крива типу (a) з ненульовим інваріантом Хассе і ℓ/k - дико розгалужене розширення локального або псевдолокального поля k.

У [4] /див. доведення леми 6 у [4]/ показано, що досить довести невиродженість зліва добутку Тейта - Шафаревича для одного із скінченних нерозгалужених розширень $\tilde{k}$ поля k як основного. У випадку локального поля k візьмемо як $\tilde{k}$ поле $\tilde{k}$, поле лишків $\tilde{\varkappa}$ якого задовольняє такі умови [4]:

кількість елементів поля $\tilde{\varkappa}$ не менша від 4;

для кількості $[A'_{\tilde{\varkappa}} : 1]$ точок редукції A' кривої A у полі $\tilde{\varkappa}$ виконується нерівність $[A'_{\tilde{\varkappa}} : 1] > [\tilde{\varkappa} : 1] + 1$, де $[\tilde{\varkappa} : 1]$ - кількість елементів поля $\tilde{\varkappa}$ /розглядається випадок локального поля k/.

Нехай A - наша крива типу (a); $\bar{a}_1 \neq 0$, оскільки інваріант Хассе кривої A не дорівнює нулю, $g = Gal(\ell/k) = \{1, \sigma\}$, m - номер останньої нетривіальної групи галуження розширення ℓ/k; T_ℓ - підгрупа дробових точок в A_ℓ і $T_\ell \supset T_\ell^2 \supset T_\ell^3 \supset \ldots$ - фільтрація Лютц у T_ℓ. Якщо $H^1(g, T_\ell) \neq 0$, то представники нетривіальних класів $H^{-1}(g, T_\ell)$ визначають ненульові елементи у факторі T_ℓ^m / T_ℓ^{m+1} [5]. Нехай $f(\sigma) = \gamma$ - представник нетривіального класу $H^1(g, A_\ell)$, $\gamma = (T^{-2} - a_1 T^{-1} + \ldots, -T^{-3} + a_1 T^{-2} + \ldots)$ /три крапки тут і далі означають члени вищих порядків/. Функція $\varphi(x, y)$ на A з дивізором $\gamma + \sigma\gamma - 2\infty$ має вигляд $\varphi(x, y) = x$ - абсц. γ. Покажемо, що добуток класу коциклу $f(\sigma)$ з класом дробової точки дорівнює нулю. Справді, якщо $(\xi, \eta) \in A_k \setminus T_k$, то /тут $NT = N_g T$/

$$(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta) = (\xi, \eta) + (t^{-2} - a_1 t^{-1} + \ldots, -t^{-3} + a_1 t^{-2} + \ldots) =$$
$$= (\xi + (a_1 \xi + a_3) t + \ldots \ , \ \text{ордината});$$

$$\frac{\varphi(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)}{\varphi(\xi, \eta)} = 1 + (a_1 \xi + a_3) t N(T) \in N_g \ell^*.$$

Тому розглянемо добуток класу $f(\sigma)$ з класом цілої точки (ξ, η). Нехай (ρ, δ) - ще одна ціла точка. Тоді

$$\frac{\varphi((\xi, \eta) \dot{-} (\rho, \delta) \dot{+} (\rho, \delta))}{\varphi(\rho, \delta)} = 1 + (\rho - \xi) N(T) + \ldots$$

/"$\dot{+}$" - додавання, а "$\dot{-}$" - віднімання на A/.

З іншого боку, $N(1+\alpha T)=1+\alpha T r T+\alpha^2 N(T))(mod\, \pi^{m+1})$, $(\alpha \in U_k)$, $T r T+a_1 N(T)\equiv 0(mod\, \pi^{m+1})$ і тому

$$N(1+\alpha T) = 1+(\alpha^2 - c_1\alpha)N(T)+\ldots$$

Отже, для невиродженості зліва добутку Тейта - Шафаревича повинна існувати точка $(\xi,\eta)\in A_k\setminus T_k$ така, що для всіх $\bar{\alpha}\in \mathfrak{X}$

$$\bar{\rho}-\bar{\xi} \neq \bar{\alpha}^2-\bar{a}_1\bar{\alpha}. \qquad /4/$$

Така точка (ξ,η) існує, оскільки якщо $[\tilde{\mathfrak{X}}:1]=2^{\tau}$, то кількість скінченних точок у $A'_{\tilde{\mathfrak{X}}}$ більша від 2^{τ} за вибором $\tilde{\mathfrak{X}}$, тому кількість різних значень $\bar{\rho}-\bar{\xi}$ більша від $2^{\tau-I}$, а $\bar{\alpha}^2-\bar{a}_1\bar{\alpha}$ набуває не більше ніж $2^{\tau-I}$ різних значень [7]. Тому добуток Тейта - Шафаревича невироджений зліва у даному разі для еліптичних кривих над локальним полем, а його невиродженість у випадку псевдолокального поля k випливає з того, що її можна сформулювати, як це видно з /4/, на мові першого порядку, і тому за результатами роботи [6] властивість /4/ справджена також для псевдоскінченних полів.

$H^1(\mathcal{G}, A_\ell)$ може також містити класи з представниками $f(\sigma)=a_\ell\in A_\ell\setminus T_\ell$. Покажемо, що в цьому разі існує точка $a_k\in T_k$ з $V_k(t)=m$ /де t - параметр a_k/ така, що добуток класів з представниками a_ℓ і a_k не дорівнює нулю. Виберемо для цього точку $(\xi,\eta)\in A_k\setminus T_k$ так, щоб $\bar{\xi}\neq$ абсц. $\bar{a}_\ell$ і $\bar{\xi}$ не задовольняв рівняння $\bar{a}_1\bar{\xi}+\bar{a}_3=0$. Нехай $(\xi+\Delta\xi,\eta+\Delta\eta)$ означає $a_k \dot{+} (\xi,\eta)$. Тоді

$$\frac{\xi+\Delta\xi-\text{абсц.}\,a_\ell}{\xi-\text{абсц.}\,a_\ell} = 1+(\xi-\text{абсц.}\,a_\ell)^{-1}(a_1\xi+a_3)t\in N_{\mathcal{G}}\,\ell^*$$

для придатного значення t.

<u>4-й крок</u>. A - крива типу (a) з інваріантом Хассе редукції нуль; k - загальне локальне поле і ℓ/k - дико розгалужене розширення степеня 2.

Оскільки інваріант Хассе редукції кривої A дорівнює нулю, то $\bar{a}_1=0$, і, якщо Δ - дискримінант кривої A, то легко побачити, що $\Delta=\bar{a}_3^6\neq 0$, отже, $\bar{a}_3\neq 0$.

Друга ітерація формальної групи, відповідної кривій, має вигляд $2(t+\dots)+a_1t^2+(a_1a_2-7a_3)t^4+\dots$

Враховуючи, що $a_3\not\equiv 0 \pmod{\pi}$, маємо: нетривіальні класи групи $H^{-1}(g, T_\ell)$ визначають нетривіальні елементи у факторах T_ℓ^n/T_ℓ^{n+1}, де $n<m$ [5]. Якщо $f(\sigma)=\gamma_\ell$ – представник нетривіального класу групи $H^1(g, T_\ell)$, то добуток за Тейтом – Шафаревичем цього класу і класу точки $\gamma_K\in T_K$, відповідного значенню t параметра з $v_K(t)=m-n$ є класом групи $H^0(g, \ell^*)$ з представником

$$\frac{\xi+\Delta\xi-N(T)^{-1}+\dots}{\xi-N(T)^{-1}+\dots}=\frac{1-N(T)(\xi+\Delta\xi)+\dots}{1-\xi N(T)+\dots}=1+a_3\xi t N(T)+\dots,$$

що не лежить у $Ng\,U_\ell$ для придатного значення t.

Тепер переходимо до кривих типу (b) за Нероном. Далі A_ℓ^0 означає підгрупу точок групи A_ℓ, що редукуються в неособливі, $\pi_0(A_\ell)=A_\ell/A_\ell^0$.

<u>5-й крок</u>. A – крива типу (b_n); A має мультиплікативну редукцію; ℓ/k – нерозгалужене розширення загального локального поля k, $[\ell:k]=q$.

У роботі [4] показано, що в цьому разі $H^i(g, A_\ell)\xrightarrow{\sim} H^i(g, \pi_0(A_\ell))\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ для всіх $i\in\mathbb{Z}$, коли q/n, і $H^i(g, A_\ell)=0$ – у противному разі.

Нехай спочатку $q>2$. Якщо q/n, то представники нетривіальних класів групи $H^1(g, A_\ell)$ мають вигляд $f(\sigma)=a_\ell=(\pi u, \pi v)$, $(u, v\in U_\ell)$. Функція $\varphi(x,y)$ на кривій A з дивізором $a_\ell+\sigma a_\ell+\dots+\sigma^{q-1}a_\ell-q^\infty$ має вигляд $P(x)+yQ(x)$, де $P(X), Q(X)\in k[X]$, і на кривій A виконується рівність

$$(P+yQ)(-P+(y+a_1x+a_3)Q)=\prod_{i=0}^{q-1}(x-\sigma^i(\pi u)). \qquad /5/$$

Покажемо, що коефіцієнти многочленів $P(X)$ і $Q(X)$ лежать у O_k. Нехай для цього $d\in O_k$ – елемент з найменшою нормою серед тих елементів, для яких $dP(X), dQ(X)\in O_k[X]$. Тоді умова $v_k(d)>0$ приводить до суперечності. Справді, домножуючи /5/ на d^2 і переходячи до редукції, отримуємо

$$(d\bar{P})^2 + (x^3 + \bar{a}_2 x)(d\bar{Q})^2 + a_1 x(d\bar{P})(d\bar{Q}) = 0. \qquad /6/$$

Нехай $k = \deg d\bar{P}$, $\ell = \deg d\bar{Q}$. З /6/ випливає, що коли два з трьох невід'ємних цілих чисел $2k$, $2\ell + 3$, $k + \ell + 1$ дорівнюють одне одному, то третє з них строго більше від інших. Тому рівність /6/ веде до суперечності і, отже, $P(X), Q(X) \in \mathcal{O}_k[X]$.

Виберемо точку $a_k = (\pi\xi, \pi\eta) \in A_k$ так, щоб $\sigma^i(\pi u) \not\equiv$ $\not\equiv \pi\xi \pmod{\pi^2}$. Такий вибір точки a_k можливий тому, що $\sigma^i(n) \bmod \pi$ набуває не більше одного значення з поля $\mathfrak{x}$ і для кожного $\bar{\xi} \in \mathfrak{x}$ існує точка $(\pi\xi, \alpha\pi\xi + \ldots)$ /α – корінь многочлена $x^2 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2$ /, $\xi \in U_k$. Існування точки $(\pi\xi, \alpha\pi\xi + \ldots)$ випливає за методом Ньютона:

$$\alpha^2\pi^2\xi^2 + a_1\alpha\pi^2\xi^2 + a_3\alpha\pi\xi = \pi^3\xi^3 + a_2\pi^2\xi^2 + a_4\pi\xi + a_6 \equiv 0 \pmod{\pi^3}$$

і $a_1\alpha\pi\xi \equiv 0 \pmod{\pi} \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$.

Добуток за Тейтом – Шафаревичем класу групи $H^1(g, A_\ell)$ з представником-коциклом $f(\sigma) = a_\ell$ і класу групи $H^0(g, A_\ell)$, представником якого є різниця $a_k \dot{-} \gamma_k$, де $\gamma_k = (\pi^{-2} - a_1\pi^{-1} + \ldots - \pi^{-3} + \ldots)$, не дорівнює нулю. Справді, $V_k(\varphi(a_k)\varphi(\gamma_k)^{-1})$ не ділиться на q тому, що $V_k(\varphi(\gamma_k)) = -q$, а $0 < V_k(\varphi(a_k)) < q$, що видно з /5/.

Якщо $q = 2$ і $H^i(g, A_\ell) \xrightarrow{\sim} H^i(g, \pi_0(A_\ell)) \xrightarrow{\sim}$ $\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $f(\sigma) = (\pi u, \pi v) = a_\ell$ – представник нетривіального класу групи $H^1(g, A_\ell)$; $a_k = (\pi\xi, \pi\alpha\xi + \ldots)$ – представник нетривіального класу групи $H^0(g, A_\ell)$, то добуток класів з представниками a_ℓ і $a_k \dot{-} \gamma_k$ не дорівнює нулю, оскільки $\pi u - \pi\xi$ не ділиться на π^i, отже, не є нормою /тут $n > 2$/. Якщо $n = 2$, то обчислення виконують аналогічно наведеному в кінці 8-го кроку.

<u>6-й крок</u>. A – крива типу (B_n) з мультиплікативною редукцією і ℓ/k – слабо розгалужене розширення загального локального поля k степеня q.

2 - 207

У роботі [4] показано, що в цьому разі всі групи $H^i(\mathcal{G}, A_\ell)$ $(i \in \mathbb{Z})$ тривіальні або ізоморфні $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Якщо $H^i(\mathcal{G}, A_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, то $H^1(\mathcal{G}, A_\ell) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{G}, \pi_0(A_\ell))$; $H^0(\mathcal{G}, A_\ell) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{G}, A_\ell^\circ)$.

Нехай $f(\sigma) = a_\ell$ – представник деякого нетривіального класу групи $H^1(\mathcal{G}, A_\ell)$. Функція $\varphi(x, y)$ на кривій A з дивізором $a_\ell + \sigma a_\ell + \ldots + \sigma^{q-1} a_\ell - q\infty$ має з точністю до множника-константи вигляд $P(x) + yQ(x)$; $P(X), Q(X) \in \mathcal{O}_k[X]$, $\deg P \leq \frac{q-1}{2}$, $\deg Q = \frac{q-3}{2}$; старшим коефіцієнтом многочлена $Q(X)$ є 1_k і на кривій A справджується рівність

$$(P + yQ)(-P + (y + a_1 x + a_3)Q) = \prod_{i=0}^{q-1} (x - \text{абсц.}\, \sigma^i(a_\ell)).$$

Функція $\varphi(x, y)$ визначає функцію $\bar{P} + y\bar{Q}$ на редукції A' кривої A. Єдиним нулем функції $\bar{P} + y\bar{Q}$ є особлива точка кривої A'. Параметризуємо криву A' так: $x = \bar{z}^2 - \bar{a}_1 \bar{z}$; $y = (\bar{z}^2 - a_1\bar{z})(\bar{z} + \alpha)$, де α – корінь многочлена $X^2 + \bar{a}_1 X + \bar{a}_2$. Можна вважати, що поле $\varkappa$ містить елемент з $(\varkappa^*)^q$, який не дорівнює $1_\varkappa$ /в іншому випадку як $\varkappa$ можна взяти деяке скінченне розширення поля $\varkappa$, для якого ця умова виконується/. Нехай $\bar{z} \in \varkappa^*$, $z(\bar{z} - \bar{a}_1)^{-1} \notin \varkappa^{*q}$. Тоді

$$\frac{(\bar{P} + y\bar{Q})(\bar{z})}{(\bar{P} + y\bar{Q})(\bar{z} - \bar{a}_1)} = \frac{\bar{z}^r (\bar{z} - \bar{a}_1)^{q-r}}{(\bar{z} - \bar{a}_1)^r \bar{z}^{q-r}} = \bar{z}^{2r-q} (\bar{z} - \bar{a}_1)^{q-2r} =$$

$$= \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{a}_1}\right)^{2r-q} = \left(\frac{\bar{z} - \bar{a}_1}{\bar{z}}\right)^q \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z} - a_1}\right)^{2r} \notin \varkappa^{*q},$$

оскільки $0 < r < q$ і $q > r$.

<u>7-й крок</u>. A – крива типу (B_n) з мультиплікативною редукцією і ℓ/k – дико розгалужене розширення степеня 2 загального локального поля k.

Використовуючи обчислення, наведені в [4], зазначимо, що або всі групи $H^i(\mathfrak{g}, A_\ell)$ $(i \in \mathbb{Z})$ тривіальні, або маємо ізоморфізми

$$H^{-1}(\mathfrak{g}, A_\ell) \simeq H^{-1}(\mathfrak{g}, \pi_0(A_\ell)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H^0(\mathfrak{g}, A_\ell) \simeq H^0(\mathfrak{g}, A_\ell^0) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

У нетривіальному випадку нехай $f(\sigma) = (\pi u, \pi v)$ - представник нетривіального класу групи $H^1(\mathfrak{g}, A_\ell)$; $\varphi(x,y) = x - \pi u$ - функція на кривій A з дивізором $f(\sigma) + \sigma f(\sigma) - 2\infty$; $\gamma_k \in T_k$; $V_k(t) = m$, де m - номер останньої нетривіальної групи розгалуженого розширення ℓ/k; t - параметр γ_k; $(\xi, \eta) \in A_k \setminus T_k$;

$$\frac{\varphi((\xi,\eta) \dot{+} \gamma_k)}{\varphi(\xi,\eta)} = \frac{\xi + \Delta\xi - \pi u}{\xi - \pi u} = 1 + (\xi - \pi u)^{-1} a_1 t \notin N\mathfrak{g}\,\ell^*$$

для придатного t /останнє означає, що добуток класів $f(\sigma)$ і γ_k не дорівнює нулю/.

<u>8-й крок</u>. A - крива типу (β_n), що не є кривою з мультиплікативною редукцією; k - загальне локальне поле.

Крива A має своїм рівнянням рівняння /I/, коефіцієнти якого задовольняють умови /2/ і корені многочлена $X^2 + \bar{a}_1 X + \bar{a}_2$ не лежать у полі лишків $\varkappa$.

Добуток Тейта - Шафаревича невироджений зліва для кривої A над полем $\ell = k(\alpha)$, де α - корінь многочлена $X^2 + a_1 X + a_2$. Це випливає з попередніх кроків. Тому, використовуючи діаграму (τ_2) [4], досить показати невиродженість добутку

$$H^1(\mathfrak{g}, A_\ell) \times H^0(\mathfrak{g}, A_\ell) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Розглянемо для цього точну послідовність $\mathfrak{g}$-модулів

$$0 \to A_\ell^0/T_\ell \to A_\ell/T_\ell \to \pi_0(A_\ell) \to 0.$$

За допомогою параметризації $t = (y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x)^{-1}$, де α_1, α_2 - корені многочлена $X^2 + \bar{a}_1 X + \bar{a}_2$, дістаємо ізоморфізм групи A_ℓ^0/T_ℓ і мультиплікативної групи λ^* поля лишків поля ℓ з наведеною цим ізоморфізмом дією $\sigma \in \mathfrak{g}$ на елементи з λ^*:

2^*

$\sigma_{\text{нав}}(\alpha) = (\sigma\alpha)^{-1}$ для $\alpha \in \lambda^*$. Отже, $H^i(g, A_\ell^0 / T_\ell) = 0$ і $H^i(g, A_\ell) \simeq H^i(g, \pi_0(A_\ell))$.

Відомо, що $\pi_0(A_\ell) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ і класи групи $\pi_0(A_\ell)$ мають своїми представниками $(u, v) = (\pi^{z} z, \alpha\pi^{z} z + \ldots)$; $1 \le z < \frac{n}{2}$; α - корінь многочлена $X^2 + a_1 X + a_2$, $z \in U_\ell$ і якщо n парне, то також клас з представником $(\pi^{\frac{n}{2}} a, \pi^{\frac{n}{2}} b)$, $a, b \in \mathcal{O}_\ell$ і $a \in U_\ell$ або $b \in U_\ell$.

Якщо виберемо $z \in \mathcal{O}_k$, то $\sigma(u, v) = (\pi^{z} z, -a_1\pi^{z} z - \alpha\pi^{z} z(1 - a_3 + \ldots)$. Звідси випливає, що $\sigma(u, v) = -(u, v)$ і

$$H^1(g, A_\ell) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1; \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & n = 2k. \end{cases}$$

Нехай n парне і $n > 2$. Розглянемо клас групи $H^1(g, A_\ell)$, що має своїм представником коцикл $f(\sigma) = (\pi z, \alpha\pi z + \ldots)$ і точку a_k, $(\pi^{n/2} a, \pi^{n/2} b)$ - представник класу групи $H^0(g, A_\ell)$.

Нехай $x - \pi z$ - функція на A з дивізором $f(\sigma) + \sigma f(\sigma) - 2\infty$; $\gamma_k = (\pi^{-2} - a_1\pi^{-1} - a_2 - a_3\pi + \ldots, -\pi^{-3} + a_1\pi^{-2} + \ldots)$. Тоді

$$\frac{\varphi(a_k \dotplus \gamma_k)}{\varphi(\gamma_k)} = \frac{\pi(-z + a\pi^{n/2-1} + \ldots)}{\pi^{-2}(1 - a_1\pi + \ldots)} = \frac{\pi^3(-z + \ldots)}{1 - a_1\pi + \ldots} \notin N_g \ell^*$$

і тому добуток класів $f(\sigma)$ і a_k нетривіальний.

Якщо $n = 2$, то $f(\sigma) = (-a_3 a_1^{-1}, \pi v)$ і $a_k = (-a_3 a_1^{-1}, \pi v)$; $\varphi(x, y)$ - функція з дивізором $f(\sigma) + \sigma f(\sigma) - 2\infty$, $(\xi, \eta) \in A_k^0 \setminus T_k$;

$$\frac{\varphi(a_k \dotplus (\xi, \eta))}{\varphi(\xi, \eta)} = a_1 \xi^{-2} \pi v + \ldots$$

не ділиться на π^2, отже, добуток Тейта - Шафаревича невироджений і в цьому разі.

Список літератури

1. *Tate J. WC-group over p-adic fields // Sem. Bourbaki, 1956, 156.*

2. Шафаревич И.Р. Группа главных однородных алгебраических многообразий // ДАН СССР, 1959. - 124. - № 1. - С. 42-43.

3. *Neron A. Modeles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globoux // Publ. Math. IHES, 1964. – № 21.*

4. Введенский О.Н. О локальных "полях классов" эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер.математ., 1973. – 37. – С. 20–88.

5. Введенский О.Н. Двойственность в эллиптических кривых над локальным полем // Изв. АН СССР. Сер.математ. Ч. I. – 1964. – 28. – С. 1091–1112; Ч. 2. – 1966. – 30. – С. 891–922.

6. *Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann Math., 1968. – 88. – № 2. – p. 239–271.*

7. *Serre J.-P. Corps locaux. – Paris, Hermann, 1962.*

8. Андрийчук В.И. Об эллиптических кривых над псевдолокальными полями / Мат.сб., 1979. – 110 /152/. – № 1 /9/. – С. 88–101.

УДК 517947

Л.С.Баб'як, О.Л.Горбачук

ПРЯМА І ОБЕРНЕНА АСИМПТОТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглядається диференціальне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+\sum_{k=0}^{n}a_k t^k, \quad 0\le t<\infty,$$

де A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0; a_i – елементи з банахового простору $\mathcal{B}$.

Встановлюється, що за деяких умов на коефіцієнти a_k довільний розв'язок даного рівняння

$$y(t)=u(t)+\sum_{k=0}^{n}b_k t^k,$$

де $u(t)$ – розв'язок однорідного рівняння з умовою $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t u(\xi)d\xi=0$ /Чезаровська межа/.

Так само розв'язується обернена асимптотична задача: знайти розв'язок $y(t)$ і многочлен $P(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_k t^k$ /коефіцієнти невідомі/,

$y(t)$ – розв'язок даного рівняння, який задовольняє умову $y(0)=y_0$, $y_0\in D(A)$ і $y(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k + v(t)$ /a_k задані/ і $v(t)$ – розв'язок однорідного рівняння, $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t v(\xi)d\xi=0$.

Нехай B – рефлексивний банаховий простір. Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dt}=Ay(t)+\sum_{k=0}^{n} a_k t^k,\quad t\in[0;\infty); \qquad /1/$$

$$\frac{dy}{dt}=Ay(t),\qquad t\in[0;\infty), \qquad /2/$$

де A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0 /див. [1, с. 50]/; a_k – елементи банахового простору B.

Відомо, що коли A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0, то банаховий простір розкладається на пряму суму замикання образу і ядра оператора A, тобто $B=\overline{R(A)}\dotplus \operatorname{Ker} A$ /див. [2, теорема 18, 6.2]/.

Проектор на $\operatorname{Ker} A$ позначимо P. Нагадаємо, що межа функції, за Чезаро,

$$(C-1)\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t y(\xi)d\xi .$$

<u>Теорема 1</u>. Довільний розв'язок рівняння /1/ подається у вигляді

$$y(t)=u(t)+\sum_{k=0}^{n} b_k t^k,$$

де $u(t)$ – розв'язок рівняння /2/; $(C-1)\lim_{t\to\infty} u(t)=0$, тоді і тільки тоді, коли $a_n\in R(A)$, $a_{n-1},\dots,a_0\in R(A)+\operatorname{Ker}A$, причому многочлен $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ визначається однозначно.

<u>Доведення</u>. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді многочлена $P(t)=\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$. Дістаємо зв'язок коефіцієнтів відомих a_k і шуканих b_k:

$$A b_n = - a_n ;$$
$$A b_{n-1} = n b_n - a_{n-1} ;$$
$$A b_{n-2} = (n-1) b_{n-1} - a_{n-2} ;$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$A b_1 = 2 b_2 - a_1 ;$$
$$A b_0 = b_1 - a_0 .$$

Вираз $k b_k - a_{k-1}$, $k = n, n-1, \ldots, 1$ має лежати в $R(A)$. Якщо $a_{k-1} = z_{k-1} + f_{k-1}$, де $z_{k-1} \in R(A)$; $f_{k-1} \in Ker A$, то $b_k = z_k + \frac{1}{k} f_{k-1}$, де $z_k \in R(A)$; $A z_k = b_k$.

З цих формул випливає, що $a_n \in R(A)$ і $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in R(A) + Ker(A)$, $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1$ визначаються однозначно. Єдиність коефіцієнтів $b_1, b_2, \ldots, b_n$ випливає також з того, що многочлен, який не дорівнює константі, не може бути розв'язком однорідного рівняння /2/.

Щоб $(C-1) \lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$, потрібно, щоб $u(0) \in R(A)$ /див. [3, с. 1263, теорема]/. Коефіцієнт b_0 вибирається так, що $P(b_0 - y(0)) = 0$, де P – проектор на $Ker A$.

З теореми безпосередньо випливає наслідок.

<u>Наслідок</u>. Якщо область значень оператора A замкнена, тобто $R(A) = \overline{R(A)}$, то за умов теореми I довільний розв'язок $y(t)$ рівняння /I/ подається у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k + u(t),$$

де $(C-1) \lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$, тоді і тільки тоді, коли $b_n \in R(A)$.

Тепер поставимо обернену асимптотичну задачу: знайти $y(t)$ і многочлен $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ /коефіцієнти невідомі/, де $y(t)$ – розв'язок рівняння /I/, який задовольняє умову $y(0) = y_0$, $y_0 \in D(A)$ і $y(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k + v(t)$ /де b_k задані/ і $v(t)$ – розв'язок рівняння /2/, для якого $(C-1) \lim\limits_{t \to \infty} v(t) = 0$.

Теорема 2. Многочлен $P(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ визначається однозначно і розв'язок $y(t)=\sum_{k=0}^{n} b_k t^k + v(t)$ $/b_k$ задані/;

$(C-1)\lim_{t\to\infty} v(t)=0$, існує тоді і тільки тоді, коли $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0 \in \mathcal{D}(A)$ і $P(b_0-y_0)=0$.

Доведення. Підставляючи відомий многочлен $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ у рівняння /I/, знаходимо a_k з рівностей

$$
\begin{aligned}
a_n &= -Ab_n;\\
a_{n-1} &= nb_n - Ab_{n-1};\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_1 &= 2b_1 - Ab_1;\\
a_0 &= b_1 - Ab_0.
\end{aligned}
$$

Звідси випливає, що $b_n, \ldots, b_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Щоб $(C-1)\lim_{t\to\infty} v(t)=0$, потрібно, щоб $P(y_0-b_0)=0$ /див. [3, с. 1263]/, припускаючи в теоремі $\rho=0$.

Список літератури

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр.лит., 1962. – 830 с.

3. Горбачук О.Л. Розв'язок деякої оберненої задачі для еволюційного рівняння у банаховому просторі // Укр.математ.журн., 1990. – Т. 42. – № 9. – С. 1262-1265.

УДК

Б.М.Бокало

ПРО КАРДИНАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ ТОПОЛОГІЧНИХ ІНВЕРСНИХ ПІВГРУП

§ 1. Термінологія і позначення

Нехай S – інверсна півгрупа. Позначимо E множину ідемпотентів / в'язку/ півгрупи S.

Далі важливу роль відіграватиме відношення природного порядку на множині E, яке визначається умовою $e \le f$ тоді і тільки тоді, коли $ef = fe = e$. Відомо, що комутативна в'язка є нижньою півструктурою /далі просто півструктурою/ відносно природного порядку на E. Центр півгрупи S позначимо $Cent\ (S)$. Відомо, що коли $E \subset Cent\ (S)$, то $xx^{-1} = x^{-1}x$ для всіх $x \in S$ /тут єдиний інверсний елемент до елемента x позначається x^{-1}/. Якщо $E \subset Cent\ (S)$, то π позначимо відображення /далі називатимемо проекцією/ $\pi : S \longrightarrow E$, яке визначається так: $\pi(x) = xx^{-1} = x^{-1}x$.

Інверсна півгрупа S називається топологічною інверсною півгрупою, якщо на S існує топологія, відносно якої операції множення і взяття інверсного неперервні.

Використовуватимемо такі кардинальні інваріанти простору X з топологією $\mathcal{T}$: потужність $|X|$; вага $w(X) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ -база $X\}$; щільність $d(X) = min\{|Y| : Y \subset X,\ \bar{Y} = X\}$; число Сусліна $C(X) = sup\{|\gamma| : \gamma \subset \mathcal{T},\ \gamma$ - диз'юнктна$\}$; число Ліндельофа $\ell(X) = min\ \{\tau$: якщо $\gamma \subset \mathcal{T}$ і $\cup\gamma = X$, то існує $\gamma' \subset \gamma$, для якого $|\gamma'| \leq \tau$ і $\cup\gamma' = X\}$, характер простору X у точці x є кардинал $\chi(x,X) = \lambda_0^s\ min\{|\mathcal{B}_x| : \mathcal{B}_x$ -база X у точці $x\}$; характер простору $\chi\ (X)$ є $\chi(X) = sup\{\chi\ (x, X) : x \in X\}$; псевдохарактер простору X у точці x є кардинал $\psi(x,X) = \lambda_0\ min\{|\gamma| : \gamma \subset \mathcal{T},\ \cap\gamma = \{x\}\}$; псевдохарактер простору X є кардинал $\psi(X) = sup\{\psi(x,X) : x \in X\}$; тіснота простору X у точці x є кардинал $t(x,X) = min\{\tau$: якщо $A \subset X$, $x \in \bar{A}$, то існує $B \subset A$, для якого $x \in \bar{B}$ і $|B| \leq \tau\}$ і тіснота простору X є кардинал $t(X) = sup\{t(x,X) : x \in X\}$.

Кардинал τ називається калібром простору X, якщо кожна сім'я γ потужності τ непорожніх відкритих множин у X містить підсім'ю γ' таку, що $|\gamma'| = \tau$ і $\cap\gamma' \neq \phi$.

Кардинал $min\ \{\tau : \tau^+$-калібр $X\}$ називається числом Шаніна простору X і позначається $sh\ (X)$. Завжди $C(X) \leq sh\ (X) \leq d\ (X)$.

Решта позначень такі самі, як і в [I; 2; 5].

3 - 207

§ 2. Постановка задачі

Відомо /див. [5]/, що за деяких обмежень на інверсну півгрупу S /зокрема, якщо $E \subset Cent(S)$/ S розкладається на півструктуру E груп H_e, тобто $S = \bigcup\{H_e : e \in E\}$, де $H_e = \pi^{-1}(e)$. Причому якщо S є топологічною інверсною півгрупою, то E є топологічною півструктурою і всі групи H_e топологічні.

Таке розкладання підгрупи S дає змогу підійти до вивчення топологічних властивостей півгрупи через властивості більш спеціальних структур: топологічних груп H_e і півструктури E.

У загальному випадку задачу можна сформулювати так. Нехай півструктура E належить до класу $\mathcal{T}_1$ топологічних просторів, а топологічні групи H_e – класу $\mathcal{T}_2$ топологічних просторів. Описати клас $\mathcal{T}_3$ топологічних просторів, до якого належить півгрупа S.

Вважатимемо, що інверсні півгрупи гаусдорфові і задовольняють умову $E \subset Cent(S)$.

§ 3. Кардинальні інваріанти на топологічних інверсних півгрупах

Спробуємо з'ясувати, для яких кардинальних інваріантів $\mathcal{T}$ справджується формула

$$\mathcal{T}(S) \leq \sup\{\mathcal{T}(E),\ \mathcal{T}(H_e) : e \in E\}.$$

З теореми Архангельського [1] безпосередньо випливає таке твердження.

3.1. Твердження. Якщо відображення π замкнене, то
$t(S) \leq \sup\{t(E),\ t(H_e) : e \in E\}$.

Приклад 3.2 показує, що в твердженні 3.1 від замкненості π відмовитись не можна.

3.2. Приклад. Нехай A_τ – компактифікація однією точкою a_τ /у розумінні П.С. Александрова/ дискретного простору потужності $\tau > \lambda_0^5$. На A_τ задамо операцію $*$ так:

$$a * b = \begin{cases} a_\tau, & \text{якщо } a \neq b; \\ a, & \text{якщо } a = b. \end{cases}$$

Очевидно, A_τ є компактною інверсною півгрупою / в'язкою/. Нехай $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ – двоелементна абельова група. Покладемо $S = (A_\tau \times \mathbb{Z}_2) \setminus \{(a_\tau, \bar{1})\}$, операцію на S задамо так:

$$(a, \bar{i})(b, \bar{j}) = \begin{cases} (a_\tau, \bar{0}), \text{ якщо } a \neq b \text{ або } a = b = a_\tau; \\ (a, \bar{i} + \bar{j}), \text{ якщо } a = b \neq a_\tau. \end{cases}$$

Усі точки множини S, крім $(a_\tau, \bar{0})$, вважатимемо відкритими, а базою околів у точці $(a_\tau, \bar{0})$ є сім'я множин U, для яких $U \setminus (A_\tau \times \{\bar{1}\})$ зліченна, а $U \setminus (A_\tau \{\bar{0}\})$ скінченна.

Легко перевірити, що S – топологічна інверсна півгрупа, для якої $t(S) > \sup\{t(E), t(H_e) : e \in E\}$.

3.3. Твердження. Якщо S – топологічна інверсна півгрупа, то $\psi(S) \leq \sup\{\psi(E), \psi(H_e) : e \in E\}$.

<u>Доведення.</u> Нехай s – довільний елемент із S. Тоді існує таке $e_s \in E$, що $s \in He_s$. Нехай γ – сім'я відкритих множин у E така, що $\cap\gamma = \{e_s\}$ і $|\gamma| \leq \psi(E)$, а γ' – сім'я відкритих у S множин така, що $\cap\gamma' \cap He_s = s$ і $|\gamma'| \leq \psi(He_s)$.

Тоді $s = \cap\{\pi^{-1}(U) : U \in \gamma\} \cap (\cap\gamma')$.

3.4. Наслідок. Якщо S – компактна інверсна півгрупа з лінійно впорядкованою в'язкою, то $\chi(S) = \psi(S) = t(S)$.

Доведення цього наслідку випливає з тверджень 3.I і 3.3, а також з відомих фактів про те, що тіснота компактної групи збігається з характером, та аналогічного факту, справджуваного для лінійно впорядкованих просторів. Нагадаємо лему з [4].

3.5. Лема. Нехай E – в'язка півгрупи S. Тоді для довільного $e \in E$ множини $\{k \in E : k \leq e\}$ і $\{k \in E : k \geq e\}$ завжди замкнені в S.

Із цієї леми безпосередньо випливає, що коли півструктура E лінійно впорядкована природним порядком і компактна, то топологія на E збігається з топологією, породженою лінійним порядком.

Приклад 3.6 показує, що існує несепарабельна компактна півгрупа S, в якої множина ідемпотентів E - спадково сепарабельний лінійно впорядкований компакт, а кожна H_e скінченна.

3.6. Приклад. Нехай $X = \{(t,0): 0 < t \le 1\} \cup$ $\cup \{t,1): 0 \le t < 1\}$. На X вводиться такий лінійний порядок: $(t,i) < (t',i')$, якщо $t < t'$; $t = t'$; $i = 0$; $i' = 1$ /простір X з топологією, породженою лінійним порядком $<$, є компактом, який називається "дві стрілки" П.С.Александрова [3]/.

Покладемо $X = X \times \mathbb{Z}_2$, де $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ - адитивна двоелементна група. На $\tilde{X}$ уведемо операцію півпрямого добутку, тобто $(a,\bar{i})(b,\bar{j}) = (min(a,b), \bar{i}+\bar{j})$. Базу топології утворюють одноточкові множини $(x,\bar{1}) \in X \times \{\bar{1}\}$ і множини вигляду $(U \times \{\bar{0}\}) \cup$ $\cup ((U \times \{\bar{1}\}) \setminus A)$, де U відкрита в X, а A - скінченна підмножина $U \times \{\bar{1}\}$. Покладемо $S = \tilde{X} \setminus \{((t,0),\bar{1}): t \in (0,1]\}$. Легко перевірити, що S - топологічна інверсна півгрупа, яка містить незліченний відкритий дискретний підпростір. Причому $E = X$, а група H_e ізоморфна $\mathbb{Z}_2$ для кожного $e \in E$. Тому $sup\{d(E),$ $d(H_e): e \in E\} = sup\{sh(E), sh(H_e): e \in E\} = \lambda_0^S$. Але $d(S) \geq sh(S) \geq c(S) > \lambda_0^S$.

3.7. Теорема. Нехай E - локально компактна півструктура така, що для довільної відкритої підмножини U і довільного елемента $e \in U$ існує така V, що $e \in V$ і $\cup\{V^n: n \in N\} \subset U$. Тоді

$$sh(S) \le sup\{w(E), sh(H_e): e \in E\}.$$

Доведення. Розглянемо зліченний випадок. Нехай $sup\{w(E), sh(H_e): e \in E\} \le \lambda_0^S$ /у загальному випадку міркування відрізняються тільки термінологією/. Припустимо, що $sh(S) > \lambda_0^s$. Тоді існує точково злічення незлічення сім'я $\mathcal{U}$ відкритих у X множин. Зліченну базу простору E позначимо $\mathcal{B}$. Пару (V, V_0) назвемо позначеною, якщо $(V, V_0) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, $\overline{\cup \{V_0^n : n \in N\}} \subset V$ і $\overline{\cup \{V_0^n : n \in N\}}$ – компакт. Нехай $\mathcal{B}^*$ – сім'я всіх позначених пар. Очевидно, $|\mathcal{B}^*| \leq |\mathcal{B} \times \mathcal{B}| \leq \lambda_0^s$. Оскільки $\overline{\cup \{V_0^n : n \in N\}}$ є компактною півструктурою, то існує єдиний мінімальний елемент цієї півструктури, який позначимо $e(V, V_0)$.

Нехай $L = \{e(V, V_0) : (V, V_0) \in \mathcal{B}^*\}$. Ясно, що $|L| \leq \lambda_0^s$. Покладемо $\mathcal{U}_{(V, V_0)} = \{U \in \mathcal{U} : U \cap H_{e(V, V_0)} \neq \emptyset\}$. Покажемо, що $\mathcal{U} = \cup\{\mathcal{U}_{(V, V_0)} : (V, V_0) \in \mathcal{B}^*\}$.

Нехай $U \in \mathcal{U}$. Зафіксуємо довільне $s \in U$. Тоді $e_s = ss^{-1} \in E$. Оскільки $e_s s = s \in U$, то за неперервністю множення існує таке $V \in \mathcal{B}$, що $V \subset U$. Для V зафіксуємо таке V_0, що $e_s \in V_0$, $\overline{\cup \{V_0^n : n \in N\}}$ – компакт і $\overline{\cup \{V_0^n : n \in N\}} \subset V$. Тоді, очевидно, пара $(V, V_0) \in \mathcal{B}^*$. Оскільки $e(V, V_0) \in V$, то $e(V, V_0)s \subset U$. Але $(e(V, V_0)s) \times e(V, V_0)s)^{-1} = e(V, V_0)e_s = e(V, V_0)$. Таким чином, $e(V, V_0)s \in H_{e(V, V_0)}$. Отже, $U \cap H_{e(V, V_0)} = \emptyset$, тобто $U \in \mathcal{U}_{(V, V_0)}$. Оскільки $|\mathcal{U}| \geq \lambda_1^s$, то існує така $(V, V_0) \in \mathcal{B}^*$, що $|\mathcal{U}_{(V, V_0)}| \geq \lambda_1^s$. А це суперечить тому, що калібр групи $H_{e(V, V_0)}$ дорівнює λ_1^s.

Аналогічно можна довести таку теорему.

3.8. Теорема. Нехай E – локально компактна півструктура така, що для довільної відкритої підмножини U і довільного елемента $e \in U$ існує така V, що $e \in V$ і $\overline{\cup \{V^n : n \in N\}} \subset U$. Тоді
$$c(S) \leq \sup\{w(E), c(H_e) : e \in E\}.$$
Далі використовуватимемо такі леми.

3.9. Лема. Нехай U - відкрита підмножина в півструктурі E і для деякого елемента $u^* \in U$ маємо
$$U \cap \{k \in E:\ k < u^*\} = \emptyset.$$
Тоді існує таке U^*, що $u^* \in U^* \subset U$ і $U^* \subset \{e \in E:\ e \geq u^*\}$.

Доведення. Нехай $U \cap \{k \in E:\ k < u\} = \emptyset$. Візьмемо таку відкриту в E множину U^*, що $u^* \in U^* U^* \subset U$, а також довільний елемент $e \in U^*$. Тоді $eu^* \in U^* U^* \subset U$ і $eu^* \leq u^*$. Але $U \cap \{k \in E:\ k < u^*\} = \emptyset$. Тому $eu^* = u^*$. А отже, $e \geq u^*$.

3.10. Лема. Для довільної топологічної півструктури E маємо $|\{e \in E:$ існує окіл $O(e)$ такий, що $O(e) \cap \{v \in E:\ v < e\} = \emptyset\}| \leq w(E)$.

Доведення. Нехай $\mathcal{B}$ - база E така, що $|\mathcal{B}| \leq w(E)$. Покладемо $E' = \{e \in E:$ існує окіл $O(e)$ такий, що $O(e) \cap \{v:\ v < e\} = \emptyset\}$. Побудуємо відображення $\varphi: E' \to \mathcal{B}$ так: кожному $e \in E'$ поставимо у відповідність такий окіл $\varphi(e) \in \mathcal{B}$, що $e \in \varphi(e) \subset \{v: v \geq e\}$ /це можна зробити згідно з лемою 3.9/. Покажемо, що відображення φ ін'ективне. Справді, нехай $e_1, e_2 \in E'$ і $e_1 \neq e_2$. Якщо $e_1 < e_2$, то $e_1 \in \varphi(e_1)$ і $e_1 \notin \varphi(e_2)$, якщо $e_2 < e_1$, то $e_2 \notin \varphi(e_1)$ і $e_2 \in \varphi(e_2)$, а якщо e_1 і e_2 непорівнянні, то $e_1 \in \varphi(e_1)$ і $e_2 \notin \varphi(e_1)$. Отже, в усіх випадках, якщо $e_1 \neq e_2$, то $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$.

3.11. Теорема. Нехай S - топологічна інверсна півгрупа і E - множина її ідемпотентів. Нехай для довільної точки $e \in E$ і довільного її околу $U(e)$ існує такий окіл $V(e)$, для якого $Int_E\{V(e) \cap \{k:\ k \leq e\}\} \neq \emptyset$ або $V(e) \cap \{k:\ k < e\} = \emptyset$.

Тоді справджуються такі формули:
$$sh(S) \leq sup\{w(E),\ sh(H_e): e \in E\}; \qquad /a/$$

$$c(S) \leq \sup\{w(E),\ c(H_e): e \in E\}. \qquad /б/$$

<u>Доведення</u>. Доведемо формулу /а/ /формула /б/ доводиться аналогічно/. Розглянемо зліченний випадок. Нехай

$$\sup\{w(E),\ sh(H_e): e \in E\} \leq \lambda_0^S$$

/у загальному випадку міркування відрізняються тільки термінологією/.

Припустимо супротивне, тобто $sh(S) > \lambda_0^S$. Нехай $\mathcal{U}$ є точково злічення незлічення сім"я відкритих у S непорожніх множин. Покладемо $E' = \{e \in E :$ існує такий окіл $O(e)$, що $O(e) \subset \{v : v \geq e\}\}$, а зліченну всюди щільну підмножину в E позначимо E''. Нехай $\mathcal{U}_e = \{U \in \mathcal{U} : U \cap H_e \neq \emptyset\}$. Покажемо, що $\mathcal{U} = \cup\{\mathcal{U}_e : e \in E' \cup E''\}$.

Зафіксуємо довільне $U \in \mathcal{U}$ і довільний елемент $s \in U$. Нехай $e_s = s \cdot s^{-1}$. Тоді існує така відкрита в E множина V_{e_s}, що $e_s \in V_{e_s}$ і $V_{e_s} \cdot s \subset U$. Якщо $Int_E\{V_{e_s} \cap \{e \in E : e < e_s\}\} = \emptyset$, то, очевидно, $e_s \in E'$ і $U \in \mathcal{U}_{e_s}$. Тепер нехай $Int_E\{V_{e_s} \cap \{e \in E : e \leq e_s\}\} \neq \emptyset$. Тоді існує таке e^*, що $e^* \in E''$ і $e^* < e_s$. Оскільки $(e^* s)(e^* s)^{-1} = e^* e_s = e^*$ і $e^* s \in U$, то $U \in \mathcal{U}_{e^*}$. Отже, $\mathcal{U} = \cup\{\mathcal{U}_e : e \in E' \cup E''\}$. Згідно з лемою 3.10 $|E'| \leq \lambda_0^S$, а тому існує таке $e \in E' \cup E''$, що $|\mathcal{U}_e| > \lambda_0^S$. А це означає, що $sh(H_e) > \lambda_0^S$. Отримана суперечність завершує доведення теореми.

Залишаються відкритими такі питання:

3.12. Питання. Нехай S - інверсна півгрупа. Чи правильно, що $d(S) \leq \sup\{w(E),\ d(H_e): e \in E\}$?

3.13. Питання. Нехай S - компактна інверсна півгрупа. Чи правильно, що $w(S) \leq \sup\{w(E): w(H_e): e \in E\}$?

3.14. Питання. Нехай S - інверсна півгрупа і відображення π замкнене. Чи вірно, що $\chi(S) \leq \sup\{\chi(E),\ \chi(H_e): e \in E\}$?

Зауважимо, що за деяких обмежень відповідь на друге питання позитивна /І.Й.Гуран, М.М.Зарічний/.

Якщо в питанні 3.14 не вимагати замкненості $\mathcal{T}$, то відповідь негативна.

3.12. Приклад. Нехай $X = N \cup \{\eta\} \subset \beta N$, де $\eta \in \beta N \setminus N$. Покладемо $S = (X \times \mathbb{Z}_2) \setminus \{(\eta, \bar{1})\}$. На S задамо алгебраїчну операцію $*$ так:

$$(a, \bar{i}) * (b, \bar{j}) = \begin{cases} (\eta, \bar{0}), & \text{якщо } a \neq b; \\ (a, \bar{i} + \bar{j}), & \text{якщо } a = b. \end{cases}$$

Топологію на S задамо так, що підпростір $\{(n, \bar{1}) : n \in N\} \cup \{(\eta, \bar{0})\}$ гомеоморфний X, а підпростір $\{(n, \bar{0}) : n \in N\} \cup \{(\eta, \bar{0})\}$ – звичайна збіжна послідовність із граничною точкою $(\eta, \bar{0})$.

Легко перевірити, що $\chi(S) > \sup\{\chi(E), \chi(H_e) : e \in E\} = \lambda_0^S$.

§ 4. Деякі наслідки з результатів § 3

Нагадаємо [1; 2], що компакт X називається компактом Корсона, якщо X можна топологічно вкласти в Σ-добуток відрізків [0, 1].

4.1. Теорема. Нехай S – компактна інверсна півгрупа і півструктура E лінійно впорядкована.

Тоді S є компактом Корсона тоді і тільки тоді, коли компакт S метризований.

<u>Доведення</u>. Нехай S – компакт Корсона. Тоді згідно з теоремою Л.Б.Нахмансона [2; 6] E – метризований компакт. Оскільки тіснота компакта Корсона зліченна, то для кожного $e \in E$ група H_e метризована. Тому /див.теорему 3.8/ λ_1^S є калібром простору S і $\chi(S) \le \lambda_0^S$ /див.наслідок 3.4/. Оскільки кожний компакт з першою аксіомою зліченності, для якого λ_1^S є калібром, сепарабе-

льний [I], то компакт S також сепарабельний. Оскільки компакт Корсона монолітний, то $w(S) \leq \lambda_0^S$, а отже, компакт S метризований.

Теорема 4.I є наслідком загальнішої теореми.

4.2. Теорема. Нехай S - компактна інверсна півгрупа з лінійно впорядкованою півструктурою E.

Тоді число Ліндельофа простору неперервних функцій $C_p(S)$ у топології поточкової збіжності дорівнює вазі простору S.

У доведенні теореми 4.2 суттєво використовується така теорема Л.Б.Нахмансона.

4.3. Теорема [6]. Якщо X - лінійно впорядкований компакт, то число Ліндельофа простору $C_p(X)$ дорівнює вазі простору X.

У теоремах 4.I і 4.3 лінійна впорядкованість півструктури E природним порядком суттєва. Одноточкова компактифікація A_τ незліченного дискретного простору є компактною інверсною півгрупою / в'язкою/. Відомо, що A_τ - компакт Еберлейна [2] неметризований.

Список літератури

I. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // УМН, 1978. - Т. 33. - № 6. - С. 29-64.

2. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. - М.: Изд-во при МГУ, 1989.

3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М.: Наука, 1974.

4. Бейда А.А. О топологических инверсных полугруппах с компактным пространством замкнутых инверсных подполугрупп // Деп. в ВИНИТИ; 23.II.81; № 5582 - 81.

5. Клифорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. - М.: Мир, 1972.

6. Нахмансон Л.Б. Линделефовость в пространстве функций // Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. - Кишинев, 1985. - С. 183.

УДК 512.553

Р.В.Вовк, М.Я.Комарницький

РОЗШАРОВАНІ ДОБУТКИ ДЕЯКИХ НЕКОМУТАТИВНИХ НЕТЕРОВИХ КІЛЕЦЬ

У даній статті узагальнюється результат Т.Огоми [5] про нетеровість розшарованого добутку комутативних нетерових кілець на некомутативні нетерові кільця, в яких кожний ідеал має централізовану систему твірних, точніше доводиться, що коли кільця A_1, A_2 і A_0 нетерові і гомоморфізми $\varphi_i : A_i \to A_0$, де $i = 1, 2$, мають ядра $\mathfrak{A}_i$, якими притаманна властивість Артіна - Ріса, то умови Огоми є достатніми для нетеровості розшарованого добутку $A_1 \times_{A_0} A_2$. Метод доведення цього результату відрізняється від оригінального доведення Огоми, виконаного ним у комутативному випадку з використанням досить глибоких результатів комутативної алгебри, тим, що ми знаходимо твірні правого ідеалу J кільця $A_1 \times_{A_0} A_2$, припускаючи відомими твірні ідеалів $\pi_1(J)$, $\pi_2(J)$, $\varphi_1\pi_1(J) = \varphi_2\pi_2(J)$ та твірні модулів $\mathfrak{A}_i^{n_i} / \mathfrak{A}_i^{n_i+1}$ над $C = \operatorname{Im}\varphi_1 \cap \operatorname{Im}\varphi_2$, де $n_i = 1, 2, \ldots, k_i$, причому k_i – найменше з натуральних чисел, для яких $\mathfrak{A}_i^{k_i} \cap \pi_i(J) \subseteq \pi_i(J)\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$. Такий спосіб доведення дає можливість виконати грубу оцінку для числа твірних правого ідеалу розшарованого добутку кілець A_1 і A_2 над кільцем A_0. Разом з тим запропонований підхід наводить на думку, що його можна використати для обчислення стабільного рангу кільця $A_1 \times_{A_0} A_2$, якщо відомі стабільні ранги кілець A_0, A_1, A_2. Останнє питання досліджуватиметься в наступній статті.

Зазначимо, що інтерес авторів до даної задачі спричинено змістом робіт [1; 2; 4; 6; 8], де досліджуються як структурні питання самих розшарованих добутків кілець, так і різноманітні класи модулів, що є важливими з точки зору гомологічної алгебри.

1. Загальні відомості

Надалі всі кільця вважатимемо асоціативними з одиницею, відмінною від нуля, а всі модулі – правими і унітарними. Дотримуватимемось позначень, які використовував Огома в [5; 6].

Нехай A_0, A_1, A_2 - кільця; $\varphi_i : A_i \to A_0$, $i = 1, 2$ - гомоморфізми кілець. Тоді можна побудувати універсальний квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi_1} & A_1 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} \\ A_2 & \xrightarrow[\varphi_2]{} & A_0 \end{array}$$

у категорії кілець $Rings$. У цьому разі кільце A позначається $A_1 \times_{A_0} A_2$ і називається розшарованим добутком кілець A_1 і A_2 над кільцем A_0. Розшарований добуток кілець визначається однозначно з точністю до ізоморфізму. Канонічним представником класу ізоморфних до A кілець є таке кільце:

$$A = \{ (a, b) \mid \varphi_1(a) = \varphi_2(b), \; a \in A_1, \; b \in A_2 \} \subseteq A_1 \times A_2.$$

Гомоморфізми π_1 і π_2 у цьому разі є звуженнями канонічних проекцій прямого добутку $A_1 \times A_2$ на перший і другий множники.

Покладемо $\mathfrak{A}_i = Ker \varphi_i$, $C = Im \varphi_1 \cap Im \varphi_2$, $\varphi_i^{-1}(C) = B_i$, $i = 1, 2$. Зауважимо, що $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \subseteq A_1 \times_{A_0} A_2$ і C - підкільце кільця A_0. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ A_i - модуль $\mathfrak{A}_i^n / \mathfrak{A}_i^{n+1}$, $i = 1, 2$ є разом з тим модулем над кільцем $C \subseteq Im \varphi_i$, оскільки $Im \varphi_i \cong A_i / \mathfrak{A}_i$ і $\mathfrak{A}_i$ міститься в ануляторі модуля $\mathfrak{A}_i^n / \mathfrak{A}_i^{n+1}$. У [5] доведено такий факт.

Твердження 1.1. $A_1 \times_{A_0} A_2 = B_1 \times_C B_2$.

Для певних типів тверджень про розшаровані добутки кілець це дає змогу обмежитись випадком, коли φ_1 і φ_2 є накладеннями кілець /тобто сюр'єктивними гомоморфізмами/. У цьому зв'язку найбільш повні результати про розшаровані добутки дістаємо тоді, коли φ_1 і φ_2 - накладення. Так, А.Фаччіні [1] показав, що розшарований добуток комутативних локальних кілець над локальним кільцем є локальним кільцем і розшарований добуток комутативних нетерових кілець над нетеровим кільцем є нетеровим кільцем. Випадок довільних φ_1 і φ_2 не настільки очевидний. Так, Т.Огома показав, що для нетеровості розшарованого добутку нетерових комутативних кілець над комутативним нетеровим кільцем необхідно накладати також додаткову умову на модулі $\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^2$, $i = 1, 2$, а саме він довів таку теорему.

Теорема I.I [5]. Кільце $A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$ /де A_1, A_2, A_0 – комутативні кільця/ є нетеровим тоді і тільки тоді, коли

A_1, A_2, C – нетерові кільця;

C – модулі $\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^2$, $i = 1, 2$ скінченнопороджені.

Щоб перенести цю теорему на некомутативний випадок, необхідно накладати також додаткові умови. Нехай $\mathfrak{A}$ – двобічний ідеал у кільці R. Кажуть, що $\mathfrak{A}$ задовольняє праву умову Артіна – Ріса тоді, коли для кожного правого ідеалу $J \subseteq R$ існує натуральне число n, за яким правильне включення $J \cap \mathfrak{A}^n \subseteq J\mathfrak{A}$.

Відомо [3], що в комутативному нетеровому кільці кожному ідеалу притаманна властивість Артіна – Ріса і це саме справджується для кілець, в яких кожний ідеал має систему центральних твірних. Основний результат роботи [7] стверджує, що в некомутативному випадку всім ідеалам притаманна ця властивість тоді і тільки тоді, коли над кільцем усі кручення стабільні.

2. Достатні умови нетеровості розшарованого добутку некомутативних кілець

Твердження 2.I. Нехай A_1, A_2, C – нетерові справа кільця, ідеали $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$ задовольняють праву умову Артіна – Ріса, а $\mathfrak{A}_i^j / \mathfrak{A}_i^{j+1}$ – скінченнопороджений правий C-модуль за будь-яких $j \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Тоді кільце $A = A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$ нетерове справа.

<u>Доведення</u>. Нехай J – довільний правий ідеал у кільці $A = A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$. Зрозуміло, що $\varphi_1 \pi_1 (J) = \varphi_2 \pi_2 (J) \subset C$. Множина $\varphi_1 \pi_1 (J) C$ – правий ідеал у кільці C. Оскільки C нетеровий, то існує скінченна система правих твірних $c_1, \ldots, c_m$ для даного ідеалу. При цьому кожний елемент $c \in \varphi_1 \pi_1 (J)$ подається у вигляді $c = c_1 \lambda_1' + \ldots + c_m \lambda_m'$, де $c_i \in \varphi_1 \pi_1 (J) C$, $\lambda_i' \in C$.

Серед елементів $c_1, \ldots, c_m$ є, можливо, такі, які не належать до $\varphi_1 \pi_1 (J)$. Їх можна подати у вигляді $\sum x_i t_i$, де $t_i \in C$; $x_i \in \varphi_1 \pi_1 (J)$. Тому, замінивши елементи c_j на x_j, можна вважати, що всі $c_1, \ldots, c_m \in \varphi_1 \pi_1 (J)$. Для кожного $i = 1, \ldots, m$ виберемо такий елемент $a_i \in J$, що $\varphi_1 \pi_1 (a_i) = c_i$.

Виберемо тепер такі натуральні числа n_1 і n_2, що $\pi_1(J)A_1 \cap \mathfrak{A}_1^{n_1} \subseteq \pi_1(J)\mathfrak{A}_1$ і $\pi_2(J)A_2 \cap \mathfrak{A}_2^{n_2} \subseteq \pi_2(J)\mathfrak{A}_2$. Оскільки модулі $\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^2$, $\mathfrak{A}_i^2/\mathfrak{A}_i^3, \ldots, \mathfrak{A}_i^{n_i-1}/\mathfrak{A}_i^{n_i}$, $i = 1, 2$ скінченнопороджені над нетеровим справа кільцем C, то праві C-модулі $\mathfrak{A}_i \cap \pi_i(J)A_i / \mathfrak{A}_i^2 \cap \pi_i(J)A_i, \ldots$

$$\ldots, \mathfrak{A}_i^2 \cap \pi_i(J)A_i / \mathfrak{A}_i^3 \cap \pi_i(J)A_i, \ldots, \mathfrak{A}_i^{n_i-1} \cap \pi_i(J)A_i / \mathfrak{A}_i^{n_i} \cap \pi_i(J)A_i$$

$i = 1, 2$ скінченнопороджені, оскільки ізоморфні деяким підмодулям наведених раніше C-модулів. Виберемо такі елементи $b_j' \in J$, $j = 1, \ldots, k$, що елементи $\pi_1(b_1'), \ldots, \pi_1(b_{s_1}')$ є представниками твірних суміжних класів C-модуля $\mathfrak{A}_1 \cap \pi_1(J)A_1 / \mathfrak{A}_1^2 \cap \pi_1(J)A_1$, а $\pi_1(b_{s_1+1}'), \ldots, \pi_1(b_{s_2}')$ є представниками твірних суміжних класів C-модуля $\mathfrak{A}_1^2 \cap \pi_1(J)A_1 / \mathfrak{A}_1^3 \cap \pi_1(J)A_1$ і т.д.; $\pi_1(b_{k-s_{q-1}+1}'), \ldots$ $\ldots, \pi_1(b_k')$ є представниками твірних суміжних класів C-модуля $\mathfrak{A}_1^{n_1-1} \cap \pi_1(J)A_1 / \mathfrak{A}_1^{n_1} \cap \pi_1(J)A_1$. Розглянемо також елементи $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_u \in J$, образи яких у разі дії π_1 твірні для правого ідеалу $\pi_1(J)A_1\mathfrak{A}_1^{n_1}$ нетерового справа кільця A_1. Можна вважати, що

$$\alpha_1 = \pi_1(\rho_1)\beta_1, \ldots, \alpha_u = \pi_1(\rho_u)\beta_u, \text{ де } \rho_i \in J,\ \beta_i \in \mathfrak{A}_1$$

при $i = 1, 2, \ldots, u$.

Аналогічні побудови виконаємо за другою компонентою з тією лише різницею, що замість J використовуватимемо правий ідеал $\mathcal{J} = (J \cap (0) \times \mathfrak{A}_2) \subseteq (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) \cap J$. Позначимо $b_1^2, \ldots, b_t^2$ елементи з $\mathcal{J}$, образи яких у разі дії гомоморфізму π_2, як і в попередньому випадку, є представниками твірних суміжних класів C-модулів $\mathfrak{A}_2^i \cap \pi_2(\mathcal{J})A_2 / \mathfrak{A}_2^{i+1} \cap \pi_2(\mathcal{J})A_2$, $i = 1, \ldots, n_2 - 1$, а $e_1, \ldots, e_\sigma$ – твірні правого ідеалу $\pi_2(\mathcal{J})\mathfrak{A}_2 \subseteq \pi_2(J)\mathfrak{A}_2$ у нетеровому справа кільці A_2. При цьому можна вважати, що

$$e_1 = z_1\alpha_1, \ldots, e_\sigma = z_\sigma \alpha_\sigma, \text{ де } z_i \in \pi_2(\mathcal{J}),\ \alpha_i \in \mathfrak{A}_2$$ за будь-якого $i = 1, \ldots, \sigma$.

Тепер стверджуємо, що система елементів з $\mathcal{J}$

$$\{a_1, \ldots, a_m, b_1^1, \ldots, b_k^1, b_k^2, \ldots, b_\ell^2, \rho_1, \ldots, \rho_k, (0, z_1), \ldots, (0, z_s)\} \qquad /*/$$

є системою твірних правого ідеалу $\mathcal{J}$ в кільці A.

Справді, нехай x - довільний елемент з $\mathcal{J}$. Тоді $\varphi_1 \pi_1(x) = c_1 \lambda_1' + \ldots + c_m \lambda_m'$, де $\lambda_1', \ldots, \lambda_m'$ - деякі елементи з C. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in A$ такі, що $\varphi_1 \pi_1(\lambda_i) = \lambda_i'$, $i = 1, \ldots, m$. Звідси

$$\pi_1(x - a_1\lambda_1 - \ldots - a_m\lambda_m) \in \ker\varphi_1 = \mathfrak{A}_1 .$$

Тому $y_{s_1} = \pi_1(x - a_1\lambda_1 - \ldots - a_m\lambda_m) \in \mathfrak{A}_1 \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1$. Образ елемента y_{s_1} у випадку канонічного гомоморфізму $\sigma_1 : \mathfrak{A}_1 \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1 \to \mathfrak{A}_1 \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1 / \mathfrak{A}_1^2 \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1$ тепер зображується у вигляді $\sigma_1(y_{s_1}) = \sigma_1(b_1^1)\bar{\mu}_1^{*1} + \ldots + \sigma_1(b_{s_1}^1)\bar{\mu}_{s_1}^{*1}$, де $\mu_1^{*1}, \ldots, \mu_{s_1}^{*1}$ - представники суміжних класів з кільця $A_1 / \mathfrak{A}_1$, які відповідають коефіцієнтам $\mu_1^{**1}, \ldots, \mu_{s_1}^{**1}$ з $C \subset \operatorname{Im}\varphi_1 \cong A_1/\mathfrak{A}_1$, що є коефіцієнтами розкладу елемента $\sigma_1(y_{s_1})$ через вибрані раніше твірні. Тоді $y_{s_2} = y_{s_1} - \pi_1(b_1^1\mu_1^1 + \ldots + b_{s_1}^1\mu_{s_1}^1)$. Продовживши цей процес знаходження коефіцієнтів μ^{**1}, побачимо, що

$$y_k = \pi_1(x - a_1\lambda_1 - \ldots - a_m\lambda_m - b_1^1\mu_1^1 - \ldots - b_{s_1}^1\mu_{s_1}^1 - \ldots$$
$$\ldots - b_{k-s_{q-1}+1}^1\mu_{k-s_{q-1}+1}^1 - \ldots - b_k^1\mu_k^1) \in \mathfrak{A}_1^n \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1 ,$$

де $\varphi_1\pi_1(\mu_i^1) = \mu_i^{**1}$, $i = 1, \ldots, k$.

Виразимо $y_k \in \pi_1(\mathcal{J})\mathfrak{A}_1$ через елементи $\pi_1(\rho_1), \ldots, \pi_1(\rho_u)$ з коефіцієнтами з $\mathfrak{A}_1$: $y_k = \pi_1(\rho_1)z_1 + \pi_1(\rho_2)z_2 + \ldots + \pi_1(\rho_u)z_u$, де $z_i \in \mathfrak{A}_1$, $i = 1, \ldots, u$. Тоді елемент

$$x - a_1\lambda_1 - \ldots - a_m\lambda_m - b_1^1\mu_1^1 - \ldots - b_k^1\mu_k^1 - \rho_1(z_1, 0) - \ldots - \rho_u(z_u, 0)$$

належить правому ідеалу $\mathcal{J} \cap (0, \mathfrak{A}_2) = \mathcal{J}$.

Продовживши за аналогією процес підбору коефіцієнтів розкладу через інші елементи відокремленої раніше системи /*/, дістанемо розклад елемента x на лінійну комбінацію елементів системи $/ * /$ з коефіцієнтами з кільця $A = A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$. Твердження доведено.

Урахувавши інформацію, викладену раніше, та процес доведення твердження 2.I, дістаємо такий результат.

Теорема 2.I. Якщо гомоморфізми φ_1 і φ_2 такі, що всі праві ідеали кілець A_1 і A_2, які містяться в ідеалах відповідно $\mathfrak{A}_1$ та $\mathfrak{A}_2$, мають центральні системи твірних, то кільце $A_1 \times_{A_0} A_2$ є нетеровим справа тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

кільця A_1, A_2 і C нетерові справа;

модуль $\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^2$ – скінченнопороджений правий C–модуль за кожного $i = 1, 2$.

Зрозуміло, що теорема Т.Огоми отримується з теореми 2.I, як безпосередній наслідок.

Зазначимо, що наше доведення дає конкретний алгоритм побудови скінченної системи твірних довільного правого ідеалу кільця $A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$, тоді як доведення Т.Огоми грунтується на якісних результатах комутативної алгебри. У цьому зв'язку можна виконати певну, хоча й грубу, оцінку для числа твірних правих ідеалів розшарованого добутку нетерових кілець над нетеровим кільцем.

Щоб сформулювати точний результат, необхідно ввести ще деякі позначення та поняття.

Нехай $L_r(R)$ – решітка правих ідеалів кільця R. Мінімальну кількість центральних твірних скінченнопородженого правого ідеалу J позначатимемо $\mathscr{X}(J)$, де $J \in L_r(R)$, а точну верхню межу /якщо така існує/ для множини $\{\mathscr{X}(J) / J \in L_r(R)\}$ позначатимемо $\mathscr{X}(R)$.

Число n назвемо AR-індексом ідеалу $\mathfrak{A}$ кільця R відносно правого ідеалу J, якщо воно найменше серед таких чисел k, що має місце включення $J \cap \mathfrak{A}^k \subseteq J\mathfrak{A}$. Якщо ідеал $\mathfrak{A}$ має AR-індекс відносно J, то позначимо його $\theta_J(\mathfrak{A})$.

Теорема 2.2. Нехай A_1, A_2, C – нетерові справа кільця, в яких кожний правий ідеал має центральну систему твірних. Нехай $\varphi_1 : A_1 \to C$; $\varphi_2 : A_2 \to C$ – такі гомоморфізми кілець, що модуль $M_1 = \mathfrak{A}_1 / \mathfrak{A}_1^2$ має k_1 твірних над C, а модуль $M_2 = \mathfrak{A}_2 / \mathfrak{A}_2^2$ має k_2 твірних над C. Тоді виконується нерівність

$$\varkappa(J) \leq \varkappa(\bar{\pi}_1(J)) + \varkappa(\bar{\pi}_2(J)) + \varkappa(\varphi_1 \bar{\pi}_1(J)) + \frac{k_1(k_1^{\theta_J(a_1)}-1)}{k_1-1} + \frac{k_2(k_2^{\theta_J(a_2)}-1)}{k_2-1}.$$

Ця теорема доводиться безпосереднім аналізом алгоритму побудови системи твірних правого ідеалу J кільця $A_1 \times_{A_0} A_2$ в доведенні твердження I.I.

Список літератури

1. Facchini A. Fiber products and Morita Duality for commutative rings. Rend// Sem. Mathem. University Padova, 1981. -67. - N1. - P. 143-159.
2. Facchini A., Vamos P. Injective modules over pullbacks // J. London Mathem. Soc., 1985. -31.- N3.- P. 425-438.
3. Mc Conel J.C., Robson J.C. Noncommutative noetherian rings // John Willey - Sons. - New York, 1987.
4. Nashier B., Nichols W. Patching Modules over commutative squares // J. Algebra, 1988. - 113. - N2. - P. 297-317.
5. Ogoma T. Fibre products of noetherian rings and their applications// Math. Proc. Cambr. Phil. Society, 1985. -97. -N1. - P. 231-241.
6. Ogoma T. Fibre products of noetherian rings// Advance Stud. Pure Math., 1987. -11.- N1. - P.173-182.
7. Van Ogstaegen P. On the AR-property // Bull. Soc. Math. Belgium, 1976. -28. -N1. -P. 11-16.
8. Wiseman A.N. Projective modules over pullbacks rings // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1985. -97. - 395. - N3. - P. 399-406.

УДК 519.46

І.Й.Гуран

МЕТРИЗОВНІСТЬ КОМПАКТНИХ ІНВЕРСНИХ ПІВГРУП

Нехай S- інверсна півгрупа [1]; $E(S)$- півгрупа її ідемпотентів. Елемент, інверсний до $x \in S$, позначимо x^{-1}.

Нехай $\mathcal{T}$ - гауссдорфова топологія на інверсній півгрупі S. Якщо операції множення і взяття інверсного елемента в S неперервні щодо топології $\mathcal{T}$, то пара $/ S, \mathcal{T} /$ називається топологічно інверсною півгрупою. Якщо $\mathcal{T}$ - компактна топологія на S, то $/ S, \mathcal{T} /$ - компактна інверсна півгрупа. Завжди далі S - топологічно інверсна півгрупа. Якщо $x \in X$, то $\chi(x, X)$- характер точки x в X /див. [3, с. 34]/.

Нехай точка x належить компактній півгрупі X. Позначимо $\mathcal{G}(x)$ монотетичну півгрупу, породжену елементом x, тобто $\mathcal{G}(x) = \{x^p \mid p \in \mathbb{N}\}$. Відомо [2], що півгрупа $\mathcal{G}(x)$ містить абелеву підгрупу $A(x) = \cap\{\mathcal{G}_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, де $\mathcal{G}_n(x) = \{x^p \mid p \geqslant n\}$. Крім того, півгрупа $\mathcal{G}(x)$ компактна і містить єдиний ідемпотент e_x. Будемо говорити, що елемент y належить ідемпотенту e, якщо e - єдиний ідемпотент півгрупи $\mathcal{G}(y)$. Множину всіх елементів, що належать ідемпотенту e, позначимо $K(e)$. Якщо $a \in K(e)$, то елемент a називається регулярним при $ae = ea = a$. Природні неперервні відображення інверсної півгрупи S $\pi_1 : S \to E(S)$; $\pi_1(x) = xx^{-1}$; $\pi_2 : S \to E(S)$; $\pi_2(x) = x^{-1}x$ - ретракції, а підмножина $H(e) = \pi_1^{-1}(e) \cap \pi_2^{-1}(e)$ - максимальна підгрупа, яка містить ідемпотент e.

На множині $E(S)$ ідемпотентів півгрупи S існує природний частковий порядок, а саме: $e_1 \leq e_2$ тоді і лише тоді, коли $e_1 e_2 = e_1 = e_2 e_1$, де $e_1, e_2 \in E(S)$. Якщо підпростір $E(S)$ у S лінійно впорядкований [3] щодо введеного порядку $\leq$, то півгрупа S називається L-півгрупою.

<u>Теорема 1</u>. Якщо компактна інверсна півгрупа S задовольняє одну з таких умов:

для будь-якого $x \in S$ півгрупа $\mathcal{G}(x)$ або не містить ізольованих точок, або є групою;

кожний елемент $x \in S$ є регулярним;
для будь-якого $x \in S$ виконується умова $xx^{-1} = x^{-1}x$;
S є L-півгрупою,

то півгрупа S є об'єднанням компактних максимальних підгруп $H(e)$, $e \in E(S)$, що не перетинаються. Кожна з наведених умов є необхідною і достатньою умовою такого розкладу. Крім того, $H(e) = K(e)e = eK(e)$.

Доведення. Перші дві з наведених умов еквівалентні, що випливає з теореми 7, наведеної в [4], і основного результату, поданого в [5]. Третя умова еквівалентна тому, що інверсна півгрупа є об'єднанням груп $H(e), e \in E(S)$ [I, теорема 4.5]. З теореми 7, наведеної в [4], випливає, що друга і третя умови також еквівалентні. Припустимо, що S є L-півгрупою, яка не є диз'юнктним об'єднанням груп. Тоді з третьої умови випливає, що існує елемент $x \in S$ такий, що $xx^{-1} = x^{-1}x$. Отже, ідемпотенти xx^{-1} і $x^{-1}x$ порівнянні, а тому згідно з лемою I.3I, наведеною в [I], півгрупа S містить біциклічну півгрупу, породжену елементами x і x^{-1}. Проте біциклічна півгрупа не вкладається в компактну півгрупу [6].

Наслідок. Якщо S - компактна інверсна півгрупа, то для будь-якого $x \in S$ або $xx^{-1} = x^{-1}x$, або ідемпотенти xx^{-1} і $x^{-1}x$ непорівнянні.

Відомо, що підмножини $H(e,f) = \{x \in S \mid xx^{-1} = e \,\&\, x^{-1}x = f\}$, $e, f \in E(S)$ гомеоморфні максимальним підгрупам $H(e)$ і $H(f)$. Підгрупа $E(S)$ - ретракт S, а тому компактна. Розглянемо таке загальне питання щодо компактних інверсних півгруп: які топологічні властивості притаманні півгрупі S, якщо припустимо, що $\mathcal{P}_1$ - топологічна властивість, притаманна підпівгрупі $E(S)$, а $\mathcal{P}_2$ - топологічна властивість, притаманна максимальним підгрупам $H(e)$?

Наприклад, якщо підпівгрупа $E(S)$ злічення, а всі максимальні підгрупи компактної інверсної півгрупи S метризовні, то S - метризовний компакт. Це наслідок того, що в цьому разі півгрупа S є зліченним об'єднанням компактів $H(e,f)$, e, $f \in E(S)$ і за теоремою О.В.Архангельського [3, 3.I.20] S -

метризовний компакт. Необхідно визначити, наскільки вимога зліченності підпівгрупи $E(S)$ є суттєвою, а також чи справджується така гіпотеза.

Гіпотеза /Б.М.Бокало/. Якщо S - компактна інверсна півгрупа, підпівгрупа ідемпотентів, усі максимальні підгрупи якої метризовні, то півгрупа S метризовна.

Встановимо правильність цієї гіпотези для деяких класів інверсних півгруп. Основний результат - теорема 2, наведена в [9].

Означення I. Нехай $e \in E(S)$ і S - топологічна інверсна півгрупа. Точка e називається ізольованою зліва /справа/, якщо існує окіл $U(e) \ni e$ у S, який не містить точок $e' \in E(S)$ таких, що $e' < e$ $(e < e')$.

Зрозуміло, що в L-півгрупі ідемпотенти, ізольовані як зліва, так і справа, є ізольованими точками в $E(S)$.

Лема I. Якщо півгрупа S містить ізольовану точку x і $x \in H(e,f)$, то ідемпотенти e і f ізольовані зліва.

Доведення. Легко побачити, що коли простір $H(e,f)$ містить ізольовану точку, то підгрупи $H(e)$ і $H(f)$ також містять ізольовані точки. Тому, не зменшуючи загальності, можна вважати, що x - ізольована точка підгрупи $H(e)$. Якщо $H(e) = \{x\}$, то все доведено. Якщо ж $x \neq e$, то з неперервності множення і рівності $xe = x = ex$ випливає таке: існує окіл $U(e)$ такий, що для кожного $u \in U(e)$ виконується $xu = ux = x$. Оскільки, припустивши, що e - неізольована зліва точка, маємо: існує точка $p \in U(e)$ така, що $p < e$ і $e = xx^{-1} = x(px)^{-1} = xx^{-1}p^{-1} = ep^{-1} = ep = p$. Отримана суперечність доводить твердження леми.

Наслідок I. Нехай S - топологічно інверсна півгрупа, підпівгрупа ідемпотентів якої не містить ізольованих зліва точок. Тоді півгрупа S не містить ізольованих точок.

Наслідок 2. Нехай S - компактна інверсна півгрупа, всі максимальні підгрупи якої метризовні, а множина $E(S)$ ідемпотентів задовольняє першу аксіому зліченності і не містить ізольованих зліва точок. Тоді потужність півгрупи S дорівнює континууму.

Доведення. Оскільки $\chi(e, S) \le \omega$ для кожної точки $e \in E(S)$, то $\psi(H(e), S) \le \omega$. З рівності $\psi(F) = \chi(F)$ для кожної замкненої підмножини F в компакті і нерівності $\chi(x, S) \le \chi(x, F) \cdot \chi(F, S)$ [3, с. 144] випливає, що компакт S задовольняє першу аксіому зліченності в кожній точці. З теореми О.В.Архангельського [7] випливає, що потужність S дорівнює континууму.

Приклад 1. Нехай $S' = X \times \mathbb{Z}_2$, де $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Визначимо на $S = S' \cup \{(0, \bar{0})\}$ алгебраїчну операцію таким способом:

$$(x, \varepsilon_1)(y, \varepsilon_2) = (\min(x, y), \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

де $x, y \in X$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Z}$; $(0, \bar{0})(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon)(0, \bar{0}) = (0, \bar{0})$.

Щодо введеної таким способом операції множина S є інверсною півгрупою. Задамо на S топологію $\mathcal{T}$, вважаючи кожну точку $\{(x, \bar{1})\}$, $x \in X$ ізольованою, а на множині $\{(x, \bar{0}) / x \in X\} \cup \{(0, \bar{0})\}$ топологія індукована з прямої $\mathbb{R}$. Легко побачити, що $(S, \mathcal{T})$ - топологічна інверсна півгрупа, підпівгрупа $E(S)$ ідемпотентів якої компактна і гомеоморфна збіжній послідовності, а всі максимальні підгрупи ізоморфні групі $\mathbb{Z}_2$.

Отже, якщо підпівгрупа ідемпотентів - зліченний компакт, а всі максимальні підгрупи навіть скінченні, то вся інверсна півгрупа необов'язково має бути компактною.

Приклад 2. Нехай $S' = X \times \mathbb{Z}_2$, де $X = (0, 1]$. На множині $S = S' \cup \{(0, \bar{0})\}$ визначимо алгебраїчну операцію так само, як у прикладі 1. Топологія на S визначена так: на підпросторі $(X \times \{\bar{0}\}) \cup \{(0, \bar{0})\}$ - топологія відрізка [0, 1], а на підпросторі $X \times \{\bar{1}\}$ базу топології утворюють різні півінтервали $(a, x] \times \{\bar{1}\}$. Тоді легко побачити, що S - топологічно інверсна півгрупа.

У цьому прикладі підпівгрупа ідемпотентів $E(S)$ є відрізок [0, 1], усі максимальні підгрупи ізоморфні $\mathbb{Z}_2$, уся півгрупа S фінально компактна, але неметризована, оскільки містить підпростір $X \times \{\bar{1}\}$, гомеоморфний стрілці Зоргенфрея. З цього прикладу випливає, що вимога компактності всієї півгрупи S в гіпотезі про метризовність півгрупи з метризовною підпівгрупою ідемпотентів і метризовними максимальними підгрупами є суттєвою.

Лема 2. Нехай S є L-півгрупа, множина ідемпотентів $E(S)$ якої має зліченну базу. Тоді потужність множини ідемпотентів, ізольованих зліва /справа/, не більш ніж зліченна.

Доведення. Припустимо, множина $M \subset E(S)$ точок, ізольованих зліва, незліченна. Оскільки відкриті інтервали (a_n, b_n), $n \in N$ утворюють зліченну базу в $E(S)$, то існує точка $x_0 \in M$, яка не є точною нижньою межею жодного елемента бази $\{(a_n, b_n) | n \in N\}$. Тоді відкриту множину $[x_0, c)$, де $c > x_0$, не можна подати у вигляді об'єднання елементів бази. Доведення для ізольованих справа точок аналогічне.

Лема 3. Нехай S - топологічна L-півгрупа; $H(e)$ - максимальна підгрупа, яка є компактною групою Лі; e - неізольований зліва ідемпотент метризовної півгрупи $E(S)$. Тоді існує такий ідемпотент $e' < e$, що всі максимальні підгрупи $H(e'')$ топологічно ізоморфні групі $H(e)$, де $e' \leq e'' \leq e$.

Доведення. Оскільки ідемпотент e неізольований зліва, то існує послідовність $\{e_n | n \in N\}$ ідемпотентів така, що $e_i < e_{i+1}$ і $\lim\limits_{i \to \infty} e_i = e$. Розглянемо гомоморфізми

$$\tilde{e}_i : H(e) \to H(e_i); \quad \tilde{e}_i(x) = e_i x, \quad x \in H(e)$$

/відображення $\tilde{e}_i$ є гомоморфізмами, оскільки S є L-півгрупою і з теореми I випливає, що S - об'єднання максимальних підгруп, а в цьому разі кожний ідемпотент лежить у центрі півгрупи S/.

Якщо $i > j$, то $\ker \tilde{e}_j \subset \ker \tilde{e}_i$. Дійсно, якщо $x \in \ker \tilde{e}_i$, то $e_i x = e_i$. Але тоді $\tilde{e}_j(x) = (e_j e_i) x = e_j$. Отже, $x \in \ker \tilde{e}_j$. Відомо [8, с. 138], що послідовність нормальних підгруп компактної групи Лі стабілізується, а тому існує $n \in N$ таке, що $\ker \tilde{e}_i = \ker \tilde{e}_n$ при $i \geqslant n$. Припустимо, що $\ker \tilde{e}_n \neq \{e\}$. Тоді існує точка $x \in \ker \tilde{e}_n$ і $x \neq e$. Очевидно, для всіх $i \geq n$ маємо $e_i x = e_i$. З іншого боку,

$ex = xe = x$ і $e = \lim_{i\to\infty} e_i = \lim_{i\to\infty} e_i x = ex = x$. Отже, існує ідемпотент $e_n < e$ такий, що $\ker \tilde{e}_n = e$ і для всіх

$i \geq n$ групи $H(e_i)$ - ізоморфні групі $H(e)$.

Лема 4. Нехай S - компактна L-півгрупа; e - неізольований зліва ідемпотент; $[e', e]$ - замкнений інтервал у $E(S)$ такий, що всі максимальні підгрупи $H(e'')$, де $e'' \in [e', e]$ ізоморфні. Тоді підпростір $H[e', e] = \cup\{H(e'') / e'' \in [e', e]\}$ гомеоморфний $H(e) \times$

$\times [e', e]$.

Доведення. Нехай $x \in H(e) \times [e', e]$, $x \in (g, t)$, де

$g \in H(e)$; $t \in [e', e]$. Задамо відображення

$$\varphi: H(e) \times [e', e] \to H[e', e], \quad \varphi(g, t) = gt.$$

Безпосередньо з неперервності множення випливає, що відображення φ неперервне, а з доведення леми 3 випливає, що φ - бієкція. Оскільки простори $H(e) \times [e', e]$ і $H[e', e]$ - компакти, то φ - гомеоморфізм.

Позначимо $k(e)$ точну нижню межу ідемпотентів e' /менших від ідемпотенту e / таких, що $H(e') \simeq H(e)$ і $H(e'') \simeq H(e)$ для всіх $e'' \in [e', e]$.

Лема 5. Нехай e - неізольований зліва ідемпотент компактної L -півгрупи з метризовною підпівгрупою $E(S)$. Тоді підпростір $H(e) = \cup\{H(t) \mid t \in [k(e), e]\}$ - метризовний компакт.

Доведення. Якщо $k(e)$ - неізольований справа ідемпотент, то $H(e) = \cup\{H[t_n, e] / t_n > k(e), t_n > t_{n+1}, \lim_{n\to\infty} t_n = k(e)\} \cup H(k(e))$.
Оскільки $H(e) = \pi_1^{-1}([k(e), e])$, то $H(e)$ - компактний простір, який є об'єднанням зліченного числа метризовних компактів, а отже, метризовний.

Якщо на проміжку $[k(e), e]$ існує неізольований справа ідемпотент, то виконуємо такі самі міркування для точної нижньої межі неізольованих справа ідемпотентів, що належать відрізку $[k(e), e]$. Якщо ж усі точки проміжку ізольовані справа, то знову-таки згідно з лемою 2 їх кількість не перевищує зліченну.

Введемо на підпівгрупі $E(S)$ відношення еквівалентності: $e_1 \sim e_2$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $e' \in [e_1, e_2]$ групи $H(e_1)$, $H(e')$ і $H(e_2)$ топологічно ізоморфні. Очевидно, кожний клас T еквівалентності містить максимальний елемент e, а з леми 3 випливає, що цей клас тоді збігається з $H(e)$ або $H(e) \setminus H(\Gamma(e))$.

Теорема 2. Нехай S - компактна інверсна L-півгрупа, підпівгрупа ідемпотентів якої метризовна, а всі максимальні підгрупи є групами ЛІ. Тоді S - метризовний компакт.

Доведення. Оскільки введені класи еквівалентності непорожні, то їх множина не перевищує зліченну. Проте з леми 5 випливає, що кожний клас еквівалентності - метризовний простір. Отже, компактна півгрупа S - зліченне об'єднання метризовних компактів, а тому вона метризовна.

На підставі теореми 2 можна описати структуру компактних інверсних L-півгруп з метризовною множиною ідемпотентів і максимальними групами ЛІ. Така півгрупа складається з компактних "блоків" $H(e)$, кількість яких зліченна, а деякі з цих "блоків" можуть зводитись до однієї групи.

Зауважимо, що на кожному з "підблоків" $H(e_1, e_2]$ відображення проекції $\pi_1 : S \to E(S)$ відкрите і кожний такий "блок" пошарово гомеоморфний добутку $H(e_2) \times [e_1, e_2]$.

Список літератури

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. - М.: Мир, 1972.

2. Numakura K. On bicompact semigroups // Math. J. Okayama Univ., 1954. - V. 1. - P. 99-108.

3. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир, 1986.

4. Шварц Ш. К теории гаусcдорфовых бикомпактних полугрупп // Чехосл.математ.журн., 1955. - Вып. 5. - № 1. - С. 1-23.

5. Hewitt E. Compact monothetic semigroups // Duke Math. J., 1956. - V. 23. - P. 447-457.

6. Koch R. J., Wallace A. D. Notes on inverse semigroups // Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 1964. - V. 9. - P. 19-24.

7. Архангельский А.В. О мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности // ДАН СССР, 1969. - Т. 187. - С. 967-970.

8. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. - М.: Мир, 1980.

9. Guran I. I. On metrizability of compact topologically inverse semigroups // IX international conf. on Topology and its applications. - Kiev, 1992. - P. 83.

УДК 512.552.12

Б.В.Забавський

ПРО PP-КВАЗІДУОКІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Розглядатимемо кільця, в яких будь-який максимальний правий ідеал є двобічним. Відомо, що така область елементарних дільників є дуообластю [1].

У [2] зазначено, що праве квазідуокільце елементарних дільників є лівим квазідуокільцем, а також дуокільцем. Усе це є обгрунтуванням актуальності дослідження дуокілець елементарних дільників. Тут розглядатимуться ріккартові кільця, а саме: розглядаються умови, за яких такі кільця є кільцями елементарних дільників, що є частковою відповіддю на запитання, поставлені в [3].

Під терміном "кільце" розумітимемо асоціативне кільце з одиницею, відмінною від нуля, під ідеалом - двобічний ідеал. Праве /ліве/ дуокільце - це кільце, в якому довільний правий /лівий/ ідеал є ідеалом. Ліве і праве дуокільце називається дуокільцем. Якщо в кільці довільний максимальний правий ідеал є ідеалом, то кільце називається правим квазідуокільцем. Правим ріккартовим кільцем /правим PP-кільцем/ називається кільце, в якому правий анулятор довільного елемента породжується ідемпотентом. Якщо в кільці R для довільного елемента a рівняння $axa = a$ завжди має розв'язок, то це кільце називається регулярним; якщо цей розв'язок є оберненим елементом кільця R, то останнє називається одинично регулярним. Регулярне дуокільце називається абельово регулярним, а кільце R – самоін'єктивним справа, якщо воно є ін'єктивним правим R-модулем.

Нагадаємо, що матриці A і B з елементами кільця R називаються еквівалентними, коли $B = PAQ$ для обернених над R матриць P і Q відповідних розмірів. Якщо матриця A з елементами кільця R еквівалентна деякій діагональній матриці $diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$, де $\varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i \supseteq R\varepsilon_{i+1} R$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, то говорять, що матриці A притаманна діагональна редукція /під діагональною матрицею розуміємо не обов'язково квадратну матрицю, а лише таку, в якої по головній діагоналі стоять відповідні елементи, а на інших місцях – нулі/. Якщо над кільцем R усім матрицям притаманна діагональна редукція, то кільце R називається кільцем елементарних дільників /скорочено к.е.д./. Якщо ж над кільцем R довільній 1x2 /2x1/ матриці притаманна діагональна редукція, то кільце R називається правим /лівим/ ермітовим кільцем. Праве і ліве кільця Ерміта називаються кільцями Ерміта. З означення правого кільця Ерміта випливає, що воно є кільцем скінченнопороджених правих головних ідеалів, тобто кільцем, в якому довільний скінченнопороджений правий ідеал є головним правим ідеалом [3; 4].

Якщо елемент кільця – ні правий, ні лівий дільник нуля, то він називається регулярним. Центр кільця R позначається $Z(R)$, а радикал Джекобсона – $J(R)$. Звичайно $U(R)$ означає групу одиниць кільця R, а R_n – кільце квадратних матриць розміром n з елементами кільця R.

1. Про квазідуокільця елементарних дільників

Зазначимо відомі результати А.А.Туганбаєва, необхідні для посилань.

<u>Теорема 1</u>. Праве регулярне квазідуокільце є абельово регулярним.

<u>Теорема 2</u>. У правому PP-квазідуокільці скінченнопороджених правих головних ідеалів довільний елемент є добутком центрального ідемпотента на регулярний елемент.

Теорема 3. Праве PP-квазідуокільце скінченнопороджених правих головних ідеалів, в якому будь-який головний ідеал є головним правим і лівим ідеалом з однією і тією самою твірною, є дуокільцем.

Доведення. Нехай R - праве PP-квазідуокільце скінченнопороджених правих головних ідеалів, в якому будь-який головний ідеал є правим і лівим ідеалом з однією і тією самою твірною. На підставі теореми 2 будь-який елемент $a \in R$ можна подати у вигляді $a = e \cdot b$, де $e^2 = e \in Z(R)$; b - регулярний елемент. Оскільки $RbR = b_{\#}R = Rb_{\#}$, то $b = b_{\#} \cdot u$. Оскільки $b_{\#} \in RbR$, то $b_{\#} = \sum_{i=1}^{n} x_i b y_i$; $x_i, y_i \in R$. Оскільки $b_{\#}R = Rb_{\#}$, то $x_i b_{\#} = b_{\#} x_i'$, $x_i' \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Звідси $b_{\#}(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i' u y_i) = 0$. Унаслідок регулярності елемента b отримаємо $KuR = R$.

На підставі теореми 3 [2] маємо $u \in U(R)$, отже, b - дуоелемент кільця, тобто $bR = Rb$, а отже, $aR = Ra$, що й треба було довести.

Теорема 4. Нехай R - праве PP-квазідуокільце елементарних дільників, в якому будь-який головний ідеал є головним правим і лівим ідеалом з однією і тією самою твірною, а отже, дуокільцем.

Доведення. Нехай $a \in R \setminus 0$. На підставі означення маємо

$$diag(a, a)P = Q\,diag(z, b), \qquad /1/$$

де $P = (p_{ij}) \in U(R_2)$; $Q = (q_{ij}) \in U(R_2)$; $zR \cap Rz \supseteq RbR$. Оскільки $a \neq 0$, то $b \neq 0$. З рівності /1/ маємо

$$ap_{12} = q_{12} b; \quad ap_{22} = q_{22} b. \qquad /2/$$

Оскільки $Rp_{12} + Rp_{22} = R$, на підставі леми 1 [1] маємо $p_{12} \cdot u + p_{22} \cdot v = 1$; $u, v \in R$. З рівності /2/ маємо

$a = ap_{12} u + ap_{22} \cdot v = q_{12} bu + q_{22} bv \in RbR$. Звідси $RaR = RbR$. Очевидно, $RaR = RzR$. Оскільки $RbR \subseteq zR \cap Rz$, то $RaR = zR = Rz$. Згідно з теоремою 3 R- дуокільце.

2. Про адекватні PP-квазідуокільця

Нехай R- дуокільце. Припустимо, елемент $a \in R \setminus 0$ адекватний елементу b /у позначеннях $a A b$ /, якщо елемент a можна подати у вигляді $a = r \cdot s$, де $rR + bR = R$, і для довільного необерненого дільника s' елемента s виконується умова $s'R + bR \neq R$. Елемент r назвемо максимальною взаємно простою з b компонентою елемента a, а s' - максимальною спільною з b компонентою елемента a.

Твердження I. Нехай R- дуокільце і $a, b, c \in R$, причому $aR + bR + cR = R$, $c A a$. Тоді існує елемент $m \in R$ такий, що $(a + mb)R + mcR = R$.

Доведення. Оскільки $c A a$, то $c = r \cdot s$, де r - максимальна взаємно проста з a компонента елемента c; s- максимальна спільна з a компонента елемента c.

Розглянемо $(a + rb)R + rcR = kR$. Нехай $k \notin U(R)$; $kR + rR = eR$, де $e \in U(R)$. Оскільки $(a + rb)R \subset eR$; $rR \subset eR$, то $aR \subset eR$, що суперечить умові $rR + aR = R$. Отже, $kR + rR = R$. Тоді, очевидно, $sR + kR = eR$, де $e \in U(R)$. На підставі означення елемента s маємо $eR + aR = nR$, де $n \notin U(R)$. Оскільки $(a + rb)R \subset nR$, то $bR \subset nR$, що суперечить умові $aR + bR + cR = R$. Отже, $k \in U(R)$. Поклавши $r = m$, отримаємо доведення твердження.

Означення. Ермітове дуокільце, в якому довільний ненульовий елемент адекватний, назвемо адекватним дуокільцем.

Для подальшого розгляду необхідні такі результати.

Твердження 2. Якщо R - праве ермітове кільце, то для довільних елементів $a, b \in R$ існують елементи $a_1, b_1, d \in R$ такі, що $a = da_1$; $b = db_1$; $a_1R + b_1R = R$.

Доведення. Унаслідок правої ермітовості кільця R існує обернена матриця $P = (p_{ij})$ така, що $(a, b)P = (d, 0)$, де $d \in R$. Оскільки $P \in U(R_2)$, то для матриці P існує обернена матриця $Q = (q_{ij})$. Тоді $(d, 0)Q = (a, b)$. Звідси $dq_{11} = a$; $dq_{12} = b$, $q_{11}p_{11} + q_{12}p_{21} = 1$, тобто $q_{11}R + q_{12}R = R$. Поклавши $a_1 = q_{11}$, $b = q_{12}$, дістанемо доведення твердження.

Твердження 3. Нехай R - дуокільце, а b - регулярний елемент. Тоді для довільної матриці $P \in U(R_2)$ існує матриця $P' \in U(R_2)$ така, що $diag(b, b)P = P'diag(b, b)$.

Доведення. Якщо $P = (p_{ij})$; $bp_{ij} = p'_{ij}b$, то матриця $P' = (p'_{ij})$ шукана.

Теорема 5. Праве PP-адекватне дуокільце є кільцем елементарних дільників.

Доведення. Щоб довести теорему, досить обмежитись матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Нехай $aR + bR + cR = xR$. Тоді на підставі твердження 2 $a = xa_0$; $b = xb_0$; $c = xc_0$, де $a_0R + b_0R + c_0R = R$. Згідно з теоремою 2 маємо $x = e\alpha$, де $e^2 = e \in Z(R)$; α - регулярний елемент R. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, якщо $c_0 = 0$, то матриці A притаманна діагональна редукція. Якщо $c_0 \neq 0$, то $c_0 \not| a_0$; $c_0 = r \cdot s$, де r - максимальна взаємно проста з a_0 компонента елемента c_0; s - максимальна спільна з a_0 компонента елемента c_0. Згідно з твердженням I існує елемент $m \in R$ такий, що $(a_0 + m b_0)R + m_0 R = R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + m b_0, & m c_0 \\ * & * \end{pmatrix} = B.$$

Очевидно, матриці B притаманна діагональна редукція. Для матриці

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}.$$

існують матриці $P, Q \in U(R_2)$ такі, що $PA_0Q = diag(r, k)$, де $kR \subset zR$. Оскільки α - регулярний елемент, то згідно з твердженням 3 існує обернена матриця $P' \in R_2$ така, що $P' diag(\alpha, \alpha) = diag(\alpha, \alpha) P$. Оскільки $e \in Z(R)$, то, очевидно, матриці PAQ притаманна діагональна редукція. Отже, R - к.е.д. Таким чином, теорему 2 доведено.

Оскільки абелево регулярне кільце є правим адекватним PP-квазідуокільцем, в якому довільний головний ідеал є головним правим і лівим ідеалом з однією і тією самою твірною, то як очевидний наслідок дістанемо такий результат.

Теорема 6. Абельово регулярне кільце є кільцем елементарних дільників.

Оскільки кільце матриць над кільцем елементарних дільників є кільцем елементарних дільників, а також прямі добутки кілець елементарних дільників є знову кільцями елементарних дільників, то як очевидний наслідок дістаємо такий результат.

Теорема 7. Регулярне праве самоін'єктивне кільце, всі примітивні фактор-кільця якого є артіновими, є кільцем елементарних дільників.

Теорема 8. Довільний ненульовий простий ідеал адекватного дуокільця міститься в єдиному максимальному ідеалі.

Доведення. Відомо, що в дуокільці простий ідеал є цілком простим. Нехай P - ненульовий цілком простий ідеал кільця, який міститься в перетині двох різних максимальних правих ідеалів M, N кільця R. Оскільки M і N різні, існують елементи $m \in M$, $n \in N$ такі, що $m + n = 1$. Нехай p - довільний ненульовий елемент P. Оскільки R - адекватне кільце, то $p A m$, де $p = r \cdot s$; r - максимальна взаємно проста з m компонента елемента p. Оскільки елемент P цілком простий і $P \subset M$, то $s \in P$. Нехай $sR + nR = dR$. Оскільки $s \in P \subset N$, то $d \notin U(R)$. Але $dR + mR \supset mR + nR = R$, отже, $dR + mR = R$, що суперечить такому: $p A m$. Отже, теорему доведено.

Означення. Ермітове дуокільце називається узагальнено адекватним, якщо для довільних ненульових елементів кільця один з них адекватний щодо іншого.

Твердження 4. Нехай R - дуокільце Ерміта і $a, b, c \in R$, причому $aR + bR + cR = R$ і $a A c$. Тоді існує елемент $m \in R$ такий, що $Ram + R(bm + c) = R$.

Доведення. Оскільки $a A c$, то $a = r \cdot s$, де r - максимальна взаємно проста з c компонента елемента a; s - максимальна спільна з c компонента елемента a. За аналогією з твердженням I, поклавши $m = r$, дістанемо доведення твердження.

Теорема 9. Праве PP-узагальнено адекватне дуокільце є кільцем елементарних дільників.

Доведення. Згідно з твердженнями I і 4 дана теорема доводиться аналогічно теоремі 4.

Твердження 5. Праве PP-дуокільце скінченнопороджених головних правих ідеалів є правим ермітовим.

Доведення. Нехай R - праве PP-дуокільце скінченнопороджених правих головних ідеалів. Тоді, очевидно, R - півспадкове справа і нехай $a, b \in R$, $aR + bR = dR$. Покладемо $K = \{x \mid dx = 0\}$. Розглянемо точну послідовність $0 \to K \to R - dR \to 0$, яка внаслідок проективності ідеалу dR розщеплюється, тобто існує правий ідеал J такий, що $R = K \oplus J$. Звідси $d = k + i$, де $k \in K$, $i \in J$. Згідно з означенням правого ідеалу K і того, що $k \in K$, маємо $dk = 0$. Звідси $0 = dk = (k+i)k = k^2 + ik$, тобто $k^2 = 0$. Оскільки R редуковане, то $k = 0$. Отже, $d \in J$. Оскільки $aR \subset dR \subset J$; $bR \subset dR \subset J$, то $a, b \in J$. Нехай $1 = e + f$, де $e \in K$; $f \in J$. Оскільки $aR + bR = dR$, то $a = da_0$; $b = ab_0$. З рівності $R = K \oplus J$ маємо $a_0 = k' + a'$, де $k' \in K$; $a' \in J$. Звідси $a = da_0 = dk' + da'$. Очевидно, $dk' = 0$. Отже, $a = da'$, де $a' \in J$. Аналогічно показується, що існує $b' \in J$ таке, що $b = db'$.

Для деяких $m, n \in R$ маємо $am + bn = d$. Оскільки $R = K \oplus J$, то $m = k' + m'$; $n = e' + n'$, де $k', e' \in K$; $m', n' \in J$. Оскільки R - дуокільце, то $da' = a''d$, для якого $a'' \in R$. Звідси $am = ak' + am' = da'k' + am' = a''dk' + am' = 0 + am' = am'$.

Аналогічно $bn = bn'$. Отже, доведено, що $am' + bn' = d$, $m', n' \in J$. Звідси $da'm' + db'n' = d$, а отже, $d(f - a'm' - b'n') = 0$. Таким чином, $f - a'm' - b'n' \in K \cap J = 0$; $a'R + b'R = J$. Покладемо $a_1 = a'$; $b_1 = e + b'$. Тоді $a = da_1$; $db_1 = d(e + b') = de + db' = db' = b'$.

Очевидно, $a_1R + b_1R = a'R + (e + b')R = a'R + eR + b'R = R$.

Нехай R – праве квазідуокільце. Множину максимальних правих ідеалів, які містять елемент a, позначимо $M(a)$.

<u>Теорема 10.</u> Нехай R – праве pp-дуокільце Ерміта і для будь-якого необерненого $a \notin J(R)$ множина $M(a)$ не перевищує счисленну. Тоді R – кільце елементарних дільників.

<u>Доведення</u>. На підставі наведених аргументів для доведення теореми достатньо обмежитись матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$.

Якщо $a \in J(R)$, то $bR + cR = R$, і, очевидно, тоді матриці A притаманна діагональна редукція. Отже, нехай $a \notin J(R)$. З точністю до еквівалентності матриць можна вважати, що $b \notin M_1$, де M_1 – перший елемент множини $M(a)$. Дійсно, якщо $b \in M_1$, то $b + c \notin M_1$. Тоді матриця

$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b+c & c \end{pmatrix}$ еквівалентна матриці A і на місці /2, 1/ стоїть

елемент, який не належить M_1. Отже, нехай $b \notin M_1$. Тоді $Ra + Rb = Ra_1$. Очевидно, $a_1 \notin M_1$. Отже, матриця A еквівалентна деякій матриці вигляду

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

де $a_1R + b_1R + c_1R = R$; $a_1 \notin M_1$.

Продовжуючи цей процес, отримуємо ланцюг ідеалів

$$aR \subset a_1R \subset \ldots \subset a_nR \subset,$$

де $a_i \notin M_i$; M_i – i - елемент множини $M(a)$.

Доведемо, що цей ланцюг скінченний. Якщо це не так, то для власного ідеалу $J = \bigcup a_i R$ існує максимальний правий ідеал M такий, що $J \subset M$. Оскільки $aR \subset J$, то $M \in M(a)$, тобто $M = M_k$. Остання рівність неможлива, оскільки $a_k \notin M_k$. Отже, отримано суперечність. Це доводить, що даний ланцюг скінченний. Таким чином, матриця A еквівалентна матриці A_n, де $a_n \in U(R)$. Очевидно, матриці A_n, а отже, і матриці A притаманна діагональна редукція. Теорему доведено.

Наслідок. Праве PP-квазідуокільце Ерміта, в якому множина максимальних правих ідеалів не перевищує скінченну, є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно дуокільце.

Як наслідки отримуємо такі результати.

Теорема II. Праве півлокальне PP-квазідуокільце Ерміта є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно дуокільце.

Твердження 6. Праве ланцюгове кільце Ерміта є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно дуокільце.

Список літератури

1. Забавський Б.В., Комарницький М.Я. Дистрибутивні області з елементарними дільниками // Укр.математ.журн., 1990. - Т. 42. - № 7. - С. 1000-1004.

2. Туганбаев А.А. Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца // Успехи математ.наук, 1991. - Т. 46. - Вып. 6. - С. 219-220.

3. Larsen Max. D., Lewis W.J., Shores T.S. Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc, 1974. - V. 187. - N1. - P. 231-248.

4. Gillman L., Henriksen M. Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc., 1956. - 82. - P. 362-365.

УДК 515.12+519.16

М.М.Зарічний

ПРО ТОПОЛОГІЧНО ІНВЕРСНІ ПІВГРУПИ, ГОМЕОМОРФНІ МНОГОВИДАМ

Множина X разом із заданою на ній асоціативною операцією /у подальшому цю операцію записуватимемо як множення/ називається інверсною півгрупою, якщо для кожного $x \in X$ існує єдиний елемент $y \in X$ такий, що $xyx = x$ і $yxy = y$. При цьому елемент y називається інверсним до x і позначається $y = x^{-1}$. Якщо X - топологічний простір і відображення множення та інверсії $(x \longmapsto x^{-1})$ неперервні, то X називається топологічно інверсною півгрупою [1]. Елемент $e \in X$ називається ідемпотентом, якщо $e^2 = e$; множина всіх ідемпотентів інверсної півгрупи X позначається $E(X)$. Відображення $z: X \longrightarrow E(X)$, $z(x) = xx^{-1}$ є ретракцією.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається LC^n-простором $/n = 0, 1, 2, \ldots/$, якщо для кожної точки $x \in X$, для кожного околу U точки x існує окіл V точки x, $V \subset U$ такий, що кожне відображення $f: S^i \longrightarrow V$, $0 \leq i \leq n$ має продовження до відображення $\bar{f}: B^{i+1} \longrightarrow U$ /тут S^i - i-вимірна сфера, яка обмежує $(i+1)$-вимірну кулю $B^{i+1} \subseteq \subseteq \mathbb{R}^{i+1}$/.

<u>Лема 1.</u> Нехай X - топологічно інверсна півгрупа і X - компакт. Тоді якщо $E(X) \in LC^0$, то $E(X) \in LC^n$ для кожного $n = 1, 2, \ldots$

<u>Доведення</u>. Позначимо $h: B^{i+1} \longrightarrow exp_3 S^i$, $i \geqslant 1$ відображення, для якого $h(y) = \{y\}$, якщо $y \in S^i \subset B^{i+1}$ [2]. Тут $exp_3 (S^i)$ позначено множину

$$\{A \subset S^i \mid 1 \leq |A| \leq 3\},$$

наділену метрикою Гауссдорфа

$$d_H(A, B) = \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B),\ B \subset O_\varepsilon(A)\},$$

де $O_\varepsilon(A)$ – ε - окіл множини $A \subset S^i$ у деякій фіксованій метриці на S^i.

Для заданого відображення $f: S^i \longrightarrow E(X)$ означимо відображення $\bar{f}: B^{i+1} \longrightarrow E(X)$ формулою

$$\bar{f}(y) = f(z_1)f(z_2)f(z_3),$$

якщо $h(y) = \{z_1, z_2, z_3\} \in exp_3(S^i)$, $y \in B^{i+1}$.

Коректність такого означення відображення $\bar{f}$ легко випливає з таких властивостей інверсних півгруп: кожні два ідемпотенти комутують; добуток ідемпотентів є ідемпотентом [3]. Очевидно, $\bar{f}$ – продовження відображення f. Твердження леми випливає тепер з рівномірної неперервності множення в X.

Нагадаємо, що простір X називається C^n-простором, $n = 0, 1, 2, \ldots$, якщо для кожного відображення $f: S^i \longrightarrow X$, $i \le n$ існує продовження $\bar{f}: B^{i+1} \longrightarrow X$.

Аналогічно лемі I доводиться таке твердження.

<u>Лема 2</u>. Нехай X – топологічно інверсна півгрупа і X – компакт. Тоді якщо $E(X) \in C^0$, то $E(X) \in C^n$ для кожного $n = 1, 2, \ldots$

<u>Теорема I</u>. Нехай X – зв'язна топологічно інверсна півгрупа, простір якої гомеоморфний замкненому многовиду. Тоді X – топологічна група.

<u>Доведення</u>. Зауважимо, що X – абсолютний з околами ретракт / ANR /, а тому $E(X) \in ANR$ – ретракт простору X. Оскільки згідно з лемою 2 $E(X) \in C^n$ для кожного $n = 1, 2, \ldots$, то $E(X)$ – абсолютний ретракт / AR / і, зокрема, стягуваний простор [4].

Із компактності X випливає, що існує елемент $e_0 \in E(X)$ такий, що $e_0 e = e_0 = e e_0$ для кожного $e \in E(X)$. Нехай $g_t: E(X) \to E(X)$, $t \in [0, 1]$ – гомотопія, яка

7*

з'єднує тотожне відображення $g_0 = id$ зі сталим відображенням g_1 у точку e_1. Означимо гомотопію $g'_t : X \to X$ формулою

$$g'_t(x) = x\, g_t\,(r(x)), \quad x \in X.$$

Очевидно, $g'_0 = id$. Припускаючи, що $E(X) \neq \{e_0\}$, дістаємо, що $g'_1(X) \neq X$. Але замкнений многовид не може бути деформованим на свою власну підмножину /це легко випливає з гомологічних властивостей многовидів [5]/. Отже, $E(X) = \{e_0\}$, звідки випливає, що X – топологічна група. Теорему доведено.

Зауважимо, що в теоремі I умова "X – замкнений многовид" не може бути ослаблена до умови "X – компактний многовид з краєм" або "X – некомпактний многовид без краю". Справді, нескладно показати, що лист Мебіуса і відкритий лист Мебіуса можуть бути наділені структурою топологічно інверсної півгрупи.

Символом μ_n позначається n-вимірний універсальний компакт Менгера [6]; основи теорії μ_n-многовидів закладені в [7; 8].

<u>Теорема 2</u>. Жодному зв'язному компактному μ_n-многовиду при $n \geq 1$ не притаманна структура топологічно інверсної півгрупи.

<u>Доведення</u>. Припустимо супротивне: нехай існує таке X. Оскільки $X \in LC^{n-1}$, то $E(X) \in LC^{n-1}$ і згідно з лемою I $E(X) \in LC^m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Оскільки $\dim E(X) \leq n$, то $E(X) \in ANR$, а згідно з лемою 2 $E(X) \in AR$. Припускаючи, що $|E(X)| > 1$, і міркуючи так само, як у доведенні теореми I, дістаємо, що існує деформаційна ретракція μ_n-многовиду X на свою власну підмножину Y. Існує вкладення сфери S^n у $X \setminus Y$ і легко побачити, що слід цієї сфери в разі деформаційної ретракції має бути щонайменше $(n+1)$-вимірним. Отримана суперечність завершує доведення теореми.

Зауважимо, що простір μ_0 гомеоморфний топологічній групі $(\mathbb{Z}/2)^\omega$.

На підставі теорем I і 2 постає таке питання: чи кожна зв'язна компактна топологічно інверсна півгрупа, простір якої скінченновимірний і топологічно однорідний, є топологічною групою? Якщо опустити умову скінченновимірності, то контрприкладом може служити гільбертів куб $Q = \prod_{i=1} [0, 1]_i$ з операцією

$$((x_i)_{i=1}^{\infty})((y_i)_{i=1}^{\infty}) = (\min\{x_i, y_i\})_{i=1}^{\infty}$$

/топологічна однорідність Q показана в [9]/.

Список літератури

1. Koch R.J., Wallace A.D. Notes on inverse semigroups // Rev. roumaine math. pures et appl., 1964. - V. 9. - N1. - P. 19-24.

2. Федорчук В.В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи математ.наук, 1984. - Т. 39. - Вып. 5. - С. 169-208.

3. Клифф А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. I. - М.: Мир, 1972.

4. Борсук К. Теория ретрактов. - М.: Мир, 1971.

5. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. - М.: Мир, 1976.

6. Engelking R. Dimension theory. - Warszawa: PWN.

7. Bestvina M. Characterizing k-dimensional universal Menger compacta // Memoirs of the AMS, 1988. - N 380. - 110 p.

8. Дранишников А.Н. Универсальные менгеровские компакты и универсальные отображения // Математ.сб., 1986. - Т. 129. - № 1. - С. 121-139.

9. Чепмэн Т. Лекции о Q-многообразиях. - М.: Мир, 1981.

УДК 512.64

В.Р.Зеліско

ПРИПУСТИМА ФАКТОРИЗАЦІЯ І ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЕМ МНОГОЧЛЕНІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Основи теорії розкладності многочленних матриць на множники закладені в [1]. Проте в теорії лінійних стаціонарних систем та інших прикладних задачах безпосередньо використовуються факторизації симетричних матриць над кільцями многочленів з комплексними і дійсними коефіцієнтами [2; 3]. У цьому зв'язку в даній роботі досліджуються питання факторизації симетричних матриць над кільцями многочленів $\mathbb{C}[x]$ і $\mathbb{R}[x]$ з інволюцією. Для зручності збережемо термінологію і позначення, наведені в [1; 2; 4].

Інволюція в комутативному кільці K - це операція ∇ така, що для довільних елементів $a, b \in K$ мають місце рівності

$$(a+b)^\nabla = a^\nabla + b^\nabla, \quad (ab)^\nabla = a^\nabla b^\nabla, \quad ((a^\nabla)^\nabla = a.$$

Як доведено в [2], інволюцію в кільці $\mathbb{C}[x]$ можна визначити такими попарно різними способами:

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum \bar{a}_k (-x)^k; \qquad (\alpha)$$

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum a_k (-x)^k; \qquad (\beta)$$

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum a_k \; x^k. \qquad (\gamma)$$

Для матриці $A(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ інволюція

$$A(x)^\nabla = \| a_{ij}(x) \|^\nabla = \| a_{ji}(x)^\nabla \| .$$

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x)^\nabla = A(x)$.

Основна мета даної роботи - пошук необхідних і достатніх умов для можливості зображення симетричної многочленної матриці у вигляді

$$A(x) = B(x)\, C(x)\, B(x)^\nabla , \qquad /1/$$

де $B(x)$ - регулярна матриця; $C(x) = C(x)^\nabla$ - симетрична матриця, а також побудова самої факторизації /1/.

Важливим є дослідження питання про можливість регуляризації деяких многочленних матриць, а тому розглянемо його докладніше. Многочленну матрицю $A(x)$ називатимемо регулярною, якщо в її запису у вигляді матричного многочлена $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$ старший коефіцієнт A_m - невироджена матриця, тобто $\det A_m \neq 0$. Будемо говорити, що многочленна матриця $A(x)$ регуляризується справа, якщо існує обернена над $\mathbb{C}(x)$ матриця $R(x)$ така, що $A(x)R(x)$ - регулярна матриця.

Щоб визначити умови регуляризації многочленних матриць, скористаємось результатами, наведеними в [1; 4].

Значенням многочленної матриці $G(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_m)^{k_m}$ називають числову матрицю

$$M_{G(x)}(\varphi) = \begin{Vmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_m \end{Vmatrix}, \quad H_i = \begin{Vmatrix} G(\alpha_i) \\ G'(\alpha_i) \\ \vdots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{Vmatrix},$$

де $G^{(j)}(x)$ - похідні порядку j від матриці $G(x)$; $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,k_i-1}$.

Нехай $\Phi(x) = diag(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$, $G(x)$ - многочленна матриця, рядки якої позначимо $g_1(x),\dots,g_n(x)$. Значенням многочленної матриці $G(x)$ на системі коренів елементів матриці $\Phi(x)$ називається матриця вигляду

$$M_{G(x)}(\Phi) = \begin{Vmatrix} M_{g_1(x)}(\varphi_1) \\ \dots\dots\dots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n) \end{Vmatrix}, \qquad /2/$$

де рядки $M_{g_i(x)}(\varphi_i)$ відсутні, якщо φ_i - многочлени нульового степеня.

Наприклад, відомо [5], що для кожної многочленної матриці $A(x)$ існують обернені над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)$ і $Q(x)$ такі, що

$$P(x)A(x)Q(x) = diag(\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_n(x)), \qquad /3/$$

де $\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x)$, $i=\overline{1,n-1}$.

Матрицю $S_A = diag(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x))$ називають канонічною діагональною формою матриці $A(x)$ або її формою Сміта.

З даних, наведених у [I; 4], видно, що многочленна матриця $A(x)$, для якої $deg\, det\, A(x) = nr$, регуляризується справа тоді і тільки тоді, коли

$$det\, M_{P(x)\| E,\ Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|}(S_A) \neq 0$$

для довільної оберненої матриці $P(x)$ із /3/.

Нехай $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$ - деяка симетрична в розумінні однієї із введених раніше інволюцій у $\mathbb{C}[x]$ многочленна матриця степеня $m \geq 2$. Припустимо, що форму Сміта матриці $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$S_A = \Phi(x) D(x) \Phi(x)^{\nabla}, \qquad /4/$$

де $\Phi(x) = diag(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$; $\varphi_i(x) | \varphi_{i+1}(x)$; $\sum_{i=1}^{n} deg\, \varphi_i = nr$; $D(x) = diag(d_1(x), \ldots, d_n(x))$; $d_i(x) | d_{i+1}(x)$; $i = \overline{1, n-1}$.

Відомо [2], що умова /4/ виконується тоді, коли кожний інваріантний множник $\varepsilon_i(x)$ матриці S_A або не має коренів на множині ∇-нерухомих точок Γ, або має їх, але кратність кожного такого кореня парна. Множина Γ визначена для кожного типу інволюцій. Так, у разі інволюції (α) множина Γ - уявна вісь $Re\, x = 0$, у разі інволюції (β) - це початок координат $x = 0$, а в разі інволюції (γ) - $\Gamma = \mathbb{C}$ - уся комплексна площина.

<u>Означення</u>. Зображення симетричної многочленної матриці у вигляді

$$A(x) = B(x) C(x) B(x)^{\nabla}, \qquad /5/$$

де $B(x)$ - регулярна матриця степеня $r \geq 1$ з формою Сміта $S_B = \Phi(x)$; $C(x) = C(x)^{\nabla}$ - деяка симетрична многочленна матриця з формою Сміта $S_C = D(x)$, називається припустимою факторизацією матриці $A(x)$, паралельною факторизації /4/ її форми Сміта S_A, тобто факторизація /5/ припустима тоді, коли форма Сміта многочленної матриці дорівнює добутку форм Сміта її співмножників.

Теорема I. Для симетричної многочленної матриці $A(x)$ має місце припустима факторизація /5/, паралельна факторизації /4/ її форми Сміта S_A тоді і тільки тоді, коли

$$\det M_{P(x)\|E,\ Ex,\dots,\ Ex^{r-1}\|}(\Phi) \neq 0, \qquad /6/$$

де $P(x)$ - довільна матриця із /3/.

Доведення. Необхідність: Якщо для матриці $A(x)$ має місце факторизація /5/, паралельна факторизації /4/ її форми Сміта S_A, то це означає, що матриця $A(x)$ має лівий регулярний множник $B(x)$ степеня r, причому $S_A = S_B\, S_{CB^\nabla}$, а тому згідно з результатами з [4; 6] виконується умова /6/.

Достатність: Нехай для форми Сміта многочленної матриці $A(x)$ має місце факторизація /4/. Тоді

$$A(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)\, D(x)\, \Phi(x)^\nabla Q^{-1}(x). \qquad /7/$$

Оскільки $P(x)$ і $Q(x)$ - обернені над $\mathbb{C}[x]$ матриці, то існує обернена над $\mathbb{C}[x]$ матриця $S(x)$ така, що $P(x)^\nabla = Q(x)\, S(x)$, а саме: $S(x) = Q^{-1}(x) P(x)^\nabla$. Для матриці $S(x)$ існує обернена над $\mathbb{C}[x]$ матриця $H(x)$, така, що

$$H(x)\Phi(x)^\nabla = \Phi(x)^\nabla S(x), \qquad /8/$$

причому матриця $H(x)$ не обов'язково многочленна, тобто її елементами можуть бути раціональні функції від x.

Із (7) і (8) дістаємо

$$A(x) = P^{-1}(x)\ \Phi(x)\, D(x)\, H(x)\Phi(x)^\nabla (P(x)^\nabla)^{-1}.$$

8 - 207

Звідси, ураховуючи очевидну рівність $(P(x)^{\nabla})^{-1} = P^{-1}(x)^{\nabla}$, дістаємо

$$A(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)D(x)H(x)\Phi(x)^{\nabla}P^{-1}(x)^{\nabla}. \quad /9/$$

Покажемо, що $D(x)H(x)$ - многочленна матриця. Ураховуючи рівність /8/, бачимо, що $D(x)H(x) = \Phi(x)^{\nabla}S(x)(\Phi(x)^{\nabla})^{-1}$. Оскільки $S(x)$ - многочленна матриця і в матриці $\Phi(x)^{\nabla}$ елементи задовольняють умову $\varphi_i(x)^{\nabla} \mid \varphi_{i+1}(x)^{\nabla}$, то в матриці $H' = D(x)H(x)$ при $i \geqslant j$ усі елементи h'_{ij} - многочлени. Із рівності /9/, ураховуючи, що $A(x) = A(x)^{\nabla}$ - симетрична матриця і $\det P^{-1}(x)\Phi(x) \neq 0$, випливає таке: $D(x)H(x)$ - симетрична матриця, а тому елементи матриці $D(x)H(x)$ є многочленами при $i \leqslant j$.

Умова /6/ означає, що матриця $P^{-1}(x)\Phi(x)$ регуляризується справа, тобто існує обернена над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$ така, що $P^{-1}(x)\Phi(x)R(x) = B(x)$ - регулярна многочленна матриця степеня z з формою Сміта $\Phi(x)$. Тоді з /9/ дістаємо

$$A(x) = B(x)R^{-1}(x)D(x)H(x)R^{-1}(x)^{\nabla}B(x)^{\nabla}. \quad /10/$$

Нехай $R^{-1}(x)D(x)H(x)R^{-1}(x)^{\nabla} = C(x)$. Оскільки $D(x)H(x)$ - симетрична многочленна матриця, то $C(x) = C(x)^{\nabla}$ - многочленна матриця з формою Сміта $D(x)$, тобто доведено існування припустимої факторизації для $A(x)$, паралельної факторизації /4/. Отже, теорему I доведено.

Наслідок I. Нехай $A(x)$ - регулярна симетрична многочленна матриця степеня $m = 2z$, форму Сміта якої можна подати у вигляді

$$S_A = \Phi(x)I\Phi(x)^{\nabla}, \quad /11/$$

де $\Phi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = \overline{1, n-1}$, $I = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$.

Для матриці $A(x)$ має місце припустима факторизація

$$A(x) = B(x)\, C\, B(x)^{\nabla}, \quad C = C^{\nabla},$$

паралельна факторизації /II/ тоді і тільки тоді, коли виконується умова /6/, де $\Phi(x)$ - матриця з /II/.

Многочленну матрицю $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i\, x^i$ називають унітальною, якщо $A_m = E$ - одинична матриця. Ураховуючи результати з [I; 7], дістаємо таку теорему.

<u>Теорема 2</u>. У припустимій факторизації /5/ многочленної матриці $A(x)$, паралельної факторизації /4/, унітальний множник $B(x)$ єдиний із формою Сміта $\Phi(x)$.

З [I; 4] легко побачити, що за умов теорем I і 2 коефіцієнти многочленної матриці $B(x) = Ex^{r} - B_1 x^{r-1} - \ldots - B_r$ можна знайти за формулою

$$\left\| \begin{matrix} B_r \\ \vdots \\ B_1 \end{matrix} \right\| = \left(M_{P(x)\|E,\, Ex, \ldots,\, Ex^{r-1}\|}^{\;(\Phi)} \right)^{-1} M_{P(x)x^{r}}^{(\Phi)}. \qquad /12/$$

Зауважимо, що коли $A(x)$ - дійсна симетрична многочленна матриця, для якої інволюції (α) і (β), очевидно, збігаються, то, враховуючи результати, наведені в [4], бачимо, що коли у факторизації /4/ всі елементи з $\mathbb{R}[x]$, то умова /6/ є необхідною і достатньою умовою факторизації /5/, де

$$B(x),\ C(x) \in M_n(\mathbb{R}[x]).$$

<u>Наслідок 2</u>. Із теорем I і 2 при $r = 1$ на підставі узагальненої теореми Безу [5] дістанемо необхідні й достатні умови існування розв'язку матричного рівняння

$$X^m A_m + X^{m-1} A_{m-1} + \ldots + X A_1 + A_0 = 0 \qquad /13/$$

у таких випадках: I/ усі матриці A_{2k} ермітові, а всі A_{2k+1} - антиермітові, що відповідає інволюції (α) матриці $A(x)$;

8*

2/ усі матриці A_{2k} симетричні, а всі A_{2k+1} - кососиметричні /інволюція (β) /; 3/ усі матриці симетричні /інволюція (γ) /.

Матриця $X = B$, яка є розв'язком рівняння /13/, єдина із жордановою формою, що визначається діагональним дільником $\Phi(x)$ форми Сміта, яка відповідає рівнянню /13/ многочленної матриці $A(x)$. Щоб знайти цей розв'язок, можна використати формулу /12/ при $r = 1$. Зауважимо, що коли B - розв'язок рівняння /13/, то матриця B^{∇} - розв'язок рівняння

$$A_m X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \dots + A_1 X + A_0 = 0$$

за таких самих умов, що накладені на коефіцієнти A_i.

Покажемо, що для регулярних симетричних многочленних матриць узагальнюються результати робіт [5; 8], які стосуються строгої еквівалентності та конгруентності матриць. Нехай $A(x)$ і $B(x)$ - регулярні многочленні матриці степеня m. Якщо для $A(x)$ і $B(x)$ існують обернені над $\mathbb{C}$ матриці P і Q, тобто $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$, такі, що $B(x) = PA(x)Q$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються строго еквівалентними. Якщо ж для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існує обернена над $\mathbb{C}$ матриця T така, що $B(x) = T^{\nabla} A(x) T$, де ∇ - інволюція в кільці $\mathbb{C}(x)$, задана одним із розглянутих раніше трьох способів, то многочленні матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються конгруентними. Очевидно, що кожна пара конгруентних матриць є парою строго еквівалентних матриць. Обернене твердження неправильне, але має місце такий результат.

Теорема 3. Якщо регулярні симетричні многочленні матриці $A(x)$ і $B(x)$ строго еквівалентні, то вони конгруентні.

Доведення. Нехай має місце рівність

$$B(x) = PA(x)Q \qquad /14/$$

за деяких $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$; $B(x)^{\nabla} = B(x)$ та $A(x)^{\nabla} = A(x)$.

Тоді $B(x)^{\nabla} = Q^{\nabla} A(x)^{\nabla} P^{\nabla}$ і, враховуючи симетричність матриць $A(x)$, $B(x)$, дістаємо

$$B(x) = Q^{\nabla} A(x) P^{\nabla} . \qquad /15/$$

Із /14/ і /15/ знаходимо

$$A(x) Q P^{\nabla -1} = P^{-1} Q^{\nabla} A(x). \qquad /16/$$

Позначивши U матрицю $QP^{\nabla -1}$, рівність /16/ запишемо так:

$$A(x) U = U^{\nabla} A(x). \qquad /17/$$

Із рівності /17/ дістаємо:

$$A(x) U^{k} = (U^{\nabla})^{k} A(x), \quad k \in N .$$

Отже,

$$A(x) S = S^{\nabla} A(x), \qquad /18/$$

де $S = f(U)$: $f(x)$ - довільний многочлен із $C[x]$.

Виберемо $f(x)$ так, щоб $\det S \neq 0$. Тоді з /18/ знайдемо

$$A(x) = S^{\nabla} A(x) S^{-1}. \qquad /19/$$

Підставляючи /19/ у /14/, дістаємо

$$B(x) = P S^{\nabla} A(x) S^{-1} Q. \qquad /20/$$

Співвідношення /20/ буде перетворенням конгруентності, якщо $(PS^{\nabla})^{\nabla} = S^{-1} Q$, тобто $SP^{\nabla} = S^{-1} Q$. Звідси $S^2 = QP^{\nabla -1}$, тобто $S^2 = U$. Із [5; 8] відомо, що матриця $S = f(U)$ буде задовольняти це рівняння, якщо $f(x)$ - інтерполяційний многочлен для функції $\sqrt{x}$ на спектрі матриці U, причому, оскільки $\det S \neq 0$, а тому і $\det U \neq 0$, то такий $f(x)$ існує. Отже, нехай $T = S^{-1}Q = \sqrt{P^{\nabla} Q^{-1}}\, Q = \sqrt{P^{\nabla} Q}$. Тоді $B(x) = T^{\nabla} A(x) T$. Теорему 3 доведено.

Список літератури

1. Казимирський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук.думка, 1981. – 224 с.

2. Любачевский Б.Д. Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. Ч. I // Сибирск.математ.журн., 1973. – XIV. – № 2. – С. 337–356.

3. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, 1970.

4. Щедрик В.П. Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена // Укр.математ.журн., 1987. – 39. – № 3. – С. 370–373.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.

6. Казимирський П.С., Зеліско В.Р. Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – К.: Наук.думка, 1977. – С. 52–61.

7. Зеліско В.Р. Єдиність унітальних дільників матричного многочлена // Вісн.Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат., 1988. – Вип. 30. – С. 36–38.

8. Икрамов Х.Д. Матричные пучки: Теория, приложения, численные методы // Итоги науки и техники. Сер. математ.анализ. – М., 1991. – 29. – С. 3–106.

УДК 515.12

Р.Є.Кокорузь, Є.Я.Пенцак

ПРО ГЛАДКІ СТРУКТУРИ НА $\mathbb{R}^\infty$-МНОГОВИДАХ

Символом $\mathbb{R}^\infty$ позначається пряма межа послідовності

$$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \to \dots ,$$

де вкладення $i_n: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ діє за формулою $i_n(x_1,\dots ,x_n) = (x_1,\dots ,x_n,0)$. У даному разі ототожнюємо $\mathbb{R}^\infty$ з множиною фінітних послідовностей $\{(x_1, x_2,\dots) \mid x_i = 0$ для всіх i, крім скінченного числа$\}$; при цьому $\mathbb{R}^n$ ототожнюємо з підмножиною $\{(x_1,\dots, x_n, 0,\dots, 0\dots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$.

Сепарабельний паракомпактний простір X називається $\mathbb{R}^\infty$-многовидом, якщо його точка має окіл, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^\infty$. Топологічні властивості $\mathbb{R}^\infty$-многовидів досліджувались, зокрема, в [I; 2]. У [3] Санаї розглянув кусково-лінійну структуру на $\mathbb{R}^\infty$-многовидах.

Один із способів уведення гладкої структури на $\mathbb{R}^\infty$-многовиді запропоновано Ремпалом [4].

Означення [4]. Многовидом із фільтрацією /фільтр-многовидом/ називається топологічний простір M_∞ разом з відокремленою послідовністю підпросторів $\{M_i\}_{i\geq 0}$ такою:

/I/ що M_i - гладкий замкнений скінченновимірний многовид;

/2/ M_i - гладкий замкнений підмноговиду M_{i+1};

/3/ $M_\infty = \varinjlim \{M_i, j_i\}$, де $j_i : M_i \to M_{i+1}$ -включення.

Для фільтра-многовиду M_∞ використовується запис $M_\infty = \varinjlim M_i$.

Відображення $f: N_\infty \to N_\infty$ фільтр-многовидів називається гладким, якщо для кожного $i \geq 0$ існує $\alpha(i) \geq 0$ таке, що $f(M_i) \subset N_{\alpha(i)}$ і відображення $f_i = f|M_i : M_i \to N_{\alpha(i)}$ гладке.

У подальшому вважатимемо, що послідовність $\{\dim(N_i)\}$ строго монотонно зростає. У цьому разі з [4, лема 2] випливає, що M_∞ - $\mathbb{R}^\infty$- многовид.

Твердження I. На кожному $\mathbb{R}^\infty$-многовиді існує структура фільтра-многовиду.

Доведення. Кожний $\mathbb{R}^\infty$-многовид M припускає відкрите вкладення $f: M \to \mathbb{R}^\infty$ [I]. Існує послідовність компактних підмножин $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ у M, для якої $f(K_i) \subset \mathbb{R}^i \subset \mathbb{R}^\infty$; $M = \cup \{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Індукцією за i легко побудувати послідовність замкнених гладких підмноговидів $N_i \subset f(M) \cap \mathbb{R}^{i+1}$, для яких $f(K_i) \subset N_i \subset N_{i+1}$. Тоді $(f^{-1}(N_i))$ - фільтрація для M.

Результат, наведений далі, можна розглядати як обернений до сформульованого твердження.

<u>Теорема I</u>. Нехай $M = \varinjlim M_i$ - фільтр-многовид. Тоді існує гладке відкрите вкладення $j: M \to \mathbb{R}^{\infty}$.

<u>Доведення</u>. Нехай $i_1 = 1$. Згідно з теоремою Уітні про вкладення [5] існує вкладення $j_1 : M_{i_1} \to \mathbb{R}^{k_1}$, де $k_1 = 2\dim \times M_{i_1} + 1$. Оскільки образ $j_1(M_{i_1})$ - гладкий підмноговид у $\mathbb{R}^{k_1}$, то згідно з теоремою про трубчастий окіл [5] існує компактний трубчастий окіл U_{k_1} підмноговиду $j_1(M_{i_1})$, локально тривіально розшарований над $j_1(M_{i_1})$ відображенням $p: U_{k_1} \to j_1(M_{i_1})$. Існує скінченне відкрите покриття $\{W_1, \dots, W_\ell\}$ підмноговиду $j_1(M_{i_1})$ стягуваними відкритими в $j_1(M_{i_1})$ множинами, над якими розшарування p тривіальне. Нехай $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ - гладке розбиття одиниці на $j_1(M_{i_1})$, для якого $supp(\alpha_i) \subset W_i$. Ототожнюємо p з розшаруванням одиничних куль над $j_1(M_{i_1})$.

Існує скінченна послідовність $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_\ell$; $\beta_1 > i_1 = \beta_0$, для якої $\dim M_{\beta_{q+1}} - \dim M_{\beta_q} \geq k_1 - \dim M_{i_1}$, $0 \leq q \leq \ell-1$.

Нехай V_q - трубчастий окіл підмноговиду M_{β_q} в $M_{\beta_{q+1}}$, $0 \leq q \leq \ell-1$; $s_q : V_q \to M_{\beta_q}$ - відповідне розшарування, яке трактуємо як векторне. Для кожного q, $0 \leq q \leq \ell-1$ зафіксуємо гладке пошарове лінійне вкладення h_ℓ множини $p^{-1}(W_{\ell+1})$ в $s_\ell^{-1}(j_1^{-1}(W_{\ell+1}))$, для якого $h_\ell(p^{-1}(W_{\ell+1})) \subset V_\ell \setminus V_{\ell-1}$ при $\ell \geq 1$. Нарешті, відображення $m_1 : U_{i_1} \to V_\ell \subset M_{\beta_\ell}$ задамо формулою $m_1(x) = \sum_{i=1}^{\ell} h_{\ell-1}\alpha_\ell(x)$, $x \in U_{i_1}$.

Легко переконатись, що відображення m_1 - гладке вкладення. Нехай $M_{i_2} = M_{\beta_\ell}$. Легко побачити, що існує гладке вкладення $j_2 : M_{i_2} \to \mathbb{R}^{k_2}$, де $k_2 > k_1$, і комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd} M_{i_1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_1"'] & M_{i_2} \arrow[d, "j_2"] \\ \mathbb{R}^{k_1} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "m_1"] & \mathbb{R}^{k_2} \end{tikzcd}$$

Продовжуючи побудову, дістаємо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd} M_{i_1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_1"'] & M_{i_2} \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_2"] & M_{i_3} \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_3"] & \dots \\ U_{i_1} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "m_1"] & U_{i_2} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "m_2"] & U_{l_3} \arrow[r, hook] & \dots \\ \cap & \cap & \cap & \\ \mathbb{R}^{k_1} \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^{k_2} \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^{k_3} \arrow[r, hook] & \dots \end{tikzcd}$$

Тут U_{i_p} - околи підмноговидів $j_p(M_{i_p})$, $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$

Звідси дістаємо, що відображення $j = \varinjlim j_p$ гладко вкладає $M = \varinjlim \{M_{i_p}\}$ в $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \{\mathbb{R}^{k_p}\}$. Крім того, $j(M) = \varinjlim \{U_{l_p}\}$ - відкрита підмножина в $\mathbb{R}^\infty$. Отже, теорему I доведено.

<u>Теорема 2</u>. Нехай $M = \varinjlim M_i$ - фільтр-многовид. Тоді існує гладке замкнене вкладення $j: M \to \mathbb{R}^\infty$.

<u>Доведення</u>. Згідно з теоремою I можна вважати, що $M \subset \mathbb{R}^\infty$ - відкрита множина. Нехай $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ - послідовність компактів така, що $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$; $K_i \subset M_i$. Існує гладке відображення $\varphi_i: M \to \mathbb{R}$ таке, що $\varphi_i | K_i \equiv 0$, $\varphi_i(x) > 0$, якщо $x \in M_i \setminus K_i$. Означимо відображення $\varphi: M \to \mathbb{R}^\infty$ формулою $\varphi(x_1, x_2, \dots) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1, x_2), \dots)$, $(x_1, x_2, \dots) \in M$. Відображення φ означене коректно, оскільки для кожного $x \in M$ іс-

нує $i \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in K_i$, а тому $\varphi_j(x) = 0$ для всіх $j \geq i$ і $\varphi(x) \in \mathbb{R}^\infty$. Крім того, кожна множина $\varphi(M) \cap \mathbb{R}^i = \varphi_1(K_{i+1} \cap M_1) \times \varphi_2(K_{i+1} \cap M_2) \times \ldots \times \varphi_i(K_{i+1} \cap M_i) \subseteq \mathbb{R}^i$ компактна.

Означимо відображення $\psi: M \to \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \cong \mathbb{R}^\infty$ формулою $\psi(x) = (x, \varphi(x))$, $x \in M$. Оскільки відображення φ замкнене і власне /тобто прообраз компакту при відображенні φ є компактом/, то відображення ψ – замкнене вкладення.

Теорема 3. Нехай $f: M \to N$ – гомотопійна еквівалентність фільтр-многовидів. Тоді відображення f гомотопне дифеоморфізму.

Доведення. Нехай $M = \varinjlim M_i$, $N = \varinjlim N_j$ – фільтровані многовиди. Покладемо $m_1 = 1$ і, як у доведенні теореми I, знайдемо $n_1 \in \mathbb{N}$ і вкладення $f_1: M_{m_1} \to N_{n_1}$, для яких $f(M_{m_1}) \subset N_{n_1}$ і відображення $f \mid M_{m_1}$ і f_1 гомотопні так само, як відображення в N_{n_1}. Позначаючи $g: N \to M$ гомотопійно обернене до f відображення, дістаємо, що існує гладке вкладення $g_1: N_{n_1} \to M_{m_2}$ за деякого $m_2 > m_1$, для якого виконано такі умови: відображення g_1, $g \mid N_{n_1}$ гомотопні як відображення в M_{m_2} і $g \mid f(M_{m_1}) = f^{-1} \mid f(M_{m_1})$.

Продовжуючи цей процес, знаходимо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
M_{m_1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_1"] & M_{m_2} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_2"] & M_{m_3} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_3"] & \ldots \\
N_{n_1} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "g_1"] & N_{n_2} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "g_2"] & N_{n_3} \arrow[r, hook] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Звідси випливає, що відображення $f' = \varinjlim \{f_i\}: \varinjlim \{M_{m_i}\} = M \to N = \varinjlim \{N_{n_i}\}$ є дифеоморфізмом з оберненим $g' = \varinjlim \{g_i\}$. Гомотопність відображень f і f' випливає з результатів, наведених у [6]. Отже, теорему доведено.

Наслідок I. На кожному фільтр-многовиді гладка структура єдина з точністю до дифеоморфізму.

Наслідок 2 /стабільність/. Кожний фільтр-многовид M дифеоморфний фільтр-многовиду $M \times \mathbb{R}^\infty$.

Список літератури

1. Sakai K. On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds// Topol. Appl., 1984.- V. 18. - N1. - P. 69-80.

2. Sakai K. On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds II// Infinite deficiency // Tsukuba J. Math., 1984. - V. 8. - N1 - P. 101-118.

3. Sakai K. Each $\mathbb{R}^\infty$-manifold has a unique piecewise linear $\mathbb{R}^\infty$-structure // Proc. Amer. Math. Soc., 1984. - V. 90. - N4. - P. 616-618.

4. Rempala J.A. On a class of infinite-dimensional manifolds // Bull. Acad. Pol. sci. Ser. sci. math., astr. et phys., 1974. - V. 22. - N5. - P. 533-537.

5. Хирш М. Дифференциальная топология. - М.: Мир, 1979. - 280 с.

6. Hansen V. L. Some theorem on direct limits of expanding sequences of manifolds // Math. Scandinavica, 1971. - V. 29. - N1. - P. 5-36.

УДК 515.12

О.Р.Никифорчин

ПРИРОДНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУНКТОРА ЙМОВІРНІСНИХ МІР НА ОПУКЛИХ КОМПАКТАХ ТА БЛИЗЬКІ ПИТАННЯ

Нагадаємо конструкцію функтора ймовірнісних мір на категорії компактів $Comp$ /детальніше див. [1]/. Позначимо PX простір додатно визначених нормованих лінійних функціоналів на банаховому просторі $C(X)$ неперервних функцій на компакті X, наділений $*$ - слабкою топологією. За теоремою Ріса [2] елементи простору

PX ототожнюються з імовірнісними мірами на X. Для відображення $f: X \to Y$ відображення $Pf: PX \to PY$ задається так: $Pf(m)(\varphi) = m(\varphi \circ f)$, $m \in PX$, $\varphi \in C(Y)$. Легко побачити, що P-функтор у категорії $Comp$.

Позначимо P_{Conv} звуження функтора P на категорію $Conv$, об'єктами якої є опуклі компакти, а морфізмами - афінні неперервні відображення. Надалі P_{Conv} розглядається як функтор з $Conv$ у $Comp$.

Для кожного $x \in X$ позначимо δ_x міру Дірака, зосереджену в точці x: $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$. Відображення $\eta_X: X \to PX$, $\eta_X(x) = \delta_x$, $x \in X$ є вкладенням.

Для кожного X позначимо P^2X простір PPX. Відображення $\psi_X: P^2X \to PX$ означимо формулою $\psi_X(\mu)(\varphi) = \mu(\bar{\varphi})$, $\varphi \in C(X)$, $\mu \in P^2X$, де $\bar{\varphi} \in C(PX)$ - функція, для якої $\bar{\varphi}(m) = m(\varphi)$, $m \in PX$.

Відображення η_X та ψ_X є компонентами природних перетворень: $\eta: Id \to P$, $\psi: P^2 \to P$, $\eta_{Conv}: I_{Conv} \to P_{Conv}$, де I_{Conv} - "забуваючий" функтор з $Conv$ у $Comp$.

У [3] показано, що η і ψ - єдині природні перетворення відповідно з Id у P та з P^2 у P. У даній праці побудовані сім'ї природних перетворень з P_{Conv} у себе, параметризовані деякими топологічними просторами, чим одночасно розв'язано питання про нетривіальні природні перетворення з P^2 у себе. Показано, що поряд із стандартною опуклою структурою просторам PX /де X - опуклий компакт/ притаманна додаткова структура C-опуклості.

§ I. Допоміжні результати

Зауважимо, що базу $*$-слабкої топології в просторі PX утворюють множини вигляду $O\langle m, f_1, \ldots, f_k, \varepsilon\rangle = \{m' \in PX \mid |m'(f_i) - m(f_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, k\}$, де $m = PX$, $f_1, \ldots, f_k \in C(X)$, $\varepsilon > 0$.
Простір PX є підпростором простору M^+X додатно означених

функціоналів на $C(X)$, які називатимемо просто мірами. База $*$-слабкої топології на M^+X має такий самий вигляд. Якщо в подальшому розглядатимуться неймовірнісні міри, це буде обумовлено особливо. Позначимо $\|m\| = m(1_X)$, $m \in M^+X$. Наведена далі лема легко випливає з відомих результатів [4].

Лема I.I. Нехай A - всюди щільна підмножина компакта X і задане відображення $f\colon A \to PY$ для деякого компакта Y. Для існування й єдиності неперервного продовження $f\colon X \to PY$ відображення f необхідно і достатньо, щоб для довільної функції $\varphi \in C(Y)$ і довільних $\varepsilon > 0$, $x \in X$ існував окіл $O_{\varepsilon.x}$ точки x такий, що $|f(x_1)(\varphi) - f(x_2)(\varphi)| < \varepsilon$ для кожних $x_1, x_2 \in O_{\varepsilon.x} \cap A$.

Лема I.2. Нехай $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ - послідовність неперервних відображень з компакта X у PY /де Y - компакт/ і A - всюди щільна підмножина в X. Якщо для кожного $\varphi \in C(Y)$ послідовність $\{f_i(x)(\varphi)\}$ збігається рівномірно за $x \in A$ до деякого $f(x)(\varphi)$ /$f\colon A \to PY$ - відображення/, то існує неперервне продовження $\bar{f}\colon X \to PY$ відображення f таке, що послідовність $\{f_i(x)(\varphi)\}$ збігається рівномірно за $x \in X$ до $\bar{f}(x)(\varphi)$ для кожного $\varphi \in C(Y)$.

Доведення очевидне.

Означення I.I. Вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ назвемо зрівноваженим, якщо $x_1 + \dots + x_n = 0$. На підпросторі зрівноважених векторів $L_n \subset \mathbb{R}^n$ розглядаємо норму $\|x\| = max\{|x_i| \mid 1 \le i \le n\}$. Зрівноважений вектор x назвемо симетричним, якщо вектор $-x$ можна отримати з x деякою перестановкою координат.

Лема I.3. Для кожного зрівноваженого вектора $a \in L_n$, $n \geq 2$ існує не більше від $2n-3$ симетричних векторів $a_1, \dots, a_k$ таких, що виконується таке: $\|a\| = \|a_1\| + \dots + \|a_k\|$, $a = a_1 + \dots + a_k$.

Доведення. Для $n=2$ або $a=0$ твердження очевидне, тому в подальшому вважатимемо, що $n \geqslant 3$; $a \neq 0$. Нехай $a=(x_1,\dots$ $\dots, x_n)$. Позначимо p /відповідно q/ число координат, які дорівнюють $\|a\|$ /відповідно $-\|a\|$/, і нехай ці координати розташовані на місцях $i_1,\dots,i_p$ /відповідно $j_1,\dots,j_q$/. Розглянемо два випадки.

I. Нехай $p=q$. Покладемо $c_1=max\{x_i \mid 1\leq i\leq n\}$;

$$c_2=max\{x_i \mid 1\leq i\leq n,\ x_i<c_1\};\ c_3=min\{x_i \mid 1\leq i\leq n\};$$

$$c_4=min\{x_i \mid 1\leq i\leq n,\ x_i>c_3\};\ c=min\{c_1-c_2,\ c_4-c_3\}.$$

Нехай a_1 – вектор, в якого координати з номерами $i_1,\dots$ $\dots, i_p$ дорівнюють c, а координати з номерами $j_1,\dots,j_p$ дорівнюють $-c$, решта координат нульові. Тоді вектор a_1 симетричний і маємо $a=\|a_1\|+\|a_1'\|$, де $a_3'=a-a_1$.

2. Нехай $p\neq q$. Припустимо для визначеності, що $p>q$. Очевидно, що число від'ємних координат вектора a, які не дорівнюють $-\|a\|$, перевищує $p-q$. Виберемо з них $p-q$, менші за модулем, припустимо, на місцях з номерами $j_{q+1},\dots,j_p$. Означимо c_1, c_2, c_3, c_4. Як у випадку I, покладемо $c_5=$ $=max\{x_i \mid 1\leq i\leq n,\ x_i<0\}$, $c=min\{c_1-max\{c_2,0\},\ min\{c_4,0\}-$ $-c_3,-c_5\}$. Тоді $c\neq 0$ і вектор a_1, означений так само, як у випадку I, симетричний і $\|a\|=\|a_1\|+\|a_1'\|$, де $a_1'=a-a_1$.

В обох випадках число нульових координат, а також число координат, які дорівнюють за модулем нормі вектора, для вектора a_1' не менші за відповідні числа для вектора a, причому хоча б одне з них більше.

Виконуючи аналогічні міркування, дістаємо $a_1'=a_2+a_2'$, $a_2'=a_3+a_3'$ і т.д. Враховуючи виконані зауваження, отримуємо твердження леми.

Лема I.4. Нехай $a=(x_1,\dots,x_n)$ – зрівноважений вектор; $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ – невід'ємні числа такі, що $\lambda_1+\dots+\lambda_k=1$. Утворимо зрівноважений вектор $\bar{a}$ за формулою $\bar{x}_{\ell_1+(\ell_2-1)\cdot n+\dots+(\ell_k-1)n^{k-1}}=\lambda_1 x_{\ell_1}+\dots+\lambda_k x_{\ell_k}$, де $1\leq \ell_1,\dots,\ell_k\leq n$. Зауваження: із симетричності a випливає симетричність $\bar{a}$.

Для довільного зрівноваженого вектора a і чисел $\lambda_1, \dots$ $\dots, \lambda_k \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ середнє арифметичне модулів координат вектора $\bar{a}$ не перевищує норми вектора a, помноженої на $\sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2}$.

Доведення. На підставі леми I.3 це досить довести лише для симетричного вектора a. Користуючись відомим співвідношенням між середнім арифметичним та середнім квадратичним, необхідне твердження можна вивести з нерівності

$$\sqrt{\frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n^k} \bar{x}_i^{\,2}} \leq \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Згідно з даним означенням

$$\sqrt{\frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n^k} \bar{x}_i^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{n^k} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} (\lambda_1 x_{i_1} + \dots + \lambda_k x_{i_k})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^k} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} (\lambda_1^2 x_{i_1}^2 + \dots + \lambda_k^2 x_{i_k}^2)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2}.$$

Друга рівність випливає із симетричності вектора a. Отже, лему доведено.

Лема I.5. Кожний многочлен від n змінних $x_1, \dots, x_n$, $n \in N$ може бути поданий у вигляді суми скінченного числа многочленів однієї змінної, аргументами яких є лінійні комбінації змінних $x_1, \dots, x_n$.

Доведення. Позначимо A множину многочленів, які можуть бути подані так. Очевидно, A містить усі константи й одночлени $x_1, \dots, x_n$. Якщо $f_1, f_2 \in A$, то випливають такі властивості: I/ $f_1 + f_2 \in A$; 2/ $f_1 f_2 = A$. Властивість I очевидна. Доведемо властивість 2. Для цього досить показати, що для довільних $k, \ell \in N$ маємо $x_1^k x_2^\ell \in A$. Але $x_1^k x_2^\ell =$ $= x_1^{k+\ell} t^{2}$, де $t = \frac{x_2}{x_1}$. Система функцій $t^{k+\ell}$, $(t+1)^{k+\ell}, \dots, (t+k+\ell)^{k+\ell}$ є базою в лінійному просторі многочленів від змінної t степеня $k + \ell$. Отже,

$$t^2 = \sum_{i=0}^{k+l} a_i (t+i)^{k+l};$$

$$x_1^k x_2^l = x_1^{k+l} \sum_{i=0}^{k+l} a_i \left(\frac{x_2}{x_1}+i\right)^{k+l} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+l} a_i (x_2 + i x_1)^{k+l}.$$

Звідси випливає, що добуток двох многочленів від змінних $x_1, \dots, x_n$, а отже, і від лінійних комбінацій змінних $x_1, \dots, x_n$ є сумою многочленів від деяких інших лінійних комбінацій. Отже, A збігається з усім кільцем многочленів від змінних $x_1, \dots, x_n$.

Наслідок. Множина A всюди щільна в $C(I^n)$ -просторі неперервних функцій на n-вимірному декартовому кубі I^n.

Лема I.6. Для довільного опуклого компакта X - множина функцій, що є скінченною сумою многочленів однієї змінної від неперервних на X афінних функціоналів із значеннями в I, всюди щільна в $C(X)$.

Доведення. Множина функцій, що залежать від скінченного числа координат, всюди щільна в $C(I^\tau)$, де I^τ - довільний тихонівський куб. Довільний опуклий компакт X афінно вкладається в деякий куб I^τ і згідно з теоремою Брауера - Тітце - Урисона кожна неперервна на X функція продовжується до деякої функції, неперервної на I^τ /детальніше див. [I, с. I6-I7; 5, с. 63-72]/. Об'єднання цих фактів в наслідком леми I.5 закінчує доведення.

Лема I.7. Нехай X - опуклий компакт; $\mathcal{T}$ - сукупність неперервних афінних функціоналів з X у I. Кожна міра $m \in PX$ однозначно визначається сукупністю $(m' \in PI \mid m' = Pl(m), l \in \mathcal{T})$.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ довільне. Для довільної $f \in C(X)$ згідно з лемою I.6 існують многочлени $p_1, \dots, p_k$ і лінійні неперервні функціонали $l_1, \dots, l_k$, $k \in \mathbb{N}$ такі, що

$$\| f - \sum_{i=1}^{k} p_i(l_i) \| < \varepsilon. \text{ Тоді } | m(f) - \sum_{i=1}^{k} m(p_i(l_i)) | < \varepsilon.$$

Але $m(p_i(l_i)) = Pl_i(m)\,(p_i)$ відоме для довільних l_i, p_i. Отже, $m(f)$ визначається з довільною точністю, що закінчує доведення.

Означення I.2. Відомо, що кожна міра $m \in PI$ однозначно визначається функцією $\Phi: \mathbb{R} \to I$, $\Phi(y) = m(\{x \in]-\infty, y] \cap I\})$.

Нехай X – опуклий компакт; $e: X \to I$ – афінний неперервний функціонал. Задамо функцію розподілу міри $m \in PX$ формулою $\Phi_{e,m}(y) = m(\{x \in X \mid e(x) \leq y\})$.

Лема I.8. Кожна міра $m \in PX$, де X – опуклий компакт, однозначно визначається сукупністю функцій розподілу.

Доведення очевидне.

Зауваження. Леми I.7 і I.8 без змін переносяться на випадок $m \in M^+X$.

Докладніше поняття носія міри, характеристичної та квазіхарактеристичної функції, властивостей регулярності міри та інші розглянуто в [I].

Означення I.3 . Нехай $m \in M^+X$, F – замкнена множина в компакті X, $C_+(X) = \{f \in C(X) \mid f(x) \geq 0,\ x \in X\}$.

Позначимо $m|_F$ функціонал на $C_+(X)$, заданий формулою

$$m|_F(f) = \inf_{\psi \in X(F)} m(\psi f), \quad f \in C_+(X).$$

Продовжимо цей функціонал на $C(X)$, поклавши $m|_F(f_1 - f_2) = m|_F(f_1) - m|_F(f_2)$.

Твердження I.I .

I. Дане означення є повним і коректним.

2. Для довільних $f_1, f_2 \in C(X)$, $c_1 c_2 \in \mathbb{R}$ маємо

$$m|_F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 m|_F(f_1) + c_2 m|_F(f_2).$$

3. Для довільної $f \in C_+(X)$: $0 \leq m|_F(f) \leq m(f)$.

Зауваження. З пп.I-3 твердження I.I випливає, що $m|_F \in M^+X$.

4. $\| m|_F \| = m(F)$.

5. Для довільних $m_1, m_2 \in M^+X$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ маємо

$$(c_1 m_1 + c_2 m_2)|_F = c_1 m_1|_F + c_2 m_2|_F.$$

6. $m_F(f) = \inf\limits_{\psi \in \varkappa X(F)} m(\psi f)$, $f \in C_+(X)$.

7. $(m|_F)|_G = m|_{F \cap G} = (m|_G)|_F$ / F, G замкнені/.

8. $supp\,(m|_F) \subset F$.

Доведення. I. Для довільної $f \in C(X)$ покладемо $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$, $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$. Маємо $f^+, f^- \in C_+(X)$, $f = f^+ - f^-$. Нехай $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \in C_+(X)$. Очевидно, що $f_1 \geq f^+$, $f_2 \geq f^-$; $f_1 - f^+ = f_2 - f^- \geq 0$.

Отже,

$$m|_F(f_1) - m|_F(f_2) = m|_F(f^+ + (f_1 - f^+)) - m|_F(f^- + (f_2 - f^-)) =$$

$$= m|_F(f^+) - m|_F(f^-) + m|_F(f_1 - f^+) - m|_F(f_2 - f^-) = m|_F(f^+) - m|_F(f^-).$$

П.7 твердження I.I випливає з того, що для довільної $\psi \in \varkappa X \times$ $\times (F \cap G)$ існують функції $\psi_1 \in X(F)$, $\psi_2 \in X(G)$ такі, що $\psi_1 \psi_2 \leq \psi$.

Решта властивостей очевидні.

Означення I.4. Міру $m \in M^+X$ назвемо зосередженою на множині F тоді і тільки тоді, коли $m|_F = m$.

Коректність означення випливає з пп. 7 і 8 твердження I.I. Очевидно, що кожна міра зосереджена на своєму носії і міра, зосереджена на F, зосереджена також на довільній $G \supset F$.

Означення I.5. Нехай $m \in M^+X$, $D = F_1 \setminus F_2$, де F_1, F_2 - множини, замкнені в компакті X. Позначимо $m|_D$ функціонал $m|_{F_1} - m|_{F_1 \cap F_2}$.

Твердження I.2.

I. Означення є коректним, тобто для фіксованої множини D не залежить від вибору F_1 і F_2.

2. $m|_\Delta \in M^+X$ й істинні пп. 2, 3, 5, 7 твердження I.I.

Доведення. I. Нехай множина D зображується у даному вигляді. Тоді непорожньою є множина $\{(F_{1\alpha}, F_{2\alpha}) \mid \alpha \in A\}$ пар таких, що

$D = F_{1\alpha} \setminus F_{2\alpha}$ /$F_{1\alpha}$, $F_{2\alpha}$ замкнені/. Покладемо $F_{10} = \bigcap_{\alpha \in A} F_{1\alpha}$, $F_{20} = \bigcap_{\alpha \in A} F_{2\alpha}$. Очевидно, що $F_{10} \supset F_{20}$, $F_{10} \setminus F_{20} = D$. Для довільного $\alpha \in A$ маємо $F_{1\alpha} \setminus F_{2\alpha} \subset F_{10}$. За регулярністю міри звідси випливає, що $m|_{F_{1\alpha}} - m|_{F_{1\alpha} \cap F_{2\alpha}}$ зосереджена на F_{10}. Тому $(m|_{F_{1\alpha}} - m|_{F_{1\alpha} \cap F_{2\alpha}})|_{F_{10}} = m|_{F_{1\alpha} \cap F_{10}} - m|_{F_{1\alpha} \cap F_{2\alpha} \cap F_{10}} = m|_{F_{10}} - m|_{F_{20}}$.

2. Усі властивості перевіряються безпосереднім обчисленням на підставі означення I.4 і твердження I.I.

§ 2. Відображення $c: PX \times PX \times I \to PX$

Нехай X – опуклий компакт, $M_f^+X = \{m \in M^+X \mid |\mathrm{supp}\, m| < \infty\}$ і $P_fX = \{m \in PX \mid |\mathrm{supp}\, m| < \infty\}$. Міри з M_f^+X і P_fX, які назвемо фінітними, подаються у вигляді $m = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}$, де $p_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$; δ_x – міра Дірака, зосереджена в точці x. Якщо $m \in P_fX$, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, інакше $\sum_{i=1}^{n} p_i = \| m \|$. У [I] доводиться, що P_cX і M_f^+X – всюди щільні множини відповідно в PX і M^+X.

Задамо відображення $c: M_f^+X \times M_f^+X \times I \to M^+X$ формулою

$$c\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}, \sum_{j=1}^{n} q_j \delta_{y_j}, \lambda\Big) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j \delta_{\lambda x_i + (1-\lambda) y_j}.$$

З очевидної властивості $\| c(m_1, m_2, \lambda) \| = \| m_1 \| \cdot \| m_2 \|$, $m_1, m_2 \in M_f^+X$ випливає, що при $m_1, m_2 \in P_fX$, $\lambda \in I$ маємо $c(m_1, m_2, \lambda) \in PX$. Відображення c афінне й однорідне за кожною з двох перших координат на $M_f^+X \times M_f^+X \times I$ та афінне на $P_fX \times P_fX \times I$.

<u>Лема 2.I</u>. Існує єдине неперервне продовження відображення $c: P_fI \times P_fI \times I \to PI$ на $PI \times PI \times I$.

<u>Доведення</u>. Скористаємось лемою I.I. Нехай $m_1, m_2 \in PI$, $\lambda \in I$, $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C(I)$ довільні. Не зменшуючи загальності, можна покласти $\| \varphi \| < 1$. Оскільки функція φ неперервна на від-

10*

різку, вона є неперервною рівномірно й існує $s \in \mathbb{N}$ таке, що $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$, якщо $|x_1 - x_2| < \frac{e}{s}$. Нехай $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_s$ – функції на I, задані формулами $\theta_i(x) = \max \times \times \{0, 1 - s|x - \frac{i}{s}|\}$. Очевидно, що $\{\theta_i \mid 0 \le i \le s\}$ – розбиття одиниці, вписане в покриття діаметром $\frac{e}{s}$.

Для довільних фінітних мір $m_1' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}$ і $m_2' = \sum_{j=1}^{e} \beta_j \delta_{y_j}$ маємо $C(m_1', m_2', \lambda')(\varphi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{e} \alpha_i \beta_j \varphi(\lambda' x_i + (1-\lambda') y_j) =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{e}\sum_{r=0}^{s}\sum_{t=0}^{s} \alpha_i \beta_j \theta_r(x_i)\theta_t(y_j)\varphi(\lambda' x_i + (1-\lambda') y_j) =$$

$$= \sum_{r=0}^{s}\sum_{t=0}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{e}(\theta_r(x_i)\alpha_i)(\theta_t(y_j)\beta_j)\varphi(\lambda' x_i + (1-\lambda') y_j)\right).$$

Нехай

$$|\lambda' - \lambda| < \frac{1}{s},\ x \in \left]\frac{r-1}{s}, \frac{r+1}{s}\right[,\ y \in \left]\frac{t-1}{s}, \frac{t+1}{s}\right[,\ 0 \le r, t \le s.$$

Тоді

$$\left|\lambda' x + (1-\lambda') y - \left(\lambda \frac{r}{s} + (1-\lambda)\frac{t}{s}\right)\right| < \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{s};$$

$$\left|\varphi(\lambda' x + (1-\lambda') y) - \varphi\left(\lambda \frac{r}{s} + (1-\lambda)\frac{t}{s}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Але

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_r(x_i)\alpha_i = m_1'(\theta_r); \quad \sum_{j=1}^{e} \theta_t(y_j)\beta_j = m_2'(\theta_t).$$

Отже, якщо

$$\lambda', \lambda'' \in \left]\lambda - \frac{1}{s}, \lambda + \frac{1}{s}\right[\cap I,$$

$$m_1', m_1'' \in O\langle m_1, \theta_0, \ldots, \theta_s, \varepsilon, 8(s+1)\rangle \cap P_f X,$$

$$m_2', m_2'' \in O\langle m_2, \theta_0, \ldots, \theta_s, \varepsilon, 8(s+1)\rangle \cap P_f X,$$

то $|C(m_1', m_2', \lambda')(\varphi) - C(m_1'', m_2'', \lambda'')(\varphi)| \le$

$$\le \left|C(m_1', m_2', \lambda')(\varphi) - \sum_{r,t=0}^{s} m_1'(\theta_r) m_2'(\theta_t)\varphi\left(\lambda \frac{r}{s} + (1-\lambda)\frac{t}{s}\right)\right| +$$

$$+ \sum_{r,t=0}^{s} |m_1'(\theta_r) m_2'(\theta_t) - m_1''(\theta_r) m_2''(\theta_t)| +$$

$$+ \left|\sum_{r,t=0}^{s} m_1''(\theta_r) m_2''(\theta_t)\varphi\left(\lambda \frac{r}{s} + (1-\lambda)\frac{t}{s}\right) - C(m_1'', m_2'', \lambda'')(\varphi)\right| <$$

$$< \varepsilon/4 + \sum_{r,t=0}^{s} m_1'(\theta_r)\,|m_2'(\theta_t) - m_2''(\theta_t)| + \sum_{r,t=0}^{s} |m_1'(\theta_r) - m_1''(\theta_r)|\, m_2''(\theta_t) + \varepsilon/4 < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon.$$

Отже, теорему доведено.

Теорема 2.2. Існує єдине неперервне продовження C з $P_f X \times P_f X \times I$ на $PX \times PX \times I$, де X – довільний опуклий компакт.

Доведення. Знову скористаємось лемою I.I. Нехай $\varphi \in C(X)$, $\varepsilon > 0$, $m_1, m_2 \in PX$, $\lambda \in I$. Згідно з лемою з I.7 існують неперервні афінні функціонали $\ell_1, \dots, \ell_k$ із значеннями в I і многочлени $p_1, \dots, p_k$ такі, що $\|\varphi - \sum_{i=1}^{k} p_i(\ell_i)\| < \varepsilon/4$. Отже, для виконання нерівності $|c(m_1', m_2', \lambda')(\varphi) - c(m_1'', m_2'', \lambda'')(\varphi)| < \varepsilon$ досить, щоб виконувалось k нерівностей $|c(m_1', m_2', \lambda')(p_i(\ell_i)) - c(m_1'', m_2'', \lambda'')(p_i(\ell_i))| < \varepsilon / 2k$, тобто

$$|P\ell_i(c(m_1', m_2', \lambda'))(p_i) - P\ell_i(c(m_1'', m_2'', \lambda''))(p_i)| < \varepsilon/2k, \quad 1 \le i \le k.$$

Для фінітних мір очевидна властивість

$$P\ell_i(c(m_1', m_2', \lambda'))(p_i) = c(P\ell_i(m_1'), P\ell_i(m_2'), \lambda')(p_i).$$

Далі доведення очевидно випливає з доведення теореми 2.I і неперервності відображень $P\ell_i : PX \to PI$, $i = 1, \dots, k$.

Теорема 2.3. Відображення $c: PX \times PX \times I \to PX$, де X – опуклий компакт, є ін'єктивним за першим /другим/ аргументом за фіксованих інших аргументів і $\lambda \ne 0$ /відповідно $\lambda \ne 1$/.

Доведення. Наведені далі властивості для фінітних мір перевіряються безпосереднім обчисленням і продовжуються за неперервністю на всі міри: а/ $c(m_1, m_2, \lambda) = c(m_2, m_1, 1-\lambda)$, $m_1, m_2 \in PX$, $\lambda \in I$;

б/ $P\ell(c(m_1, m_2, \lambda)) = c(P\ell(m_1), P\ell(m_2), \lambda)$, $m_1, m_2 \in PX$, $\lambda \in I$, $\ell: X \to I$ – афінний неперервний функціонал.

З наведених властивостей, а також з леми I.7 випливає, що теорему досить довести для першого аргументу і випадку $c: PI \times PI \times I \to PI$, $\lambda \ne 0$. Кожна міра $m \in PI$ однозначно визначається функцією $\varphi: \mathbb{R} \to I$, $\varphi(y) = m(]-\infty, y] \cap I)$, причому $\varphi \equiv 0$ на $]-\infty, 0[$; $\varphi \equiv 1$ на $[1, +\infty[$ і φ – неспадна неперервна справа функція.

Звуження довільної міри m на множину $]a; b] \cap I$ позначимо $m\Big|_a^b$. Тоді, якщо $c_0 < c_1 < \dots < c_{k-1} < c_k$, $c_0 = -\infty$, $c_k = +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, то $m = \sum_{i=1}^{k} m\Big|_{c_{i-1}}^{c_i}$. Очевидно, що коли $m_1 = m_1\Big|_{u_1}^{v_1}$, $m_2 = m_2\Big|_{u_2}^{v_2}$, $m = c(m_1, m_2, \lambda)$, $\lambda \in I$, то для m справедливо

$m = m\Big|^{\lambda v_1+(1-\lambda)v_2}_{\lambda u_1+(1-\lambda)u_2}$. Отже, для довільних мір $m_1, m_2 \in PI$, чисел $\lambda \in I$, $y \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, $i \le k$ міра $c\left(m_1\Big|^{\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_i}_{-\infty}, m_2\Big|^{c_i}_{c_{i-1}}, \lambda\right)$ зосереджена на $]-\infty, y] \cap I$, а міра $c\left(m_1\Big|^{+\infty}_{\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_{i-1}}, m_2\Big|^{c_i}_{c_{i-1}}, \lambda\right)$ – на $]y, +\infty[\cap I$.

Тому для довільної невід'ємної функції $\varphi \in C(I)$ маємо

$$\sum_{i=1}^{k} c\left(m_1\Big|^{\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_i}_{-\infty}, m_2\Big|^{c_i}_{c_{i-1}}, \lambda\right)(\varphi) \le c(m_1, m_2, \lambda)\Big|^{y}_{-\infty}(\varphi) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} c\left(m_1\Big|^{\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_{i-1}}_{-\infty}, m_2\Big|^{c_i}_{c_{i-1}}, \lambda\right)(\varphi)\,.$$

Отже, функція розподілу міри $m = c(m_1, m_2, \lambda)$, яка дорівнює $\Phi(y) = c(m_1, m_2, \lambda)\Big|^{y}_{-\infty}(1_z)$, лежить між $\sum_{i=1}^{k}\Phi_1\left(\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_i\right)\times$ $\times\left(\Phi_2(c_i)-\Phi_2(c_{i-1})\right)$ і $\sum_{i=1}^{k}\Phi_1\left(\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_{i-1}\right)\left(\Phi_2(c_i)-\Phi_2(c_{i-1})\right)$.

Ці суми є відповідно верхньою та нижньою сумами Дарбу для інтеграла Рімана – Стілтьєса $\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1\left(\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}t\right)d\Phi_2(t)$.

Існування інтеграла та ін'єктивність його за Φ_1 з описаного раніше класу функцій Φ доводяться тривіально. Цим теорему доведено.

<u>Зауваження</u>. Теореми 2.1–2.3 істинні також для $c: M^+X \times \times M^+X \times I \to M^+X$.

§ 3. Відображення класів C, CP, C^1, CP^1

Індукцією за n означимо "півопуклу" комбінацію n мір з PX. Нехай $\Delta_{n-1} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \ge 0,\ 1 \le i \le n,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1\}$ – вимірний симплекс.

<u>Означення 3.1</u>. Нехай $C_1 : PX \times \Delta_0 = PX \times \{(1)\} \to PX$ – проектування на перший співмножник, тобто $C_1(m, (1)) = m$, $m \in PX$.

Покладемо $c_n : (PX)^n \times \Delta_{n-1} \to PX$, $c_n((m_1, \dots, m_n),$ $(0,0,\dots,0,1)) = m_n$, інакше $c_n((m_1,\dots,m_n),(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = c(c_{n-1} \times$ $\times ((m_1,\dots,m_{n-1}),(\lambda_1/(1-\lambda_n),\dots,(\lambda_{n-1}/(1-\lambda_n))), m_n, 1-\lambda_n)$.

Легко побачити, що для довільних $m_1, m_2, m_3 \in P_f X$, а отже, і для $m_1, m_2, m_3 \in PX$ і $\lambda_1, \lambda_3 \in [0,1[$, $\lambda_2 \in I$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ маємо $c(m_1, c(m_2, m_3, \lambda_2/(\lambda_2+\lambda_3)), \lambda_1) =$ $= c(c(m_1, m_2, \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)), m_3, \lambda_1+\lambda_2)$.

Тому значення $c_n((m_1,\dots,m_n),(\lambda_1,\dots,\lambda_n))$ не змінюється в разі одночасної перестановки відповідних m_i і λ_i. Звідси, зокрема, випливає неперервність c_n при $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (0,\dots,0,1)$. Отже, c неперервне.

Означення 3.2. Відображення $cp_n : (PX)^n \times P\Delta_{n-1} \to PX$ задамо формулою $cp_n((m_1,\dots,m_n), M)(\varphi) = M(\varphi_{\vec{m}})$, де

$\varphi \in C(X)$, $\vec{m} = (m_1,\dots,m_n) \in (PX)^n$, $M \in P\Delta_{n-1}$,

$\varphi_{\vec{m}}((\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = c_n((m_1,\dots,m_n),(\lambda_1,\dots,\lambda_n))(\varphi)$.

Теорема 3.1. Відображення cp_n визначене для всіх значень аргументів і неперервне.

Доведення. Очевидно, що $\varphi_{\vec{m}} \in C(\Delta_{n-1})$ і $cp_n((m_1,\dots,m_n), M) \in PX$. Неперервність випливає з такого факту. Якщо відображення $g : Z \times Y \to \mathbb{R}$ неперервне і Z – компакт, то g неперервне за Y рівномірно за Z, тобто для довільних $y \in Y$, $\varepsilon > 0$ існує окіл $O(y)$ такий, що для всіх $z \in Z$, $y' \in O(y)$ маємо $|g(z, y') - g(z,y)| < \varepsilon$. Покладемо $Z = \Delta_{n-1}$, $Y = (PX)^n$, $g((\lambda_1,\dots,\lambda_n),(m_1,\dots,m_n)) = \varphi_{\vec{m}}((\lambda_1,\dots,\lambda_n))$, $\vec{m} \in (PX)^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \vec{\lambda} \in \Delta_{n-1}$. Для довільних $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C(X)$, $\vec{m} \in (PX)^n$ існує окіл $O(\vec{m})$ такий, що $|c_n(\vec{m}', \vec{\lambda}) \times$ $\times(\varphi) - c_n(\vec{m}, \vec{\lambda})(\varphi)| < \varepsilon/2$, коли $\vec{m}' \in O(\vec{m})$, $\vec{\lambda} \in \Delta_{n-1}$.

Покладемо $O(M) = \{M' \in P\Delta_{n-1} \mid M'(\varphi_{\vec{m}}) - M(\varphi_{\vec{m}})| < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Тоді з $\vec{m}' \in O(\vec{m})$, $M' \in O(M)$ випливає, що $cp_n(\vec{m}', M')(\varphi) - cp_n(\vec{m}, M)(\varphi)| < \varepsilon$. Отже, твердження доведено.

Означення 3.4. Нехай $(PX)^{\omega}$ - зліченний степінь простору PX $\pi_n : (PX)^{\omega} \to (PX)^n$ - проектування на перші n співмножників і відображення $h_n : (PX)^{\omega} \times P\Delta_{n-1} \to PX$ задається формулою $h_n = cp_n \circ (\pi_n \times id_{P\Delta_{n-1}})$. Позначивши $i_n : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ природні вкладення, отримуємо, що відображення h_n індукують неперервне відображення $cp_{\omega} : \underrightarrow{\lim}\{((PX)^{\omega} \times P\Delta_n,\ id_{(PX)^{\omega}} \times Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\} \to PX$. Оскільки $(PX)^{\omega}$ - компакт, то $\underrightarrow{\lim}\{((PX)^{\omega} \times P\Delta_n,$

$id_{(PX)^{\omega}} \times Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\} = (PX)^{\omega} \times \underrightarrow{\lim}\{(P\Delta_n, Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Звідси випливає коректність такого означення: $cp_{\omega} : (PX)^{\omega} \times \underrightarrow{\lim}\{(P\Delta_n, Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\} \to PX$ неперервне відображення таке, що $cp_{\omega}|_{(PX)^{\omega} \times P\Delta_{n-1}} = h_n$.

Означення 3.5. Назвемо нескінченновимірним симплексом Δ_{∞} підпростір гільбертового куба I^{ω}, заданий умовою $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$.

Лема 3.1. Індукована на Δ_{∞} топологія збігається з топологіями, індукованими метриками $\rho_1((\lambda_1', \lambda_2', \dots), (\lambda_1'', \lambda_2'', \dots)) = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i' - \lambda_i''|$ і $\rho_2((\lambda_1', \lambda_2', \dots), (\lambda_1'', \lambda_2'', \dots)) = \sup_{1 \le i < +\infty} |\lambda_i' - \lambda_i''|$.

Доведення очевидне.

Означення 3.6. Послідовність неперервних відображень $s_i : (PX)^{\omega} \times \Delta_{\infty} \to PX$ означимо формулами $s_i((m_1, m_2, \dots), (\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = c_i((m_1, \dots m_i), (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_{i-1}))$, а відображення $c_{\infty} : (PX)^{\omega} \times \Delta_{\infty} \to PX$ - як поточкову межу послідовності s_i.

Теорема 3.2. Для довільної $\varphi \in C(X)$:

1/ за фіксованого $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \in \Delta_{\infty}$ для послідовності $s_i(\vec{m}, \vec{\lambda})(\varphi)$ виконується критерій Коші рівномірної збіжності за $\vec{m} \in (PX)^{\omega}$;

2/ функціональна послідовність $s_i(\vec{m}, \vec{\lambda})(\varphi)$ є рівноступенево за $\vec{m} \in (PX)^{\omega}$ неперервною за $\vec{\lambda} \in \Delta_{\infty}$.

Доведення обох пунктів грунтується на інваріантності c_n в разі одночасної перестановки відповідних координат і очевидній лемі: для довільних $\varphi \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $|c(m_1, m_2, \lambda)(\varphi) - m_1(\varphi)| < \varepsilon$, коли $0 \le 1 - \lambda < \delta$.

Наслідок. Відображення $c_\infty : (PX)^\omega \times \Delta_\infty \to PX$ всюди визначене і неперервне.

Означення 3.7. Аналогічно 3.2 відображення $cp_\infty : P(X)^\omega \times P\Delta_\infty \to PX$ означимо формулою $cp_\infty(\vec{m}, M)(\varphi) = M(\varphi_{\vec{m}})$, де $\varphi \in C(X)$, $\vec{m} \in (PX)^\omega$, $M \in P\Delta_\infty$, $\varphi_{\vec{m}} : \Delta_\infty \to \mathbb{R}$, $\varphi_{\vec{m}}(\vec{\lambda}) = c_\infty(\vec{m}, \vec{\lambda})(\varphi)$.

Під $P\Delta_\infty$ розуміється простір нормованих лінійних додатно визначених функціоналів на просторі $C(\Delta_\infty)$ неперервних обмежених на Δ_∞ функцій. Очевидно, що $\varphi_{\vec{m}} \in C(\Delta_\infty)$, оскільки $\|\varphi_m\| \le \|\varphi\|$. Існування відображення очевидне. Але в загальному випадку відображення cp_∞ не є неперервним. Можна навести приклад міри $M \in P\Delta_\infty$ такий, що cp_∞ не є неперервним навіть лише за першим аргументом.

Теорема 3.3. Нехай $M \in P\Delta_\infty$ таке, що для кожного локально скінченного зліченного розбиття одиниці $\{\gamma_i \in C(\Delta_\infty) \mid i \in \mathbb{N}\}$ маємо $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M(\gamma_i) = 1$ /"зліченна адитивність"/. Тоді відображення $cp_\infty : (PX)^\omega \times P\Delta_\infty \to PX$ неперервне за першим аргументом, якщо другий дорівнює M.

Доведення. Для $M \in P\Delta_\infty$ і довільної $\bar{\varphi} \in C(\Delta_\infty)$ маємо $M(\bar{\varphi}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} M(\bar{\varphi} \cdot \gamma_i)$. За п.2 теореми 3.2 для сім'ї функцій $\{\varphi_{\vec{m}},\ \vec{m} \in (PX)^\omega\}$ для кожного $\vec{\lambda} \in \Delta_\infty$ існує окіл $O(\vec{\lambda})$ такий, що $|\varphi_{\vec{m}}(\vec{\lambda}') - \varphi_{\vec{m}}(\vec{\lambda})| < \varepsilon/6$, коли $\vec{\lambda}' \in O(\vec{\lambda})$, $\vec{m} \in (PX)^\omega$. Оскільки Δ_∞ - сепарабельний метричний простір, існує локально скінченне зліченне розбиття одиниці $\{\gamma_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, вписане у відкрите покриття $\{O(\vec{\lambda}) \mid \vec{\lambda} \in \Delta_\infty\}$. Нехай $n \in \mathbb{N}$ таке, що

$M(\gamma_1)+\ldots+M(\gamma_n) > 1-\varepsilon/4\|\varphi\|$. Оскільки $\|\varphi_{\vec{m}}\| \le \|\varphi\|$, для кожної $\vec{m} \in (PX)^\omega$ маємо $|M(\varphi_{\vec{m}}) - \sum_{i=1}^{n} M(\varphi_{\vec{m}} \cdot \gamma_i)| < \varepsilon/4$.

Нехай $supp\,\gamma_i \in O(\lambda_i)$, $1 \le i \le n$. Для довільної $\vec{m}_0 \in (PX)^\omega$ і кожної з точок $\vec{\lambda}_i \in \Delta_\infty$ маємо окіл $O_i(\vec{m}_0)$ такий, що для кожної міри $\vec{m}' \in O_i(\vec{m}_0)$ маємо $|\varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}_i) - \varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}_i)| < \varepsilon/6$.

Нехай $O(\vec{m}_0) = \bigcap_{i=1}^{n} O_i(\vec{m}_0)$. При $\vec{m}' \in O(\vec{m}_0)$ маємо

$$|cp_\infty(\vec{m}', M)(\varphi) - cp_\infty(\vec{m}_0, M)(\varphi)| =$$

$$= M(\varphi_{\vec{m}'} - \varphi_{\vec{m}_0})| \le \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i=1}^{n} |M(\gamma_i \varphi_{\vec{m}'} - \gamma_i \varphi_{\vec{m}_0})| + \frac{\varepsilon}{4} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} M(\gamma_i) \sup_{\vec{\lambda} \in O(\lambda_i)} |\varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}') - \varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}')| \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} M(\gamma_i) \times$$

$$\times \Big(\sup_{\vec{\lambda} \in O(\vec{\lambda}_i)} |\varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}') - \varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}_i)| + |\varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}_i) - \varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}_i)| +$$

$$+ \sup_{\lambda' \in O(\vec{\lambda}_i)} |\varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}_i) - \varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}')| \Big) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} M(\gamma_i)\Big(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6}\Big) \le \varepsilon.$$

Отже, неперервність доведено.

Зауваження. Відображення cp_n і cp_∞ афінні за другими аргументами, c_n, cp_n, cp_ω, c_∞, cp_∞ – за кожною окремою координатою першого аргументу. Значення відображень c_n і c_∞ не змінюються в разі одночасної перестановки відповідних координат обох аргументів.

Означення. 8. Відображення $d_n : PX \to (PX)^n$, $d_n(m) = (m, \ldots, m)$, $n \in \mathbb{N}$ і $d_\infty : PX \to (PX)^\omega$, $d_\infty(m) = (m, m, \ldots)$ неперервні.

Відображення задамо формулами

$$c_n^1 : PX \times \Delta_{n-1} \to PX, \quad c_n^1 = c_n \circ (d_n \times id_{\Delta_{n-1}});$$

$$cp_n^1 : PX \times P\Delta_{n-1} \to PX, \quad cp_n^1 = cp_n \circ (d_n \times id_{P\Delta_{n-1}});$$

$$cp_\omega^1 : PX \times \varinjlim \{(P\Delta_n, P i_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\} \to PX;$$

$cp'_\omega = cp_\omega \circ (d_\infty \times id_{\underrightarrow{\lim}\{(P\Delta_n, Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}});$

$c'_\infty : PX \times \Delta_\infty \to PX,\ c'_\infty = c_\infty \circ (d_\infty \times id_{\Delta_\infty});$

$cp'_\infty : PX \times P\Delta_\infty \to PX,\ cp'_\infty = cp_\infty \circ (d_\infty \times id_{P\Delta_\infty}).$

Очевидно, що відображення c'_n, cp'_n, cp'_ω, c'_∞ неперервні.

Теорема 3.4. У разі кожної фіксованої функції $\varphi \in C(X)$ функції $\varphi_{\vec{m}} : \Delta_\infty - \mathbb{R}$, де $\vec{m} = (m, m_1, \dots)$, $m \in PX$, збігаються при $\max\limits_{i \in N} \lambda_i \to 0$ рівномірно за $m \in PX$ до $(\eta_X \circ b_X)(m)(\varphi)$, де b_X – неперервне відображення "центра маси" $PX \to X$, яке кожній мірі ставить у відповідність таку точку, що для довільного афінного функціонала $\ell : X \to \mathbb{R}$, $m \in PX$ маємо $m(\ell) = \delta_{b_X(m)}(\ell) = \ell(b_X(m))$.

Доведення. На підставі I.5 і I.6 теорему достатньо довести лише для опуклого компакта I. На PI відображення b_I записується аналітично: $b_I(m) = m(id_I)$.

За неперервністю збіжність досить довести лише для фінітних мір $m \in PI$ вигляду $m = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ і для $\vec{\lambda} \in \underrightarrow{\lim}\{(\Delta_n, i_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, оскільки такі пари $(m, \vec{\lambda})$ утворюють у $PI \times \Delta_\infty$ всюди щільну множину. Для міри $m = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ маємо $b_I(m) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Числа $x_1 - b(m), \dots, x_n - b(m)$ утворюють зрівноважений вектор. Якщо $\vec{\lambda} \in \Delta_{k-1}$, то міра $c'_\infty(m, \vec{\lambda})$ є середнім арифметичним n^k мір Дірака, координата носіїв яких є сумою $b_I(m)$ і координат n^k-вимірного вектора, утвореного з $x_1 - b(m), \dots, x_n - b(m)$ так, як описано в лемі I.4. На підставі цієї леми середня відстань носіїв мір Дірака, що входять до $c'_\infty(m, \vec{\lambda})$, до $b_I(m)$ не перевищує $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_1^2 + \dots} \le \sqrt{\max\limits_{i \in N} \lambda_i}$. Оскільки φ обмежена і рівномірно неперервна на I, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з

$\max\limits_{i\in N}\lambda_i < \delta$ випливає: для довільної $m = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$, де $n\in N$, маємо $|c'_\infty(\vec{m},\lambda)(\varphi) - \varphi(b_I(m))| < \varepsilon$. Цим теорему доведено.

Лема 3.2. Для довільних $\varphi\in C(X)$, $\varepsilon > 0$ відображення f, $f(m,\vec{\lambda}) = \varphi_{\vec{m}}(\vec{\lambda})$, де $\vec{m} = (m,m,\dots)$, $m\in PX$, можна рівномірно наблизити з точністю $<\varepsilon$ відображенням g_n, де

$$g_n(m,\vec{\lambda}) = c_{n+1}((m,\dots,m,\delta_{b_X(m)});\ (\lambda'_1,\dots,\lambda'_n,1-\lambda'_1,\dots,\lambda'_n))(\varphi);$$

n – деяке натуральне число; λ'_1, λ'_2, ..., λ'_n – найбільші n координат вектора $\vec{\lambda}$. Зауважимо, що відображення $\Delta_\infty\to\Delta_\infty$, яке впорядковує координати за спаданням, є неперервним.

Доведення спирається на такий елементарний факт: для кожних ε, $\varepsilon_1 > 0$ існує $n\in N$ таке, що для кожного $\vec{\lambda}\in\Delta_\infty$ або $\lambda'_1+\dots+\lambda'_n > 1-\varepsilon$, або $\lambda'_{n+1} < \varepsilon_1(\lambda'_{n+1}+\lambda'_{n+2}+\dots)$, а також на лемі 3.1 та інваріантності c_∞ в разі одночасної перестановки відповідних координат обох аргументів.

Теорема 3.5. Відображення cp'_∞ неперервне. Доведення випливає з леми 3.2.

Зауваження: 1. Для простору вигляду P^2X, де X – компакт, відображення "центра маси" – це компонента ψ_X природного перетворення $\psi: P^2\to P$. Оскільки згідно з теоремою 3.4 маємо $b_X(m) = cp'_\infty(m, M_0)$, $m\in PX$, де M_0 – міра вигляду $M_0(\varphi) = LIM(\varphi(\vec{\lambda}_1), \varphi(\vec{\lambda}_2),\dots)$, $\varphi\in C(\Delta_\infty)$; $\max\limits_{i\in N}\lambda_{ki}\to 0$ при $k\to\infty$; LIM – банахова межа [5], то

$$\psi_X(m) = cp'_\infty(m, M_0),\quad m\in P^2X.$$

2. Для кожного з відображень c'_n, cp'_n, cp'_ω, c'_∞, cp'_∞ існує, але не є єдиною "права одиниця" – таке фіксоване значення другого аргументу, яке перетворює відображення в тотожне.

3. Позначимо F_{c_n}, $F_{c'_n}$ і т.п. множини відображень з PX, $(PX)^n$ чи $(PX)^\omega$ в PX, які можна отримати, зафіксувавши другий аргумент в означених раніше відображеннях. Очевидно, що $F_{c_n} \subset F_{cp_n}$, $F_{c_\infty} \subset F_{cp_\infty}$, $F_{cp_\omega} \subset F_{cp_\infty}$, $F_{c'_n} \subset F_{cp'_n} \subset F_{cp'_\infty} \subset F_{cp'_\infty}$, $F_{c'_n} \subset F_{c'_\infty} \subset F_{cp'_\infty}$.

§ 4. Відображення c_n, cp_n, cp_ω, c_∞, cp_∞, c'_n, cp'_ω, c'_∞, cp'_∞, β як природні перетворення

Нехай X, Y - опуклі компакти; $f: X \to Y$ - афінне неперервне відображення; $m_1, m_2, \dots, m_n \in P_f X$, $\vec{\lambda} \in \Delta_{n-1}$. Легко побачити, що $c_n((Pf(m_1), \dots, Pf(m_n)), \vec{\lambda}) = Pf(c_n((m_1, \dots, m_n), \vec{\lambda}))$. За неперервністю цю рівність можна перенести на довільні міри $m_1, m_2, \dots, m_n \in PX$.

Теорема 4.1. Відображення c'_n, cp'_n, cp'_ω, c'_∞, cp'_∞ у разі фіксованих других аргументів є природними перетвореннями з P_{Conv} у себе, тобто при $X, Y \in Ob\, Conv$, $f \in Mor(X,Y)\, Conv$ маємо

$$Pf(c'_n(m, \vec{\lambda})) = c'_n(Pf(m), \vec{\lambda}),\ m \in PX,\ \vec{\lambda} \in \Delta_{n-1};$$
$$Pf(cp'_n(m, M)) = cp'_n(Pf(m), M),\ m \in PX,\ M \in P\Delta_{n-1};$$
$$Pf(cp'_\omega(m, M)) = cp'_\omega(Pf(m), M),\ m \in PX,$$
$$M \in \underline{\lim}\{(P\Delta_n, Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\};$$
$$Pf(c'_\infty(m, \vec{\lambda})) = c'_\infty(Pf(m), \vec{\lambda}),\ m \in PX,\ \vec{\lambda} \in \Delta_\infty;$$
$$Pf(cp'_\infty(m, M)) = cp'_\infty(Pf(m), M),\ m \in PX,\ M \in P\Delta_\infty.$$

Доведення очевидне.

4.2. Під $(P_{Conv})^n$ $((P_{Conv})^\omega)$ розумітимемо функтор в $Conv$ у $Comp$, який ставить у відповідність опуклому компакту X компакт $(PX)^n$ $((PX)^\omega)$, а афінному неперервному відображенню $f: X \to Y$ - відображення $(PX)^n \to (PY)^n$ $((PX)^\omega \to (PY)^\omega)$, яке вектору $(m_1,\dots,m_n)$ $((m_1,m_2,\dots))$ ставить у відповідність $(Pf(m_1),\dots,Pf(m_n))$ $((Pf(m_1), Pf(m_2),\dots))$.

Теорема. Відображення c_n і cp_n в разі фіксованих других аргументів є природними перетвореннями з $(P_{conv})^n$ у P_{conv}, а cp_ω, c_∞ і cp_∞ /у випадку, зазначеному в теоремі 3.3/ є природними перетвореннями з $(P_{conv})^\omega$ в P_{conv}.

Запис виконується аналогічно 4.I. Доведення очевидне.

Цим одночасно розв'язано питання про нетривіальні природні перетворення з P^2 у себе.

Теорема 4.3. Довільне природне перетворення $\theta: P_{conv}\to P_{conv}$ однозначно визначається своїм значенням на I.

Доведення. Нехай X - опуклий компакт; $\mathcal{T}$ - множина всіх афінних неперервних функціоналів на X із значеннями в I. Згідно з I.6 відображення $\theta_X: PX\to PX$ однозначно визначається сукупністю відображень $(Pl\circ\theta_X \mid l\in\mathcal{T})$. Але $Pl\circ\theta_X=\theta_I\circ Pl$ відоме. Цим теорему доведено.

Теорема 4.4. Відображення $b_X: PX\to X$ /див. § 3/ є компонентою природного перетворення з P_{conv} у I_{conv}.

Доведення очевидне.

§ 5. c-опуклі відображення

Означення 5.I. Нехай X - опуклий компакт; Y вкладається як опукла множина в локально опуклий лінійний топологічний простір. Відображення $f: PX\to Y$ назвемо c-опуклим, якщо для довільних $m_1, m_2\in PX$, $\lambda\in I$ маємо $f(c(m_1,m_2,\lambda))=\lambda f(m_1)+$ $+(1-\lambda)f(m_2)$.

Зауваження. c-опуклим є відображення $b_X: PX\to X$ /див. § 3/, а отже, і $\psi_X: P^2X\to PX$.

Теорема 5.I. Нехай X, Y такі самі, як у 5.I; f - неперервне відображення з PX у Y. Тоді наведемо таке:

I. Кожне c-опукле відображення f афінне.

2. Для c-опуклості афінного відображення f необхідно і достатньо, щоб для деякого $\lambda\in\,]0;1[$ і всіх $m\in PX$ виконувалась рівність $f(c(m,m,\lambda))=f(m)$.

3. Для довільного f існує $\lambda \in]0;1[$ таке, що $f(c(m,m,\lambda)) = f(m)$ для всіх $m \in PX$ тоді і тільки тоді, коли $f = f \circ \eta_X \circ \delta_X$.

4. Відображення f є c-опуклим тоді і тільки тоді, коли $f = f' \circ \delta_X$, де f' - афінне відображення з X у Y, яке цими умовами визначається однозначно.

5. Якщо природне перетворення $\theta : P_{Conv} \to F$, де F - функтор з $Conv$ у $Comp$ такий, що для кожного $X \in Ob\, Conv$ простір FX є опуклим компактом, має c-опуклі компоненти, то $\theta = \theta' \circ \delta$, де $\theta' = \theta \circ \eta$ - природне перетворення з Id_{Conv} у F, яке має афінні компоненти, а δ - природне перетворення "центра маси" /див. теорему 4.4/.

Доведення. У п. 3 достатність очевидна. Доведемо необхідність. Нехай таке $\lambda \in]0;1[$ існує. Тоді відображенню $h : PX \to PX$, $h(m) = c(m,m,\lambda)$ притаманна властивість $f = f \circ h$. Звідси випливає, що $f = f \circ h^n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Але легко побачити, що $h^n(m) = c^1_{2^n}(m, \vec{\lambda}')$ для деякого вектора $\vec{\lambda}' \in \Delta_{2^n-1}$, причому всі координати $\vec{\lambda}'$ мають вигляд $\lambda^i(1-\lambda)^{2^n-i}$ для деякого i, $0 \le i \le 2^n$. Отже, маємо оцінку $\|\vec{\lambda}'\| \le (max\{\lambda, 1-\lambda\})^{2^n}$. Звідси випливає, що при $n \to \infty$ послідовність відображень h^n збігається до $\eta_X \circ \delta_X$. За неперервністю f звідси випливає, що $f = f \circ \eta_X \circ \delta_X$.

У п. 4 достатність випливає із c-опуклості відображення δ_X. Доведемо необхідність. Нехай f є c-опуклим. Тоді $f = f \circ \eta_X \circ \delta_X$. Покладемо $f' = f \circ \eta_X$. Тоді $\lambda f'(m_1) + (1-\lambda) f'(m_2) = \lambda f(\delta m_1) + (1-\lambda) f(\delta m_2) = f(\delta_{\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2}) = f'(\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2)$, тобто f' афінне. Звідси, зокрема, випливає афінність f, тобто п. I.

Доведення п.5 очевидно випливає з п. 4.

У п. 2 необхідність умови очевидна. Достатність випливає з п. 3.

Отже, теорему доведено.

Список літератури

1. Общая топология. Основные конструкции: Учеб.пособие / В.В.Федорчук, В.В.Филиппов. - М.: Изд-во при МГУ, 1988. - 252 с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - 2-е изд. - М.: Наука, 1977. - 740 с.
3. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии // Успехи мат. наук, 1991. - Т. 46. - Вып. 1. - С. 41-80.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир, 1986. - 752 с.
5. Теоремы и задачи функционального анализа: Учеб.пособие для вузов / А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1988. - 400 с.

УДК 519.48

І.Я.Тушницький

КІЛЬЦЯ З ЛОКАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИМИ КРУЧЕННЯМИ

В [1] для комутативних областей було доведено, що коли кільце R є h-локальною областю, то воно є кільцем з локально визначеними крученнями; побудовано приклад кільця з локально визначеними крученнями, яке не є h-локальною областю.

Деякий поступ у дослідженні комутативних кілець з локально визначеними крученнями маємо в [9].

Мета даної роботи - узагальнити результати Брендала і Барбу та автора із зазначених робіт на праві дуокільця. Загалом безпосереднього перенесення досягти не вдалось. Проте виділено клас асоціативних правих дуокілець з $I \neq 0$, який задовольняє умову

$$\forall m \in mspec_r(R)\, \forall r \in R\, \forall d \in R \setminus m\, \exists c \in R\, \exists d' \in R \setminus m : rd' = drc. \quad /*/$$

У цьому класі кілець вдається отримати результати про кільця з локально визначеними крученнями, аналогічні наведеним раніше: зазначено необхідну і достатню умову того, щоб вони були кільцями з локально визначеними крученнями, а також показано, що h-локальність є необхідною і достатньою умовою для більш вузького класу кілець, ніж кільця з локально визначеними крученнями, а саме для кілець з локально визначеними передкрученнями.

Для повноти викладу нагадаємо деякі необхідні поняття, які використовуватимемо в подальшому. Кільце R називається правим дуокільцем, якщо кожний правий ідеал цього кільця двобічний. У подальшому розглядатимемо тільки праві дуокільця з $1 \neq 0$, які задовольняють умову /ж/. Зауважимо, що умову /ж/ задовольняють усі комутативні кільця.

Множину всіх правих максимальних ідеалів кільця R позначатимемо $mspec_r(R)$.

Нехай D - підмножина кільця R. Тоді D називається мультиплікативно замкненою множиною кільця R, якщо вона задовольняє такі умови:

/1/ $\forall a, b \in D: ab \in D$;

/2/ $1 \in D$, $0 \notin D$.

Мультиплікативно замкнена множина D кільця R називається правою множиною Оре, якщо вона задовольняє умову

$$\forall r \in R \ \forall d \in D \ \exists r_1 \in R \ \exists d_1 \in D: \ rd_1 = dr_1.$$

Мультиплікативно замкнена множина D називається переставною справа, якщо вона задовольняє умову

$$\forall r \in R \ \forall d \in D: \ dr = 0 \Rightarrow \exists d' \in D \ \ rd' = 0.$$

Нехай D - мультиплікативно замкнена множина кільця R; S - деяке кільце; f - гомоморфізм кільця R у кільце S. Тоді пара (S, f) називається правим кільцем дробів кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D, якщо виконуються умови

/1/ $\forall d \in D: \ f(d)$ - обернений елемент кільця S;

/2/ $\forall s \in S \ \exists r \in R \ \exists d \in D: \ s = f(r)f(d)^{-1}$;

/3/ $Ker f = \{ r \in R \mid \exists d \in D \ \ rd = 0 \}$.

Має місце таке твердження:

Твердження I. Нехай D - мультиплікативно замкнена множина кільця R. Тоді праве кільце дробів (S, f) кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D існує тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

/1/ D - права множина Оре;

/2/ D - переставна справа,

тобто коли D - множина правих знаменників.

Лема 1. Нехай R - праве дуокільце, яке задовольняє умову /ж/; m - довільний правий максимальний ідеал кільця R. Тоді множина $D = R \setminus m$ є мультиплікативно замкненою множиною кільця R і кільце дробів (S, f) кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D існує.

Доведення. Доведемо спочатку, що множина D - мультиплікативно замкнена. Нехай $x \notin m$ і $y \notin m$. Покажемо, що $xy \notin m$. Припустимо, що $xy \in m$. Тоді $xyR \subset m$. Оскільки R - праве дуокільце, то $yR = RyR$. Отже, $xRyR \subset m$, а тому $xRy \subset m$. Оскільки ідеал первинний, то $x \in m$ або $y \in m$, а це суперечить умові. Отже, $xy \notin m$. Очевидно, що $0 \notin D = R \setminus m$; $1 \in D$. Таким чином, множина D мультиплікативно замкнена.

Тепер покажемо, що множина D - права множина Оре. Нехай $r \in R$ і $d \in D$. Тоді, оскільки R - праве дуокільце, то $Rd \subset dR = RdR$. Тому існує $r_1 \in R$ таке, що $rd = dr_1$. Легко побачити, що умова Оре є також наслідком умови /ж/.

Доведемо, що множина D переставна справа. Нехай $r \in R$ і $d \in D$. За умови /ж/ існують $c \in R$, $d' \in D$ такі, що $rd' = drc$. Якщо $dr = 0$, то $rd' = 0$. Отже, D переставна справа.

Таким чином, згідно з твердженням I існує праве кільце дробів (S, f) кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D. Оскільки $D = R \setminus m$, то це кільце дробів позначатимемо (R_m, f_m), або коротко R_m і називатимемо локалізацією кільця R відносно максимального ідеалу m.

Лема 2. Праве дуокільце R задовольняє умову /ж/ тоді і тільки тоді, коли воно задовольняє таку умову:

$$\forall \mathcal{M} \in mspec_r(R)\ \forall J -\text{ правий ідеал кільця } \forall i \in J\ \forall d \in D = R \setminus \mathcal{M}\ \exists i' \in J\ \exists d' \in D:\ id' = di'. \qquad /жж/$$

Доведення. Нехай кільце R задовольняє умову /ж/, $\mathcal{M}$ - довільний правий максимальний ідеал кільця R; J - довільний правий ідеал кільця R. Виберемо $i \in J$ і $d \in D$. Тоді за умови /ж/ існують елементи $d' \in D$ і $c \in R$ такі, що $id' = dic$. Оскільки J - правий ідеал, то $i' = ic \in J$. Таким чином, $id' = di'$, де $i' \in J$, $d' \in D$.

Навпаки, нехай кільце R задовольняє умову /жж/ і $r \in R$, $d \in D$. Розглянемо правий ідеал $J = rR$. Оскільки $r \in rR$ і $d \in D$, то існують $i' \in rR$ і $d' \in D$ такі, що $rd' = di'$. Оскільки $i' \in rR$, то існує $c \in R$ таке, що $i' = rc$. Таким чином, $rd' = drc$, що й треба було довести.

Якщо J - правий ідеал кільця R, то $J_{\mathcal{M}}$ позначатимемо множину $\{f_m(i) f_m(d)^{-1} \mid i \in J, d \in D = R \setminus \mathcal{M}\}$. Покажемо, що $J_{\mathcal{M}}$ - ідеал у кільці R_m. Нехай $x_1, x_2 \in J_{\mathcal{M}}$. Покажемо, що $x_1 + x_2 \in J_m$. Оскільки $x_1, x_2 \in J_m$, то $x_1 = f(i_1) f(d_1)^{-1}$ і $x_2 = f(i_2) f(d_2)^{-1}$, де $i_1, i_2 \in J$; $d_1, d_2 \in D$. Оскільки $d_2 \in R$, $d_1 \in D$ і D - права множина Оре, то існують $d_1' \in D$ і $d_2' \in R$ такі, що $d_2 d_1' = d_1 d_2'$. Тоді $f(d_2) f(d_1') = f(d_1) f(d_2')$. Домножуючи дану рівність справа на $f(d_1')^{-1}$ і зліва на $f(d_1)^{-1}$, отримуємо $f(d_1)^{-1} f(d_2) = f(d_2') f(d_1')^{-1}$. Тепер $x_1 + x_2 = f(i_1) f(d_1)^{-1} + f(i_2) f(d_2)^{-1} = f(i_1) f(d_1)^{-1} f(d_2) f(d_2)^{-1} + f(i_2) f(d_2)^{-1} = f(i_1) f(d_2') f(d_1')^{-1} f(d_2)^{-1} + f(i_2) f(d_1') f(d_1')^{-1} f(d_2)^{-1} = f(i_1 d_2' + i_2 d_1') f(d_2 d_1')^{-1}$. Оскільки $i_1 d_2' + i_2 d_1' \in J$ і $d_2 d_1' \in D$, то $x_1 + x_2 \in J_m$.

Тепер покажемо, що коли $x \in \mathcal{J}_m$ і $\lambda \in R_m$, то $x\lambda \in \mathcal{J}_m$. Нехай $x = f(i) f(d_1)^{-1}$ і $\lambda = f(r) f(d_2)^{-1}$, де $i \in \mathcal{J}$; $r \in R$; $d_1, d_2 \in D$. Оскільки D - права множина Оре, то існують $r' \in R$, $d_1' \in D$ такі, що $f(d_1)^{-1} f(r) = f(r') f(d_1')^{-1}$. Ураховуючи це, дістаємо $x\lambda = f(i) f(d_1)^{-1} f(r) f(d_2)^{-1} = f(i) f(r') f(d_1')^{-1} \times$ $\times f(d_2)^{-1} = f(ir') f(d_2 d_1')^{-1}$. Оскільки $ir' \in \mathcal{J}$ і $d_2 d_1' \in D$, то $x\lambda \in \mathcal{J}_m$.

Залишилось довести, що коли $x \in \mathcal{J}_m$ і $\lambda \in R_m$, то $\lambda x \in \mathcal{J}_m$. Нехай $x = f(i) f(d_1)^{-1}$ і $\lambda = f(r) f(d_2)^{-1}$, де $i \in \mathcal{J}$; $r \in R$; $d_1, d_2 \in D$. Тепер $\lambda x = f(r) f(d_2)^{-1} f(i) \times$ $\times f(d_1)^{-1}$. Оскільки кільце R задовольняє умову /ж/, то згідно з лемою 2 існують $i' \in \mathcal{J}$ і $d_2' \in D$ такі, що $f(d_2)^{-1} f(i) =$ $= f(i') f(d_2')^{-1}$. Отже, $\lambda x = f(r) f(i') f(d_2')^{-1} f(d_1)^{-1} =$ $= f(ri') f(d_1 d_2')^{-1}$. Оскільки $ri' \in \mathcal{J}$ і $d_1 d_2' \in D$, то $\lambda x \in \mathcal{J}$.

Нехай (S, f) - кільце дробів кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D. Якщо $\mathfrak{J}$ - ідеал кільця S, то $f^{-1}(\mathfrak{J})$ позначимо множину $\{x \in R \mid f(x) \in \mathfrak{J}\}$. Зрозуміло, що $f^{-1}(\mathfrak{J})$ - ідеал кільця R.

Наведений далі результат є аналогом твердження І.І з [І] для правих дуокілець.

<u>Лема 3</u>. Нехай $\mathcal{J}$ - правий ідеал кільця R; $\mathfrak{J}$ - ідеал кільця R_m. Тоді

/І/ $(f_m^{-1}(\mathfrak{J}))_m = \mathfrak{J}$;

/2/ $f_m^{-1}(\mathcal{J}_m) \supset \mathcal{J}$;

/3/ $\mathcal{J}_m : f(r) \supset (\mathcal{J} : r)_m$;

/4/ якщо $\mathcal{J}_m = \mathfrak{J}$, то $\mathcal{J} \subset f_m^{-1}(\mathfrak{J})$;

/5/ $f_m^{-1}(\mathfrak{J}) : r = f^{-1}(\mathfrak{J} : f_m(r))$;

/6/ існує ін'єктивне відображення гратки всіх ідеалів кільця R_m в гратку ідеалів кільця R, яке діє так:

$$J \to f_m^{-1}(J).$$

<u>Доведення</u>. /1/. Включення $(f_m^{-1}(J))_m \subset J$ очевидне. Покажемо, що $J \subset (f_m^{-1}(J))_m$. Нехай $j \in J$. Тоді $j = f_m(x) f_m(d)^{-1}$. Оскільки J - ідеал, то, домножуючи j на $f_m(d)$ справа, отримуємо $f_m(x) \in J$. Звідси $x \in f_m^{-1}(J)$. Отже,

$j = f_m(x) f_m(d)^{-1} \in (f_m^{-1}(J))_m$.

/2/Нехай $i \in J$. Тоді $f_m(i) \in J_m$ і, отже, $i \in f_m^{-1}(J_m)$.

/3/Нехай $f_m(x) f_m(d)^{-1} \in (J:r)_m$. Тоді $x \in J:r$, тобто $rx \in J$. Отже, $f_m(rx) = f_m(r) f_m(x) \in J_m$. Оскільки J_m - ідеал кільця R_m, то $f_m(r) f_m(x) f_m(d)^{-1} \in J_m$. Звідси $f_m(x) f_m(d)^{-1} \in$ $\in J_m : f_m(r)$.

/4/. Випливає з /2/.

/5/. Покажемо включення $f_m^{-1}(J):r \subset f_m^{-1}(J:f_m(r))$. Нехай $x \in f_m^{-1}(J):r$. Тоді $rx \in f_m^{-1}(J)$ і, отже, $f_m(rx) \in$ $\in J$. Звідси $f_m(r) f_m(x) \in J$ і тому $f_m(x) \in J : f_m(r)$. Отже, $x \in f_m^{-1}(J : f_m(r))$. Обернене включення перевіряється аналогічно.

/6/. Нехай J_1, J_2 - ідеали кільця R_m і $f_m^{-1}(J_1) = f_m^{-1}(J_2)$. Тоді $(f_m^{-1}(J_1))_m = (f_m^{-1}(J_2))_m$. Згідно з /1/ $(f_m^{-1}(J_1))_m = J_1$ і $(f_m^{-1}(J_2))_m = J_2$ і, отже, $J_1 = J_2$.

Передрадикальним фільтром кільця R називається непорожня сім'я $\mathcal{F}$ ідеалів кільця R, що задовольняє такі умови:

T1. Якщо $I \in \mathcal{F}$ і $I \subset J$, де J - ідеал в R, то $J \in \mathcal{F}$.

T2. Якщо $I \in \mathcal{F}$ і $J \in \mathcal{F}$, то $I \cap J \in \mathcal{F}$.

T3. Якщо $I \in \mathcal{F}$ і $r \in R$, то $(I:r) \in \mathcal{F}$.

Якщо крім цих умов виконується умова

T4. Якщо J - ідеал кільця R і $\mathcal{J}\in\mathcal{F}$, причому $(J:r)\in\mathcal{F}$ для будь-якого $r\in\mathcal{J}$, то $J\in\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}$ називається радикальним фільтром кільця R [5].

Для кільця R множину, що складається з усіх ненульових правих ідеалів кільця і їх скінченних добутків, позначатимемо $\mathcal{R}_0(R)$. Для первинних кілець $\mathcal{R}_0(R)$ - це множина всіх ненульвих ідеалів кільця R, для непервинних кілець $\mathcal{R}_0(R)$ - це множина всіх /включаючи нульовий/ ідеалів кільця R. Якщо R - праве дуокільце, то множина $\mathcal{R}(R)$ утворює радикальний фільтр кільця R.

Означення. Нехай $m\in mspec_2(R)$ і $\mathcal{F}$ - радикальний /передрадикальний/ фільтр кільця R. Тоді локалізацією радикального /передрадикального/ фільтра $\mathcal{F}$ відносно правого максимального ідеалу m називається сім'я $\mathcal{F}_m=\{J_m \mid J\in\mathcal{F}\}$.

Виникає питання: чи буде сім'я $\mathcal{F}_m$ радикальним /передрадикальним/ фільтром кільця R_m? Відповідь на це питання дає лема, наведена далі.

Лема 4. Нехай m - довільний правий максимальний ідеал кільця R і кільце R задовольняє умову /*/. Тоді має місце таке твердження: якщо $\mathcal{F}$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R, то $\mathcal{F}_m$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R_m.

Доведення. Покажемо спочатку, що коли $\mathcal{F}$ - передрадикальний фільтр кільця R, то $\mathcal{F}_m$ - передрадикальний фільтр кільця R_m. Нехай $\mathcal{F}$ - передрадикальний фільтр кільця R. Доведемо, що $\mathcal{F}_m$ - передрадикальний фільтр кільця R_m. Перевіримо T1. Нехай $\mathcal{J}\in\mathcal{F}_m$ і $\mathcal{J}'$ - ідеал кільця R_m такий, що $\mathcal{J}\subset\mathcal{J}'$. Тоді $\mathcal{J}=J_m$ для деякого ідеалу $J\in\mathcal{F}$. Згідно з /2/ леми 3 $f_m^{-1}(\mathcal{J}')\supset f_m^{-1}(\mathcal{J})= f_m^{-1}(J_m)\supset J$. За T1 для передрадикального фільтра $\mathcal{F}$ $f_m^{-1}(\mathcal{J}')\in\mathcal{F}$. Згідно з /1/ леми 3 $\mathcal{J}'=(f_m^{-1}(\mathcal{J}'))_m$ і, отже, $\mathcal{J}'\in\mathcal{F}_m$. Тепер перевіримо T2. Нехай $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2\in\mathcal{F}_m$. Тоді $\mathcal{J}_1=(J_1)_m$ і $\mathcal{J}_2=(J_2)_m$, де $J_1, J_2\in\mathcal{F}$. За T2 для $\mathcal{F}$ маємо $J_1\cap J_2\in\mathcal{F}$. Звідси $\mathcal{J}_1\cap\mathcal{J}_2=(J_1)_m\cap(J_2)_m=(J_1\cap J_2)_m\in\mathcal{F}_m$. Перевіримо T3. Нехай $\mathcal{J}\in\mathcal{F}_m$ і $x\in R$. Тоді $\mathcal{J}=J_m$,

де $J \in \mathcal{F}$; $x = f_m(r) f_m(d)^{-1}$. Оскільки $J : (f_m(r) f_m(d)^{-1}) =$ $= (J : f_m(r)) : f_m(d)^{-1}$, то достатньо показати, що $J : f_m(r) \in$ $\in \mathcal{F}_m$ і $J : f_m(d)^{-1} \in \mathcal{F}_m$. Згідно з /3/ леми 3 і Т3 для $\mathcal{F}$ маємо $J : f_m(r) = J_m : f_m(r) \supset (J : r)_m \in \mathcal{F}_m$ і, отже, за Т1 для $\mathcal{F}_m$ маємо $J : f_m(r) \in \mathcal{F}_m$. Тепер покажемо, що $J : f_m(d)^{-1} \in \mathcal{F}_m$. Розглянемо множину $K = \{ x \in R \mid f_m(d)^{-1} \times$ $\times f_m(x) \subset J \}$. Легко побачити, що K утворює правий ідеал кільця R. Оскільки $J : f_m(d)^{-1} = \{ f_m(x) f_m(d_1)^{-1} \mid f_m(d)^{-1} \times$ $\times f_m(x) f_m(d_1)^{-1} \in J \} = \{ f_m(x) \ f_m(d)^{-1} \mid$ $\mid f_m(d)^{-1} f_m(x) \in J \}$, то $K_m \supseteq J : f_m(d)^{-1}$. З $J \in \mathcal{F}_m$ випливає, що $J = J_m$, де $J \in \mathcal{F}$. Покажемо, що $J \subset K$, звідки за Т1 для $\mathcal{F}$ отримаємо, що $K \in \mathcal{F}$, а отже, $J : f_m(d)^{-1} \in \mathcal{F}_m$. Нехай $i \in J$. Тоді згідно з умовою /ж/ і лемою 2 існують $d' \in D$ і $i' \in J$ такі, що $id' = di'$. Тоді $f_m(id') = f_m(di')$. Звідси $f_m(d)^{-1} f_m(i) = f_m(i') f_m(d')^{-1} \in J_s = J$.
Отже, $i \in K$. Тепер покажемо, що коли $\mathcal{F}$ – радикальний фільтр кільця R, то $\mathcal{F}_m$ – радикальний фільтр кільця R_m. Умови Т1–Т3 для $\mathcal{F}_m$ перевіряються так само, як для передрадикального фільтра. Перевіримо умову Т4. Нехай J – ідеал кільця R_m; $L \in \mathcal{F}_m$ і $(J : l) \in \mathcal{F}_m$ для всіх $l \in L$. Тоді $L = J_m$ для деякого $J \in \mathcal{F}$. Оскільки $f_m(J) \subset J_m = L$, то $J : f_m(i) \in \mathcal{F}_m$ для всіх $i \in J$. Таким чином, для кожного $i \in J$ існує правий ідеал K_i такий, що $(K_i)_m = J : f_m(i)$. Згідно з /5/ і /3/ леми 3 $(f_m^{-1}(J) : i) = f_m^{-1}(J : f_m(i)) = f_m^{-1}((K_i)_m) \supset K_i \in \mathcal{F}$ і, отже, $f_m^{-1}(J) : i \in \mathcal{F}$ за Т1 для $\mathcal{F}$. Використовуючи Т4 для $\mathcal{F}$, отримуємо $f_m^{-1}(J) \in \mathcal{F}$ і, отже, $J = (f_m^{-1}(J))_m \in \mathcal{F}_m$.

Тепер покажемо, що умову /ж/ в лемі 4 не можна послабити, тобто що вона є не тільки достатньою, а й необхідною.

<u>Лема 5</u>. Нехай $\mathfrak{M}$ - довільний правий максимальний ідеал кільця R і в кільці R вірне таке твердження: якщо $\mathcal{F}$ - передрадикальний фільтр кільця R, то $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ - передрадикальний фільтр кільця $R_{\mathfrak{M}}$. Тоді кільце R задовольняє умову /ж/.

<u>Доведення</u>. Нехай $\mathcal{I}$ - довільний правий ідеал кільця R; $\mathcal{F}$ - найменший передрадикальний фільтр кільця R, що містить правий ідеал $\mathcal{I}$. Тоді легко побачити, що $\mathcal{F} = \{ \mathcal{J}$ - ідеал кільця $R / \mathcal{J} \supset \mathcal{I}\}$. За умови леми $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ - передрадикальний фільтр кільця $R_{\mathfrak{M}}$. Оскільки $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ - передрадикальний фільтр, то $\mathcal{I}_{\mathfrak{M}} : f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$, де d - довільний елемент множини $D = R \setminus \mathfrak{M}$. Нехай $K = \{x \in R \mid f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} f_{\mathfrak{M}}(x) \in \mathcal{I}_{\mathfrak{M}}\}$. Очевидно, що K найбільше серед ідеалів $\mathcal{J}$ кільця R таких, що $\mathcal{J}_{\mathfrak{M}} = \mathcal{I}_{\mathfrak{M}} : f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1}$. Оскільки $\mathcal{I}_{\mathfrak{M}} : f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$, то серед цих ідеалів $\mathcal{J}$ хоча б один належить радикальному фільтру $\mathcal{F}$, а за умови TI для $\mathcal{F}$ і включення $\mathcal{J} \subset K$ отримуємо $K \in \mathcal{F}$. Звідси $\mathcal{I} \subset K$. Отже, для будь-якого $i \in \mathcal{I}$ маємо $f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} f_{\mathfrak{M}}(i) \in \mathcal{I}_{\mathfrak{M}}$, тобто існують $j \in \mathcal{I}$, $d_1 \in D$ такі, що $f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} f_{\mathfrak{M}}(i) = f_{\mathfrak{M}}(j) f_{\mathfrak{M}}(d_1)^{-1}$. Тоді $f_{\mathfrak{M}}(id_1 - dj) = 0$, тобто $id_1 - dj \in \operatorname{Ker} f_{\mathfrak{M}}$. Згідно з умовою /3/ означення правого кільця дробів $R_{\mathfrak{M}}$ існує $d_2 \in D$ таке, що $(id_1 - dj) d_2 = 0$, тобто $id_1 d_2 - dj d_2 = 0$. Оскільки $\mathcal{I}$ - правий ідеал кільця R, то $i' = j d_2 \in \mathcal{I}$. З того, що D - мультиплікативно замкнена множина, випливає $d' = d_1 d_2 \in D$. Отже, виконується умова $\forall i \in \mathcal{I}\ \forall d \in D\ \exists i' \in \mathcal{I}\ \exists d' \in D : id' - di' = 0$. Згідно з лемою 2 ця умова еквівалентна умові /ж/.

<u>Твердження 2</u>. Нехай $\mathfrak{M}$ - довільний правий максимальний ідеал кільця R. Тоді в кільці R умова /ж/ виконується тоді і тільки тоді, коли в кільці R справджується таке твердження. З того, що $\mathcal{F}$ -

передрадикальний фільтр кільця R, випливає: $\mathcal{F}_m$ – передрадикальний фільтр кільця R_m.

Доведення. Випливає як наслідок лем 4 і 5.

Нехай $\mathcal{Y}$ – радикальний /передрадикальний/ фільтр кільця R_m. Позначимо $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ сім'ю $\{ J$ – правий ідеал кільця $R / J_m \in \mathcal{Y} \}$.

Твердження 3. Нехай m – правий максимальний ідеал кільця R; $\mathcal{Y}$ – передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R_m. Тоді $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ – передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R.

Доведення. Нехай $\mathcal{Y}$ – передрадикальний фільтр кільця R_m. Покажемо, що $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ – передрадикальний фільтр кільця R. Перевіримо спочатку T1. Нехай $J \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ і $\mathcal{J} \supset J$, де $\mathcal{J}$ – ідеал кільця R. Тоді $J_m \subset \mathcal{J}_m$. Оскільки $J_m \in \mathcal{Y}$, то згідно з T1 для $\mathcal{Y}$ маємо $\mathcal{J}_m \in \mathcal{Y}$. Отже, $\mathcal{J} \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$. Перевіримо T2. Нехай $J \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ і $\mathcal{J} \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$. Тоді $J_m \in \mathcal{Y}$ і $\mathcal{J}_m \in \mathcal{Y}$. Згідно з T2 для $\mathcal{Y}$ маємо $(J \cap \mathcal{J})_m = J_m \cap \cap \mathcal{J}_m \in \mathcal{Y}$. Звідси $J \cap \mathcal{J} \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$. Тепер перевіримо T3. Нехай $J \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ і $r \in R$. Оскільки R – праве дуокільце, то $(J : r) \supset J$. Згідно з T1 для $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ маємо $J : r \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$.

Тепер покажемо, що коли $\mathcal{Y}$ – радикальний фільтр кільця R_m, то $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ – радикальний фільтр кільця R. Умови T1-T3 перевіряються так само, як у випадку передрадикального фільтра. Перевіримо T4. Нехай J – правий ідеал кільця R, $\mathcal{J} \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ і $(J : j) \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ для всіх $j \in \mathcal{J}$. Згідно з /3/ леми 3 $J_m : f_m(j) \supset (J : j)_m \in \mathcal{Y}$ і, отже, $J_m : f_m(j) \in \mathcal{Y}$. Згідно з T3 для $\mathcal{Y}$ маємо $J_m : f_m(j) f_m(d)^{-1} = (J_m : f_m(j)) : f_m(d)^{-1} \in \mathcal{Y}$ для будь-якого $d \in R \setminus m$. Таким чином, $(J_m : x) \in \mathcal{Y}$ для всіх $x \in \mathcal{J}_m$. Згідно з T4 для $\mathcal{Y}$ маємо $J_m \in \mathcal{Y}$ і, отже, $J \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$.

Передрадикальний /радикальний/ фільтр назвемо ненульовим, якщо він складається лише з ідеалів, які належать $\mathcal{R}_0(R)$. Для первинних кілець це означає, що передрадикальний /радикальний/ фільтр не містить нульового ідеалу.

Позначимо $\mathcal{U}_0'(R)$ сім'ю всіх ненульових передрадикальних фільтрів кільця R, а $\mathcal{U}_0(R)$ - сім'ю всіх ненульових радикальних фільтрів кільця R. Нехай $m \in mspec_r(R)$. Тоді $\mathcal{U}_0'(R_m)$- сім'я всіх ненульових передрадикальних фільтрів кільця R_m, а $\mathcal{U}_0(R_m)$- сім'я всіх ненульових радикальних фільтрів кільця R_m.

Функцію $\Phi': \mathcal{U}_0'(R) \to \prod_{m \in mspec_r(R)} \mathcal{U}_0'(R_m)$ визначимо так: $\Phi'(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{F}_m \rangle_{m \in mspec_r(R)}$ для кожного $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_0'(R)$.

Якщо визначене раніше відображення Φ' біективне, то кільце R називається кільцем з локально визначеними передкрученнями [3; 9].

Розглянемо тепер відображення

$$\Phi: \mathcal{U}_0(R) \to \prod_{m \in mspec_r(R)} \mathcal{U}_0(R_m),$$

визначене так: $\Phi(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{F}_m \rangle_{m \in mspec_r(R)}$ для кожного $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_0(R)$.

Зазначимо, що Φ було визначене в [1] для комутативних областей цілісності. Якщо відображення Φ біективне, то кільце R називається кільцем з локально визначеними крученнями.

Кільце R називається h -локальним, якщо воно задовольняє такі умови:

/i/ кожний ненульовий правий первинний ідеал кільця R міститься в єдиному правому максимальному ідеалі;

/ii/ кожний ненульовий елемент з R міститься лише в скінченній кількості правих максимальних ідеалів [6].

Легко побачити, що коли в R є дільники нуля, то умова /ii/ еквівалентна умові, що в R існує лише скінченне число правих максимальних ідеалів.

Позначимо $\mathcal{B}$ множину всіх правих ідеалів кільця R, що містяться лише в скінченній кількості правих максимальних ідеалів кільця R. Легко побачити, що $\mathcal{B}$ - передрадикальний фільтр кільця R.

Визначимо на множині всіх правих ідеалів кільця R відображення Λ, що ставить у відповідність кожному правому ідеалу $\mathcal{J}$ кільця R правий ідеал $K(J) = \{x \in R \mid (J:x) \in B\}$. Покажемо, що $K(J)$ дійсно є правим ідеалом кільця R для кожного правого ідеалу J кільця R. Нехай x і y належать $K(J)$. Тоді $(J:x) \in B$ і $(J:y) \in B$. Оскільки $J:(x+y) \supset (J:x) \cap (J:y)$, то $J:(x+y) \in B$. Таким чином, $x+y \in K(J)$. Тепер покажемо, що коли $x \in K(J)$ і z – будь-який елемент кільця R, то $x \cdot z \in K(J)$. Це випливає з включення $(J:xz) = (J:x):z \supset J:x$. Оскільки $(J:x) \in B$, то $(J:xz) \in B$. Отже, $xz \in K(J)$.

Для будь-якого правого ідеалу J кільця R множину правих максимальних ідеалів кільця R, що містять J, позначатимемо $V(J)$.

Має місце таке твердження.

<u>Лема 6</u>. Визначеному раніше відображенню K притаманні такі властивості:

/1/ Якщо J – правий ідеал кільця R, то $J \subset K(J)$.

/2/ Якщо J, $\mathcal{J}$ – праві ідеали кільця R, то випливає таке:
/а/ якщо $J \subset \mathcal{J}$, то $K(J) \subset K(\mathcal{J})$;

/б/ $K(J \cap \mathcal{J}) = K(J) \cap K(\mathcal{J})$;

/в/ $K(J)\, K(\mathcal{J}) \subset K(J \cdot \mathcal{J})$.

<u>Доведення</u>. Доведемо властивість I. Нехай $i \in J$. Тоді $(J:i) = R$, оскільки J – правий ідеал кільця R. Отже, $i \in K(J)$. Тепер покажемо справджуваність 2а. Нехай $J \subset \mathcal{J}$ і $x \in K(J)$. Тоді $(J:x) \subset (\mathcal{J}:x)$. Оскільки $x \in K(J)$, то $(J:x) \in B$, а отже, $(\mathcal{J}:x) \in B$. Таким чином, $x \in K(\mathcal{J})$. Перевіримо властивість 2б. Нехай $x \in K(J \cap \mathcal{J})$. Тоді $((J \cap \mathcal{J}):x) \in B$. Оскільки $((J \cap \mathcal{J}):x) \subset (J:x)$ і $((J \cap \mathcal{J}):x) \subset (\mathcal{J}:x)$, то $(J:x) \in B$ і $(\mathcal{J}:x) \in B$. Отже, $x \in K(J)$ і $x \in K(\mathcal{J})$, тобто $x \in K(J) \cap K(\mathcal{J})$. Таким чином, $K(J \cap \mathcal{J}) \subset K(J) \cap K(\mathcal{J})$. Тепер покажемо обернене включення $K(J) \cap K(\mathcal{J}) \subset K(J \cap \mathcal{J})$. Легко побачити,

що має місце рівність $((\mathcal{I}\cap\mathcal{J}):x)=(\mathcal{I}:x)\cap(\mathcal{J}:x)$. Нехай $x\in K(\mathcal{I})\cap K(\mathcal{J})$. Тоді $(\mathcal{I}:x)\in\mathcal{B}$ і $(\mathcal{J}:x)\in\mathcal{B}$. Отже, $((\mathcal{I}\cap\mathcal{J}):x)=(\mathcal{I}:x)\cap(\mathcal{J}:x)\in\mathcal{B}$. Таким чином, $x\in K(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$.

Тепер доведемо 2в. Нехай $z\in K(\mathcal{I})K(\mathcal{J})$. Тоді $z=xy$, де $x\in K(\mathcal{I})$; $y\in K(\mathcal{J})$. Покажемо, що $z\in K(\mathcal{I}\cdot\mathcal{J})$, тобто $((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}):z)\in\mathcal{B}$. Оскільки $x\in K(\mathcal{I})$, $y\in K(\mathcal{J})$, то $(\mathcal{I}:x)\in\in\mathcal{B}$ і $(\mathcal{J}:y)\in\mathcal{B}$. Виберемо $d_1\in(\mathcal{I}:x)$ і $d_2\in(\mathcal{J}:y)$ такі, що $d_1, d_2\notin m$, де $m\notin V(\mathcal{I}:x)\cup V(\mathcal{J}:y)$. Оскільки кільце R задовольняє умову /ж/, то для елементів $yd_2\in\mathcal{J}$ і $d_1\notin m$ існують елементи $j\in\mathcal{J}$ і $d_1'\notin m$ такі, що $yd_2d_1'=d_1j$. Покажемо, що $d_2d_1'\in((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}):z)$. Дійсно, $zd_2d_1'==xyd_2d_1'=xd_1j\in\mathcal{I}\mathcal{J}$. Отже, оскільки $d_2d_1'\in m$, то $((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}):z)\notin m$. Таким чином, $V((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}):z)\subset V(\mathcal{I}:x)\cup V(\mathcal{J}:y)$ і, отже, $((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}):z)\in\mathcal{B}$, тобто $z\in K(\mathcal{I}\cdot\mathcal{J})$.

Для кожного елемента a з R визначимо $K(a)=K(aR)$.

Означення. Кільце R називається h-квазілокальним, якщо воно задовольняє умову /і/ з означення h-локального кільця, а замість умови /іі/ має місце така умова:
/іі'/ для кожного ненульового елемента a з R маємо $K(a)\in\mathcal{B}$.

Зауваження. І. Якщо в R є дільники нуля і R задовольняє умову /іі'/, то існує скінченна множина правих максимальних ідеалів $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ кільця R така, що для будь-якого ненульового елемента a з R: $V(K(a))\subset\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ /це випливає з того, що $K(0)\in\mathcal{B}$/.

2. Умова /іі'/ еквівалентна такій умові: для кожного ненульового правого ідеалу $\mathcal{I}$ кільця R маємо $K(\mathcal{I})\in\mathcal{B}$.

Очевидно, що кожне h-локальне кільце є h-квазілокальним. У [9] наведено приклад, який показує, що з h-квазілокальності не випливає h-локальність. За допомогою прикладу показано також, що з умови /і/ h-квазілокальності не випливає умова /іі'/.

Лема 7. Нехай m_1, m_2 - довільні праві максимальні ідеали кільця R і для будь-яких $t_1\notin m_1$ та $t_2\notin m_2$ маємо

$t_1 t_2 \neq 0$. Тоді множина $T=(R\setminus m_1)(R\setminus m_2)$ є мультиплікативно замкненою множиною кільця R.

Доведення. Елементи множини T можуть бути подані так:

а/ $d_1 d_1' d_2 d_2' \dots d_n d_n'$, де $d_1, d_2, \dots, d_n \notin m_1$, $d_1', d_2', \dots, d_n' \notin m_2$;

б/ $d_1' d_1 d_2' d_2 \dots d_k' d_k$, де $d_1, d_2, \dots, d_k \notin m_1$, $d_1', d_2', \dots, d_k' \notin m_2$;

в/ $d_1 d_1' d_2 d_2' \dots d_{\ell-1} d_{\ell-1}' d_\ell$, де $d_1, d_2, \dots, d_\ell \notin m_1$, $d_1', d_2', \dots, d_{\ell-1}' \notin m_2$;

г/ $d_1' d_2 d_2' \dots d_m d_m'$, де $d_2, d_3, \dots, d_m \notin m_1$, $d_1', d_2', \dots, d_m' \notin m_2$.

Помножуючи попарно елементи вигляду а-г, отримуємо елементи вигляду а-г. Отже, множина T замкнена відносно множення. Очевидно, що $1 \in T$. Тепер покажемо, що $0 \notin T$. Припустимо супротивне. Нехай елемент вигляду а/дорівнює нулю: $d_1 d_1' d_2 d_2' \dots d_i d_i' \dots d_n d_n' = 0$. Індукцією за i покажемо, що тоді існують елементи $t_1 \notin m_1$ і $t_2 \notin m_2$ такі, що $t_1 t_2 = 0$. Нехай $i=1$, Тоді $d_1 d_1' = 0$, де $d_1 \notin m_1$; $d_1' \notin m_2$, що й треба було довести. Тепер припустимо, що наше твердження справджується для $i = n-1$, і покажемо, що воно має місце при $i=n$. Нехай $d_1 d_1' d_2 d_2' \dots d_n d_n' = 0$. Оскільки кільце R задовольняє умову /ж/, то для елементів $d_n' \in R$ і $d_n \notin m_1$ існують елементи $c_1 \in R$ і $d_n'' \notin m_1$ такі, що $d_n' d_n'' = d_n d_n' c$. Оскільки $d_1 d_1' d_2 d_2' \dots d_n d_n' c = 0$, то $d_1 d_1' d_2 d_2' \dots d_n' d_n'' = 0$. Використовуючи ще раз умову /ж/, отримуємо, що для елементів $d_1 \notin m_1$ і $d_1' d_2 d_2' \dots d_{n-1}' d_n' d_n'' \in R$ існують елементи $c_2 \in R$ і $d_1'' \notin m_1$ такі, що

$$d_1' d_2 d_2' \dots d_{n-1}' d_n' d_n'' d_1'' = d_1 d_1' d_2 d_2' \dots d_{n-1}' d_n' d_n'' c_2.$$

Оскільки $d_1 d_2' d_2 d_2' \dots d_{n-1}' d_n' d_n'' = 0$, то $d_1' d_2 d_2' \dots d_{n-1}' d_n' d_n'' d_1'' = 0$. Аналогічно, скориставшись умовою /ж/, можна показати, що існує $d_1''' \in m_2$ таке, що

$d_2 d_2' \dots d_{n-1}' d_n' d_n'' d_1'' d''' = 0$. Отже, існують $s_1 = d_2, s_2 = d_3, \dots$ $\dots, s_{n-2} = d_{n-1}, s_{n-1} = d_n'' d_1'', s_1' = d_2', s_2' = d_3', \dots, s_{n-2}' = d_{n-1}' d_n'$, $s_{n-1}' = d_1'''$ такі, що $s_1 s_1' s_2 s_2' \dots s_{n-1} s_{n-1}' = 0$, де $s_1, s_2, \dots$ $\dots, s_{n-1} \notin m_1$; $s_1', s_2', \dots, s_{n-1}' \notin m_2$. Отже, за припущенням індукції існують $t_1 \notin m_1$ і $t_2 \notin m_2$ такі, що $t_1 t_2 = 0$, а це суперечить умові леми. Аналогічно можна показати, що елементи множини T вигляду б-г також не можуть дорівнювати нулю. Отже, $0 \notin T$ і множина T є мультиплікативно замкненою множиною кільця R.

Лема 8. Нехай R - кільце, в якому кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі. Тоді для довільного власного правого ідеалу J /$J \neq 0$, коли R - первинне кільце/ і будь-якого $m \in mspec_2(R)$ правий ідеал $f_m^{-1}(J_m)$ міститься в єдиному правому максимальному ідеалі m, якщо m містить J і $f_m^{-1}(J_m) = R$, якщо m не містить J.

Доведення. Якщо $J \not\subset m$ для деякого $m \in mspec_2(R)$, то $f_m^{-1}(J_m) = R$, оскільки в J_m існує обернений елемент і, отже, $J_m = R_m$. Тепер розглянемо такі $m \in mspec_2(R)$, які містять J. Покажемо, що $f_m^{-1}(J_m)$ для таких m міститься в єдиному правому максимальному ідеалі, а саме в m.

Розглянемо два випадки:

1/ R має дільники нуля;

2/ R не має дільників нуля.

Перший випадок. Нехай R має дільники нуля. Покажемо, що з того, що в R кожний правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі, випливає: для будь-яких правих максимальних ідеалів m_1 і m_2 існують елементи $z_1 \notin m_1$ і $z_2 \notin m_2$ такі, що $z_1 \cdot z_2 = 0$. Припустимо супротивне, тобто що для всіх $z_1 \notin m_1$ і $z_2 \notin m_2$ маємо $z_1 \cdot z_2 \neq 0$. Розглянемо множину $T = (R \setminus m_1) \times (R \setminus m_2)$. Згідно з лемою 7 множина T є мультиплікативно замкненою множиною кільця R. Тепер покажемо, що правий ідеал P, максимальний серед правих ідеалів J кільця R таких, що $J \cap T = \phi$, є первинним. Нехай $aRb \subset p$. Покажемо, що $a \in p$ або $b \in p$. Припустимо супротивне: $a \notin p$ і $b \notin p$. Тоді $p + aR \supsetneqq p$ і $p + bR \supsetneqq p$. Оскільки R – дуокільце, то p двобічний і $(p + aR) \times (p + bR) \subset p$. Оскільки p максимальний серед правих ідеалів J, що не перетинаються з T і $p + aR \supsetneqq p$, $p + bR \supsetneqq p$, то існують $t_1 \in (p + aR) \cap T$ і $t_2 \in (p + bR) \cap T$. Тоді $t_1 t_2 \in p$, оскільки $(p + aR)(p + bR) \subset p$, і $t_1 t_2 \in T$, оскільки T – мультиплікативно замкнена множина кільця R. Отримано $p \cap T \neq \emptyset$, що суперечить вибору p. Таким чином, $a \in p$ або $b \in p$ і, отже, правий ідеал p первинний. Оскільки в R є дільники нуля, то нульовий ідеал не первинний і, отже, $p \neq 0$. Але в такому випадку p ненульове і міститься в двох різних правих максимальних ідеалів m_1 і m_2. Це суперечить умові, що кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі. Таким чином, для будь-яких правих максимальних ідеалів m_1 і m_2 існують елементи $z_1 \notin m_1$ і $z_2 \notin m_2$ такі, що $z_1 \cdot z_2 = 0$. Нехай m – деякий правий максимальний ідеал кільця R. Тоді для будь-якого іншого правого максимального ідеалу m' існують елементи $z \notin m$ і $z' \notin m'$ такі, що $z'z = 0$. Нехай f_m – канонічний гомоморфізм з R у R_m. За означенням $\ker f_m = \{x \in R \mid \exists z \notin m \ xz = 0\}$. З викладеного випливає, що $\ker f_m \not\subset m'$ для будь-якого правого максимального ідеалу $m' \neq m$. Оскільки $f_m^{-1}(J_m) \supset \ker f_m$ і J – власний правий ідеал кільця R, що міститься в m, то $f_m^{-1}(J_m)$ міститься в єдиному правому максимальному ідеалі, а саме в m.

<u>Другий випадок</u>. Нехай R не має дільників нуля і J – будь-який власний правий ненульовий ідеал кільця R. Якщо J первинний, то за умови леми він лежить в єдиному правому максимальному ідеалі m. Оскільки $J \subset f_m^{-1}(J_m)$ /згідно з /2/ леми 3./, то $f_m^{-1}(J_m)$ також міститься лише в одному правому максимальному ідеалі, а саме в m. Тому припустимо, що J – непервинний правий ідеал кільця R. Тоді кільце R/J містить дільники нуля. Максимальними правими ідеалами в R/J є ідеали вигляду m/J, де $m \in mspec_r(R)$

і $\mathfrak{m}$ містить J. Зазначимо, що R/J також притаманна така властивість, що кожний його ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі. Нехай $\mathfrak{m}$ - деякий правий максимальний ідеал кільця R, що містить J. Розглянемо канонічний гомоморфізм $f_{\mathfrak{m}/J}: R/J \to (R/J)_{\mathfrak{m}/J}$. Тоді, як і в першому випадку, доводимо, що $\operatorname{Ker} f_{\mathfrak{m}/J} \not\subset \mathfrak{m}'/J$, де $\mathfrak{m}'$ - правий максимальний ідеал, що містить J, відмінний від $\mathfrak{m}$. Оскільки $\operatorname{Ker} f_{\mathfrak{m}/J} = f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J_{\mathfrak{m}})|J$, то $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J_{\mathfrak{m}}) \not\subset \mathfrak{m}'$ для будь-якого правого максимального ідеалу $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$. Таким чином, лему доведено.

Наслідок. Для будь-якого власного ідеалу J кільця $R_{\mathfrak{m}}$ $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J)$ міститься лише в одному правому максимальному ідеалі, а саме в $\mathfrak{m}$.

Лема 9. Нехай $\mathcal{U}[\mathfrak{m}]$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця $R_{\mathfrak{m}}$ для кожного $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$. Тоді $\mathcal{F} = \{J | J$ - правий ідеал кільця R і $J_{\mathfrak{m}} = \mathcal{U}[\mathfrak{m}]$ для всіх $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)\}$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R.

Доведення. Згідно з твердженням 3 $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{U}[\mathfrak{m}])$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R для кожного $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$. Очевидно, що $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in mspec_r(R)} f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{U}[\mathfrak{m}])$. Оскільки переріз будь-якого числа передрадикальних фільтрів /радикальних фільтрів/ є передрадикальним /радикальним/ фільтром, то $\mathcal{F}$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R.

Лема 10. Будь-який ненульовий правий первинний ідеал кільця R міститься лише в одному правому максимальному ідеалі кільця R тоді і тільки тоді, коли $\Phi(\Phi')$ сюр'єктивне.

Доведення. Припустимо, що кожний ненульовий правий первинний ідеал кільця R міститься в єдиному правому максимальному ідеалі кільця R. Нехай $\langle \mathcal{U}[\mathfrak{m}] \rangle \in \prod_{\mathfrak{m} \in mspec_r(R)} \mathcal{U}_0(R_{\mathfrak{m}}) \left(\prod_{\mathfrak{m} \in mspec_r(R)} \mathcal{U}_0'(R_{\mathfrak{m}}) \right)$.
Визначимо $\mathcal{F} = \{J | J$ - правий ідеал кільця R і $J_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{U}[\mathfrak{m}]$ для всіх $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)\}$. Згідно з лемою 9 $\mathcal{F}$ - передрадикальний

/радикальний/ фільтр кільця R. Нехай $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$. Покажемо, що $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{W}[\mathfrak{m}]$. Включення $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{W}[\mathfrak{m}]$ очевидне. Перевіримо включення $\mathcal{W}[\mathfrak{m}] \subset \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$. Нехай $J \in \mathcal{W}[\mathfrak{m}]$. Тоді згідно з наслідком леми 8 $f_m^{-1}(J)$ міститься лише в одному правому максимальному ідеалі кільця R, а саме в m. Звідси випливає, що $(f_m^{-1}(J))_m = J$ і $(f_m^{-1}(J))_{m'} = R_{m'}$ для будь-якого $m' \in mspec_r(R) \setminus \{m\}$. Отже, $f_m^{-1}(J) \in \mathcal{F}$. Оскільки згідно з /I/ леми 3 $J = (f_m^{-1}(J))_m$, то $J \in \mathcal{F}_m$.

Припустимо, навпаки, що R – кільце, в якому існує ненульовий правий первинний ідеал P такий, що $P \subset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$, де $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in mspec_r(R)$, $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$. Нехай $\mathcal{F} = \{J / J$ – правий ідеал кільця R і $P \not\supset J\}$. Тоді легко побачити, що $\mathcal{F}$ – передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R. Для всіх $\mathfrak{m} \in mspec_r(R) \setminus \{\mathfrak{m}_2\}$ розглянемо передрадикальні /радикальні/ фільтри $\mathcal{W}[\mathfrak{m}] = \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$. Для $\mathfrak{m}_2$ розглянемо передрадикальний /радикальний/ фільтр $\mathcal{W}[\mathfrak{m}_2] = \mathcal{R}_o(R_{\mathfrak{m}})$. Покажемо, що $\langle \mathcal{W}[\mathfrak{m}] \rangle \in \prod_{\mathfrak{m} \in mspec_r(R)} \mathcal{W}_o(R_{\mathfrak{m}})$ не є образом жодного радикального фільтра в разі відображення $\Phi(\Phi')$. Припустимо протилежне, тобто що існує $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{W}_o(R)$ такий, коли $\Phi(\mathcal{F}_1) = \langle \mathcal{W}[\mathfrak{m}] \rangle$ $(\Phi'(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{W}[\mathfrak{m}] \rangle)$. Тоді $(\mathcal{F}_1)_{\mathfrak{m}} = \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$ для всіх $\mathfrak{m} \in mspec_r(R) \setminus \{\mathfrak{m}_2\}$ $(\mathcal{F}_1)_{\mathfrak{m}_2} = \mathcal{W}[\mathfrak{m}_2]$. Оскільки $\mathcal{W}[\mathfrak{m}_2] = \mathcal{R}_o(R)$, то $P_{\mathfrak{m}_2} \in \mathcal{W}[\mathfrak{m}_2]$ і, отже, $P = f_{\mathfrak{m}_2}^{-1}(P_{\mathfrak{m}_2}) \in \mathcal{F}_1$. Отже, $P_{\mathfrak{m}_1} \in (\mathcal{F}_1)_{\mathfrak{m}_1} = \mathcal{W}[\mathfrak{m}_1]$ і $P = f_{\mathfrak{m}_1}^{-1}(P_{\mathfrak{m}_1}) \in \mathcal{F}$. Отримуємо $P \not\supset P$. Ця суперечність показує, що $\Phi(\Phi')$ не є сюр'єктивним.

<u>Лема 11</u>. Нехай R – кільце, в якому кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі. Тоді для будь-якого ненульового передрадикального фільтра $\mathcal{F}$ існує передрадикальний фільтр $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{B}$ такий, що $\Phi'(\mathcal{F}) = \Phi'(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$, тобто $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}} = (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{m}}$ для кожного $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$.

Доведення. Зауважимо, що згідно з /2/ леми 3 для будь-якого правого ідеалу $\mathcal{J}$ кільця R і для будь-якого $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$ маємо $\mathcal{J} \subset f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{J}_{\mathfrak{m}})$. Нехай $\mathcal{J} \in \mathcal{F}$. Тоді $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}) \in \mathcal{F}$ згідно з ТІ для $\mathcal{F}$ /для всіх $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$/. Оскільки в R кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в единому правому максимальному ідеалі, то згідно з лемою 8 $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{J}_{\mathfrak{m}})$ міститься не більше ніж в одному максимальному ідеалі, тобто $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}) \in \mathcal{B}$. Візьмемо як $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ передрадикальний фільтр $\mathcal{F} \cap \mathcal{B}$. Тоді $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}) \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ для будь-якого правого максимального ідеалу $\mathfrak{m}$ кільця R. Оскільки $\mathcal{J}_{\mathfrak{m}} = (f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}))_{\mathfrak{m}}$, то $\mathcal{J}_{\mathfrak{m}} \in (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{m}}$ для будь-якого $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$. Таким чином, $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}} \subset (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{m}}$ для кожного $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$. Включення $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$ для кожного $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$ очевидне, оскільки $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$. Отже, $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}} = (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{m}}$ для будь-якого правого максимального ідеалу $\mathfrak{m}$, що й треба було довести.

Лема I2. $\bigcap_{\mathfrak{m} \in mspec_r(R)} \ker f_{\mathfrak{m}} = 0.$

Доведення. Нехай $r \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in mspec_r(R)} \ker f_{\mathfrak{m}}$. Тоді для кожного $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$ існує $\alpha \notin \mathfrak{m}$ таке, що $r\alpha = 0$. Звідси випливає, що $Ann_r(r) \not\subset \mathfrak{m}$ для будь-якого $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$. Отже, $Ann_r(r) = R$. Оскільки R - кільце з $1 \neq 0$, то $r = 0$.

Теорема I. Кільце R є кільцем з локально визначеними передкрученнями тоді і тільки тоді, коли воно h-локальне.

Доведення. $(\Rightarrow)$. Із сюр'ективності φ' згідно з лемою I0 випливає, що в R кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в единому правому максимальному ідеалі. Тепер покажемо, що в R кожний ненульовий елемент x міститься лише в скінченному числі правих максимальних ідеалів. Розглянемо передрадикальний фільтр $\mathcal{F} = \{ J$ - правий ідеал в $R \mid J \supset xR\}$. Згідно з лемою II існує передрадикальний фільтр $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{B}$ такий, що $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{m}} = \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$ для будь-якого $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$. Оскільки φ' ін'ективне, то $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. Отже, $xR \in \mathcal{B}$.

$(\Longleftarrow)$. Нехай кожний ненульовий правий ідеал кільця R міститься лише в скінченному числі правих максимальних ідеалів і $(\mathcal{B}_1)_m = (\mathcal{B}_2)_m$ для всіх $m \in mspec_2(R)$, де $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ - передрадикальні фільтри в кільці R. Покажемо, що $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. Спочатку доведемо, що $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Нехай $J \in \mathcal{B}_1$. Тоді для кожного $m \in mspec_2(R)$ існує $J \in \mathcal{B}_2$ такий, що $J_m = J_m$. Оскільки згідно з /2/ і /6/ леми 3 $J \subset f_m^{-1}(J_m) = f_m^{-1}(J_m)$, то $f_m^{-1}(J_m) \in \mathcal{B}_2$ за Т1 для $\mathcal{B}_2$ для довільного $m \in mspec_2(R)$. Зазначимо, що $J = \bigcap\limits_{m \in mspec_2(R)} f_m^{-1}(J_m)$. Справді, $f_m^{-1}(J_m) = J + Ker f_m$. Отже, згідно з лемою 12

$$\bigcap_{m \in mspec_2(R)} f_m^{-1}(J_m) = \bigcap_{m \in mspec_2(R)} (J + Ker f_m) =$$
$$= J + \bigcap_{m \in mspec_2(R)} Ker f_m = J.$$

Оскільки J міститься лише в скінченному числі максимальних ідеалів $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то $J = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_{m_i}^{-1}(J_{m_i})$. Згідно з Т2 для $\mathcal{B}_2$ маємо $J \in \mathcal{B}_2$. Аналогічно доводиться, що $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$. Таким чином, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. Сюр'єктивність Φ' випливає з умови, що кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі /згідно з лемою 10/.

Кільця з локально визначеними передкрученнями є лише підкласом класу кілець з локально визначеними крученнями. Тому більший інтерес становлять кільця з локально визначеними крученнями.

Лема 13. Кільце R є кільцем з локально визначеними крученнями тоді і тільки тоді, коли R задовольняє умову, що кожний його ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі, а також коли для будь-якого ненульового радикального фільтра $\mathcal{F}$ кільця R маємо $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$, де $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$; $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ - мінімальний радикальний фільтр кільця R, що містить $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$.

Доведення. $(\Longrightarrow)$. Із сюр'єктивності Φ згідно з лемою 10 випливає, що в R кожний ненульовий правий первинний ідеал міститьсяся в єдиному правому максимальному ідеалі. Нехай $\mathcal{F}$ - деякий радикальний фільтр кільця R. Тоді згідно з лемою II існує $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$ такий, що $\mathcal{F}_m = (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m$ для будь-якого $m \in mspec_r(R)$. Оскільки $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$, то $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}_m$ для будь-якого $m \in mspec_r(R)$. З ін'єктивності Φ випливає, що $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$.

Нехай $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ - деякі ненульові радикальні фільтри кільця R такі, що $(\mathcal{F}_1)_m = (\mathcal{F}_2)_m$ для будь-якого $m \in mspec_r(R)$. Тоді згідно з лемою II $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1})_m = (\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2})_m$ для кожного $m \in mspec_r(R)$. Оскільки кожний правий ідеал з $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1}$ і $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2}$ міститься лише в скінченному числі правих максимальних ідеалів кільця R, то як і в разі доведення теореми I отримуємо $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}_2}$. Звідси випливає, що $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1}) = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2})$. Отже, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. Сюр'єктивність випливає з леми I0.

Лема I4. У кільці R для будь-якого ненульового радикального фільтра $\mathcal{F}$ маємо $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого ненульового ідеалу J кільця R $K(J) \in \mathcal{B}$.

Доведення. $(\Rightarrow)$. Нехай $\mathcal{R}_o(R)$ - радикальний фільтр усіх ідеалів кільця R /ненульових, якщо R первинне/. Тоді $\mathcal{R}_o(R) = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{R}_o(R)})$. Відомо, що коли $\mathcal{F}$ - передрадикальний фільтр, то мінімальний радикальний фільтр, який його містить, має вигляд

$\mathcal{J}(\mathcal{F}) = \{ J$ - правий ідеал у $R \mid \exists\, \mathcal{J} \in \mathcal{F}\ J \subset \mathcal{J}$ і $J : j \in \mathcal{F}\ \forall j \in \mathcal{J} \}$ [5]. Оскільки $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_o(R)} = \mathcal{B}$, то $\mathcal{R}_o(R) = \{ J$ - правий ідеал у $R \mid \exists\, \mathcal{J} \in \mathcal{B}\ J \subset \mathcal{J}$ і $J : j \in \mathcal{B}\ \forall j \in \mathcal{J} \}$. Оскільки $\mathcal{J} \subset K(J)$, то $\mathcal{R}_o(R) = \{ J$ - правий ідеал у $R \mid K(J) \in \mathcal{B} \}$. Отже, для будь-якого ненульового ідеалу J кільця R $K(J) \in \mathcal{B}$.

$(\Leftarrow)$. Нехай для будь-якого ненульового ідеалу J кільця R маємо $K(J) \in \mathcal{B}$. Якщо R має дільники нуля, то $K(0) \in \mathcal{B}$. У такому разі $\mathcal{R}_o(R) = \{ J$ - правий ідеал у $R \mid K(J) \in \mathcal{B} \}$. Отже, $\mathcal{R}_0(R) = \mathcal{J}(\mathcal{B})$. Нехай $\mathcal{F}$ – довільний ненульовий радикальний фільтр у R. Тоді $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{R}_0(R) = \mathcal{F} \cap \mathcal{J}(\mathcal{B}) = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$. Таким чином, лему доведено.

З лем I3 і I4 випливає справджуваність такого твердження:

<u>Теорема 2</u>. Кільце R є кільцем з локально визначеними крученнями тоді і тільки тоді, коли воно h-квазілокальне.

Список літератури

I. Brandal W., Barbut E. Localizations of torsion theories // Pacific J. Math., 1983.-<u>107</u>.-N1.-P. 27-37.

2. Larsen M., McCarthy P. Multiplicative theory of ideals // Acad. press.- N. Y. - London, 1971.- P. 61-74.

3. Тушницкий И.Я. Кольца с локально определенными кручениями // Международ.конф. по алгебре. Тез.докладов по теории колец, алгебр и модулей. - Новосибирск, 1989. - С. I35.

4. Brandal W. Constructing Bezout domains, Rocky Mountain // Math. J., 1976.-<u>6</u>.- P. 383-399.

5. Stenström B. Rings and modules of quotients. - Springer-Verlag. - Berlin - N. Y., 1975.

6. Matlis E. Decomposable modules // Trans. Amer. Math. Soc., 1966. - <u>125</u>.- P. 147-179.

7. Henriksen H. On the prime ideals of the ring of entire functions // Pacific J. Math., 1953. - <u>3</u>.- P. 711-720.

8. Heinzer W., Ohm. Locally Noetherian commutative rings // Trans. Amer. Math. Soc., 1971. - <u>158</u>.- P. 273-284.

9. Тушницкий И.Я. Кольца с локально определенными кручениями // Алгебра и логика, I99I. - <u>30</u>. - № 3. - С. 369-377.

I5 - 207

УДК 511.364

Я.М.Холявка

НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ ЧИСЕЛ, ЗВ'ЯЗАНИХ З $\mathrm{sn}\, z$

Нехай $\mathrm{sn}\, z$ – еліптична функція Якобі. У подальшому будемо дотримуватись таких позначень [1]: $\varkappa$ – модуль; 4ω, $2\omega'$ – довільна фіксована пара періодів $\mathrm{sn}\, z$. З теореми Шнайдера [2] та властивостей $\mathrm{sn}\, z$ [1, с. 235] отримаємо, що при $\varkappa \in \mathbb{A}$ числа ω та ω' трансцендентні. Позначимо $\xi_1, \ldots, \xi_4$ наближаючі алгебраїчні числа: n_i, L_i – їх степені та довжини. Доведемо таку теорему.

<u>Теорема</u>. Нехай $\varkappa \in \mathbb{A}$; β – число, відмінне від полюсів. Тоді

$$|\omega-\xi_1|+|\omega'-\xi_2|+|\beta-\xi_3|+|\mathrm{sn}\,\beta-\xi_4|>\exp(-\Lambda n^4M^4\ln^4(nM)), \quad (1)$$

де Λ – деяка ефективна стала; $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \ldots, \xi_4)$; $M = 1 + \sum_{i=1}^{4} n_i^{-1} \ln L_i$.

Сформулюємо деякі властивості $\mathrm{sn}\, z$.

<u>Лема 1</u>. Нехай $s, \ell \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(\mathrm{sn}^{\ell} z)^{(s)} = \mathcal{D}_{s,\ell}(\varkappa, \mathrm{sn}\, z, \mathrm{sn}' z),$$

де $\mathcal{D}_{s,\ell} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$, $\deg_{x_1} \mathcal{D}_{s,\ell} \le s$, $\deg_{x_2} \mathcal{D}_{s,\ell} \le s+\ell$, $\deg_{x_3} \mathcal{D}_{s,\ell} \le 1$, $L(\mathcal{D}_{s,\ell}) \le 4^s 2^{\ell}(s+\ell)!$

<u>Лема 2</u>. Нехай $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, $P(x_1, x_2) \not\equiv 0$ – многочлен степеня, що перевищує $\mathcal{D}_1$ за x_1 і $\mathcal{D}_2$ – за x_2, $\mathcal{D}_2 \ge 1$, $a \in \mathbb{C}$. Тоді функція $F(z) = P(z, \mathrm{sn}(z+a))$ має не більше $8\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 + 4\mathcal{D}_2 + 2$ нулів.

Доведення цих тверджень подібні до доведень відповідних властивостей еліптичної функції Вейєрштрасса [3; 4].

Доведення. Припустимо, що для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$

$$|\omega-\xi_1|+|\omega'-\xi_2|+|\beta-\xi_3|+|\wp\beta-\xi_4|<\exp(-\lambda^8 n^4 M^4 \ln^4(nM)). \qquad /2/$$

Нехай $\wp(z)$ - еліптична функція Вейєрштрасса з основними періодами 2ω, $2\omega'$; $\sigma(z)$ - відповідна σ-функція, $|f|_D=\sup_{z\in D}|f(z)|$, $L(P)$, $\deg_{x_k} P$ - довжина і степінь за змінною x_k многочлена P, $P\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_k]$; $(s,m,p)\in\Omega(A,B)$ означає, що $s,m,p\in \mathbb{Z}$, $0\le s\le A$, $|m|,|p|\le B$; $C_1,\dots$ - деякі ефективні сталі. Позначимо $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ твірні елементи поля $\mathbb{Q}(\xi_1,\dots,\xi_4)$:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{\ell=0}^{L} C_{k,\ell}\, z^k \wp^\ell z; \qquad /3/$$

$$C_{k,\ell}=\sum_{\tau=1}^{n} C_{k,\ell,\tau}\,\zeta_\tau, \quad C_{k,\ell,\tau}\in\mathbb{Z};$$

$$F_{m,p}(z)=\sum_{k=0}^{K}\sum_{\ell=0}^{L} C_{k,\ell}\, z^k \wp^\ell(z-\alpha(m,p)), \qquad /4/$$

$$\alpha_{m,p}=4m\xi_1+2p\xi_2+\xi_3-\theta, \quad \wp\theta=\xi_3.$$

Покладемо

$$T=3[nM\ln(nM)], \quad K=\lambda^4T^3, \quad L=\lambda^2T;$$
$$S=\lambda^3T^2, \quad N=\lambda T, \quad N_1=\lambda^2T. \qquad /5/$$

Використавши принцип Діріхле [4, с. 56], можна вибрати $C_{k,\ell,\tau}$ такими, що виконуються умови:

$$F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1+2p\xi_2+\xi_3)=0; \qquad /6/$$

$$0<\max|C_{k,\ell,\tau}|<\exp(\lambda^3T^3(M+\ln T)). \qquad /7/$$

15*

Із /2/-/5/, /7/, лем I, 2 і оцінки, подібної [5, с. 93], отримаємо

$$|F^{(s)}(4m\omega+2p\omega'+\beta)-F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1+2p\xi_2+\xi_3)|<$$
$$<\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^8T^4\right),\quad (s,m,p)\in\Omega(S,N_1). \qquad /8/$$

Враховуючи /6/, /8/, отримуємо

$$|F^{(s)}(4m\omega+2p\omega'+\beta)|<\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^8T^4\right),\ (s,m,p)\in\Omega(S,N). \quad /9/$$

Лема 3. Якщо /9/ правильне для $(s,m,p)\in\Omega(S,N_q)$, то 9 вірне для $(s,m,p)\in\Omega(S,N_{q+1})$, де $N_q=2^qN,\ 2^q<\lambda$.

Доведення. Нехай $G(z)=F(z)\,\sigma^L(z-\omega')$. Визначимо найменше можливе ціле τ так, щоб у колі радіуса τ містився паралелограм з вершинами $\pm4(N_{q+1}+1)\omega\pm2(N_{q+1}+1)\omega'$ і щоб виконувалась умова $\tau>|\beta|+|\theta|$. Позначимо $R=12\tau$. Тоді з /3/, /7/ і оцінки, подібної [5, с. 78], отримуємо

$$|G(z)|_{|z|\le R}<\exp\left(C_1 2^{2q}\lambda^4T^3\right). \qquad /10/$$

Використавши /3/, /7/, /9/ і аналог формули Ерміта [6, с. 115], отримаємо оцінку

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\le\tau}<\exp\left(-2^{2q}\lambda^5T^4\right). \qquad /11/$$

Виберемо достатньо мале ε. Тоді в ε-околах точок $4m\omega+$ $+2p\omega'+\beta,\ m,p\in\mathbb{Z}$ немає нулів $\sigma(z-\omega')$ і з [5, с. 78] для $|m|,|p|\le N_{q+1}$ отримаємо

$$|\sigma(z+\omega')|_{z\in V(\varepsilon,4m\omega+2p\omega'+\beta)}>\exp\left(-C_2 2^{2q}\lambda^4T^3\right). /12/$$

З /II/ та /I2/ для $z \in V(\varepsilon, 4m\omega + 2p\omega' + \beta)$ маємо

$$|P^{(s)}(4m\omega + 2p\omega' + \beta)| < \exp(-2^{2q-1}\lambda^5 T^4), \ (s,m,p) \in \Omega(S, N_{q+1}). \quad /I3/$$

З /I3/ та /8/ для $(s,m,p) \in \Omega(S, N_{q+1})$ отримаємо

$$|F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1 + 2p\xi_2 + \xi_3)| < \exp(-2^{2q-2}\lambda^6 T^4). \quad /I4/$$

Розглядаючи $F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1 + 2p\xi_2 + \xi_3)$, $(s,m,p) \in \Omega(S, N_1)$ як значення відповідних многочленів в алгебраїчних точках, з [3, с. 46] отримуємо для відмінних від нуля значень цих многочленів оцінку знизу:

$$|F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1 + 2p\xi_2 + \xi_3)| > \exp(-\lambda^3 T^3 n(\ln T + M)). \quad /I5/$$

З /5/, /I4/, /I5/ отримаємо

$$F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1 + 2p\xi_2 + \xi_3) = 0, \ (s,m,p) \in \Omega(S, N_{q+1}). \quad /I6/$$

З /8/ та /I6/ отримуємо /9/, що й доводить лему 3.

З /I6/ при $\frac{1}{2}\lambda \leq 2^q < \lambda$ отримаємо, що многочлени $P_{m,p}(z) = F_{m,p}(z)$ мають не менше $\lambda^7 T^4$ нулів. З леми 2 випливає, що $P_{m,p}(z)$ може мати не більше $9\lambda^6 T^4$ нулів. Отримана суперечність доводить теорему.

Список літератури

I. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. - М.: Наука, 1968. - 648 с.

2. Scheider T. Transzendenz periodischer Funktionen. 2 // J. reine und angew. Math., 1934 - 172. - N1. - S. 65-79.

3. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. - М.: Изд-во при МГУ, 1982. - 3II с.

4. Reyssat E. Approxim. algebrique de nombres lies aux Bonct. ellipt. et exp. // Bull. Soc. math. France, 1980.-N1.-P. 47-79.

5. Masser D. Elliptic functions and transcendence // Lect. Notes Math., 1975.-437.-P. 1-143.

6. Waldschmidt M. Nombres transcendants et groupes algebriques // Soc. Math. France. Asterisque, 1979.-69-70.-P.-1-218.

ЗМІСТ

Наукове видання

Алгебра і топологія

Тематичний збірник наукових праць

Зв.темплан 1993, поз. 180

Редактор І.В.Хронюк
Коректори: В.Г.Сідляренко
Л.С.Мазек
Н.Ф.Слоніна
С.М.Кушнір

Підп. до друку 31.08.93. Формат 60×84 1/16. Папір друк. № 3. Друк офсетний. Ум. др. арк. 6,76. Ум. фарбо-відб. 6,87
Облік.-вид. арк. 5,59. Тираж 300.
Зам. № 207 Ціна 2 крб.

Інститут системних досліджень
освіти України
252070 Київ-70, вул. П.Сагайдачного, 37

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.

2 крб.

З. 207.