УДК 512.7/.78

В.І.Андрійчук

ПРО ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ НАД ЛОКАЛЬНИМИ ТА ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ З ПОЛЯМИ ЛИШКІВ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

Під локальним /загальним локальним, псевдолокальним/ полем k розуміємо повне дискретно нормоване поле із скінченним /квазіскінченним [7], псевдоскінченним [6]/ полем лишків $\varkappa$. У цій роботі розглядаємо поля k з $\operatorname{char} \varkappa = 2$.

Нехай A – еліптична крива, визначена над полем k; $H^1(k, A)$ – група головних однорідних просторів кривої A над полем k; A_k – група k-раціональних точок кривої A.

Метою цієї роботи є доведення невиродженості /невиродженості зліва/ добутку Тейта – Шафаревича [I; 2]

$$H^1(k, A) \times A_k \longrightarrow Q/Z$$

для еліптичних кривих типів (a) і (b), за Нероном [3], визначених над локальним /псевдолокальним/ полем k з $\operatorname{char} \varkappa = 2$. Це доведення грунтується на виконаному О.М.Введенським [4] прямому обчисленні добутку Тейта – Шафаревича

$$H^1(Gal(l/k), A_l) \times H^0(Gal(l/k), A_l) \xrightarrow{T_l} Q/Z$$

для простих циклічних розширень l/k.

Випадок кривих типу (c), за Нероном [3], буде розглянутий у наступній роботі.

Позначаємо π – простий елемент поля k; v_k – нормування k; O_k – кільце цілих поля k; U_k – групу одиниць кільця O_k. Якщо $a \in O_k$, то $a \pmod{\pi}$ позначаємо символом $\bar{a}$. Нехай l – скінченне розширення поля k. Відповідні елементи поля l позначаємо

I*

Π, v_l, V_l, U_l. Якщо l/k – розширення Галуа, то $g = Gal(l/k)$ – група Галуа розширення l/k; $H^i(g, X)$ – тейтівські когомології Галуа g-модуля X.

Якщо A – еліптична крива, визначена над полем k, то Вейєрштрассове рівняння кривої A має вигляд

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6, \ (a_i \in v_k). \qquad /1/$$

Крива A має тип (a), за Нероном, якщо крива A' – редукція кривої A – з рівнянням $y^2 + \bar{a}_1 xy + \bar{a}_3 y = x^3 + \bar{a}_2 x^2 + \bar{a}_4 x + \bar{a}_6$ є еліптичною кривою, і має тип (b_n), за Нероном, якщо

$$V_k(a_1^2 + 4a_2) = 0, \ V_k(a_3) > \frac{n}{2}, \ V_k(a_4) > \frac{n}{2}, \ V_k(a_6) = n. \qquad /2/$$

Крива типу (b_n) є кривою з мультиплікативною редукцією, якщо корені рівняння $X^2 + \bar{a}_1 X + \bar{a}_2 = 0$ лежать у полі $\mathfrak{a}$.

Теорема. Нехай A – еліптична крива типу (a), визначена над локальним або псевдолокальним полем k з $char\, \mathfrak{a} = 2$, або еліптична крива типу (b_n) над загальним локальним полем k з $char\, \mathfrak{a} = 2$. Добуток Тейта – Шафаревича невироджений зліва для кривої A.

Щоб довести теорему, досить довести, за О.М.Введенським [4], невиродженість добутку Тейта – Шафаревича

$$H^1(g, A_l) \times H^0(g, A_l) \xrightarrow{T_l} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \qquad /3/$$

для простих циклічних розширень l/k.

Для простого циклічного розширення l/k нехай σ – твірний елемент групи $Gal(l/k)$; $f(\sigma)$ – представник класу групи $H^1(g, A_l)$; $a_k \in A_k$ – представник класу групи $H^0(g, A_l)$; $N_g: l \to k$ – нормований гомоморфізм розширення l/k. У [4] показано, що невиродженість добутку /3/ для простого циклічного розширення степеня q можна довести так.

Нехай $\varphi(x, y)$ – функція з поля функцій на кривій A з дивізором $f(\sigma) + \sigma f(\sigma) + \ldots + \sigma^{q-1} f(\sigma) - q\infty$ і a_k, $u \in A_k$ не належать множині нулів і полюсів функції $\varphi(x,y)$. Добуток, за Тейтом – Шафаревичем, класів з представниками $f(\sigma)$ і a_k відмінний від нуля тоді і тільки тоді, коли /"+" – додавання точок на A /

$$\frac{\varphi(a_k+u)}{\varphi(u)} \notin N_g \ell^*.$$

Використовуючи обчислення, наведені в [4], легко побачити, що функція $\varphi(x,y)$ на кривій A з дивізором

$$a_\ell + \sigma a_\ell + \ldots + \sigma^{q-1} a_\ell - q\infty$$

має з точністю до множника-константи вигляд $P(x) + yQ(x)$, де $P(X), Q(X) \in k[X]$; $\deg Q(X) = \frac{q-3}{2}$; $\deg P(X) \le \frac{q-1}{2}$, причому на кривій A справджується рівність

$$(P+yQ)(-P+(y+a_1x+a_3)Q) = \prod_{i=0}^{q-1}(x-\sigma^i \text{абсц.}\, a_\ell).$$

Якщо $q = 2$, то $\varphi(x,y) = x -$ абсц. a_ℓ.

Конкретність інформації про коефіцієнти многочленів $P(X)$ і $Q(X)$ залежить від a_ℓ.

Доведення теореми розбивається на кілька кроків, в яких послідовно розглядаються криві типів (a) і (b) та можливі типи розширень.

<u>1-й крок</u>. A – крива типу (a); k – локальне або псевдолокальне поле і ℓ/k – нерозгалужене розширення.

У цьому випадку, як показано в [8] /лема 1 у [8]/, $H^1(g, A_\ell) = H^0(g, A_\ell) = 0$ і тому добуток /3/ невироджений зліва.

<u>2-й крок</u>. A – крива типу (a); k – загальне локальне поле і ℓ/k – слабо розгалужене розширення.

У цьому випадку невиродженість добутку /3/ випливає, як і у випадку $char\, \varkappa > 3$, з невиродженості добутку Вейля на точках скінченного порядку кривої A /лема 2 у [8]/.

<u>3-й крок</u>. A – крива типу (a) з ненульовим інваріантом Хассе і ℓ/k – дико розгалужене розширення локального або псевдолокального поля k.

У [4] /див. доведення леми 6 у [4]/ показано, що досить довести невиродженість зліва добутку Тейта - Шафаревича для одного із скінченних нерозгалужених розширень $\tilde{k}$ поля k як основного. У випадку локального поля k візьмемо як $\tilde{k}$ поле $\tilde{k}$, поле лишків $\tilde{\varkappa}$ якого задовольняє такі умови [4]:

кількість елементів поля $\tilde{\varkappa}$ не менша від 4;

для кількості $[A'_{\tilde{\varkappa}}:1]$ точок редукції A' кривої A у полі $\tilde{\varkappa}$ виконується нерівність $[A'_{\tilde{\varkappa}}:1] > [\tilde{\varkappa}:1]+1$, де $[\tilde{\varkappa}:1]$ - кількість елементів поля $\tilde{\varkappa}$ /розглядається випадок локального поля k/.

Нехай A - наша крива типу (a); $\bar{a}_1 \neq 0$, оскільки інваріант Хассе кривої A не дорівнює нулю, $g = Gal(\ell/k) = \{1, \sigma\}$, m - номер останньої нетривіальної групи галуження розширення ℓ/k; T_ℓ - підгрупа дробових точок в A_ℓ і $T_\ell \supset T_\ell^2 \supset T_\ell^3 \supset \ldots$ - фільтрація Лютц у T_ℓ. Якщо $H^1(g, T_\ell) \neq 0$, то представники нетривіальних класів $H^{-1}(g, T_\ell)$ визначають ненульові елементи у факторі T_ℓ^m / T_ℓ^{m+1} [5]. Нехай $f(\sigma) = \gamma$ - представник нетривіального класу $H^1(g, A_\ell)$, $\gamma = (T^{-2} - a_1 T^{-1} + \ldots, -T^{-3} + a_1 T^{-2} + \ldots)$/три крапки тут і далі означають члени вищих порядків/. Функція $\varphi(x, y)$ на A з дивізором $\gamma + \sigma\gamma - 2\infty$ має вигляд $\varphi(x, y) = x$ - абсц. γ. Покажемо, що добуток класу коциклу $f(\sigma)$ з класом дробової точки дорівнює нулю. Справді, якщо $(\xi, \eta) \in A_k \setminus T_k$, то /тут $NT = N_g T$/

$$(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta) = (\xi, \eta) + (t^{-2} - a_1 t^{-1} + \ldots, -t^{-3} + a_1 t^{-2} + \ldots) =$$
$$= (\xi + (a_1 \xi + a_3) t + \ldots \ , \ \text{ордината});$$

$$\frac{\varphi(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)}{\varphi(\xi, \eta)} = 1 + (a_1 \xi + a_3) t N(T) \in N_g \ell^*.$$

Тому розглянемо добуток класу $f(\sigma)$ з класом цілої точки (ξ, η). Нехай (ρ, δ) - ще одна ціла точка. Тоді

$$\frac{\varphi((\xi, \eta) \dot{-} (\rho, \delta) \dot{+} (\rho, \delta))}{\varphi(\rho, \delta)} = 1 + (\rho - \xi) N(T) + \ldots$$

/"$\dot{+}$" - додавання, а "$\dot{-}$" - віднімання на A/.

З іншого боку, $N(1+dT)=1+dTrT+d^2N(T))(mod\,\pi^{m+1})$, $(d\in U_k)$, $TrT+a_1N(T)\equiv 0(mod\,\pi^{m+1})$ і тому

$$N(1+dT)=1+(d^2-c_1d)N(T)+\dots$$

Отже, для невиродженості зліва добутку Тейта - Шафаревича повинна існувати точка $(\xi,\eta)\in A_k\setminus T_k$ така, що для всіх $\bar{d}\in\varkappa$

$$\bar{\rho}-\bar{\xi}\neq\bar{d}^2-\bar{a}_1\bar{d}. \qquad /4/$$

Така точка (ξ,η) існує, оскільки якщо $[\tilde{\varkappa}:1]=2^{\tau}$, то кількість скінченних точок у $A'_{\tilde{\varkappa}}$ більша від 2^{τ} за вибором $\tilde{\varkappa}$, тому кількість різних значень $\bar{\rho}-\bar{\xi}$ більша від $2^{\tau-I}$, а $\bar{d}^2-\bar{a}_1\bar{d}$ набуває не більше ніж $2^{\tau-I}$ різних значень [7]. Тому добуток Тейта - Шафаревича невироджений зліва у даному разі для еліптичних кривих над локальним полем, а його невиродженість у випадку псевдолокального поля k випливає з того, що її можна сформулювати, як це видно з /4/, на мові першого порядку, і тому за результатами роботи [6] властивість /4/ справджена також для псевдоскінченних полів.

$H^1(g,A_\ell)$ може також містити класи з представниками $f(\sigma)=a_\ell\in A_\ell\setminus T_\ell$. Покажемо, що в цьому разі існує точка $a_k\in T_k$ з $V_k(t)=m$ /де t - параметр a_k/ така, що добуток класів з представниками a_ℓ і a_k не дорівнює нулю. Виберемо для цього точку $(\xi,\eta)\in A_k\setminus T_k$ так, щоб $\bar{\xi}\neq$ абсц. $\bar{a}_\ell$ і $\bar{\xi}$ не задовольняв рівняння $\bar{a}_1\bar{\xi}+\bar{a}_3=0$. Нехай $(\xi+\Delta\xi,\eta+\Delta\eta)$ означає $a_k\dotplus(\xi,\eta)$.

Тоді

$$\frac{\xi+\Delta\xi-абсц.\,a_\ell}{\xi-абсц.\,a_\ell}=1+(\xi-абсц.\,a_\ell)^{-1}(a_1\xi+a_3)t\in Ng\,\ell^*$$

для придатного значення t.

<u>4-й крок</u>. A - крива типу (a) з інваріантом Хассе редукції нуль; k - загальне локальне поле і ℓ/k - дико розгалужене розширення степеня 2.

Оскільки інваріант Хассе редукції кривої A дорівнює нулю, то $\bar{a}_1=0$, і, якщо Δ - дискримінант кривої A, то легко побачити, що $\Delta=\bar{a}_3^6\neq 0$, отже, $\bar{a}_3\neq 0$.

Друга ітерація формальної групи, відповідної кривій, має вигляд $2(t+\ldots)+a_1t^2+(a_1a_2-7a_3)t^4+\ldots$

Враховуючи, що $a_3\not\equiv 0 (mod\,\pi)$, маємо: нетривіальні класи групи $H^{-1}(g, T_\ell)$ визначають нетривіальні елементи у факторах T_ℓ^n/T_ℓ^{n+1}, де $n<m$ [5]. Якщо $f(\sigma)=\gamma_\ell$ – представник нетривіального класу групи $H^1(g, T_\ell)$, то добуток за Тейтом – Шафаревичем цього класу і класу точки $\gamma_K\in T_K$, відповідного значенню t параметра з $v_K(t)=m-n$ є класом групи $H^0(g, \ell^*)$ з представником

$$\frac{\xi+\Delta\xi-N(T)^{-1}+\ldots}{\xi-N(T)^{-1}+\ldots}=\frac{1-N(T)(\xi+\Delta\xi)+\ldots}{1-\xi N(T)+\ldots}=1+a_3\xi t N(T)+\ldots,$$

що не лежить у $Ng\,U_\ell$ для придатного значення t.

Тепер переходимо до кривих типу (b) за Нероном. Далі A_ℓ^0 означає підгрупу точок групи A_ℓ, що редукуються в неособливі, $\pi_0(A_\ell)=A_\ell/A_\ell^0$.

<u>5-й крок</u>. A – крива типу (b_n); A має мультиплікативну редукцію; ℓ/k – нерозгалужене розширення загального локального поля k, $[\ell:k]=q$.

У роботі [4] показано, що в цьому разі $H^i(g, A_\ell)\xrightarrow{\sim} H^i(g,\pi_0(A_\ell))\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ для всіх $i\in\mathbb{Z}$, коли q/n, і $H^i(g,A_\ell)=0$ – у противному разі.

Нехай спочатку $q>2$. Якщо q/n, то представники нетривіальних класів групи $H^1(g,A_\ell)$ мають вигляд $f(\sigma)=a_\ell=(\pi u,\pi v)$, $(u,v\in U_\ell)$. Функція $\varphi(x,y)$ на кривій A з дивізором $a_\ell+\sigma a_\ell+\ldots+\sigma^{q-1}a_\ell-q^\infty$ має вигляд $P(x)+yQ(x)$, де $P(X), Q(X)\in k[X]$, і на кривій A виконується рівність

$$(P+yQ)(-P+(y+a_1x+a_3)Q)=\prod_{i=0}^{q-1}(x-\sigma^i(\pi u)). \qquad /5/$$

Покажемо, що коефіцієнти многочленів $P(X)$ і $Q(X)$ лежать у U_k. Нехай для цього $d\in U_k$ – елемент з найменшою нормою серед тих елементів, для яких $dP(X), dQ(X)\in U_k[X]$. Тоді умова $V_k(d)>0$ приводить до суперечності. Справді, домножуючи /5/ на d^2 і переходячи до редукції, отримуємо

$$(\bar{dP})^2+(x^3+\bar{a}_2 x)(\bar{dQ})^2+a_1 x(\bar{dP})(\bar{dQ})=0. \qquad /6/$$

Нехай $k=\deg \bar{dP}$; $\ell=\deg \bar{dQ}$. З /6/ випливає, що коли два з трьох невід'ємних цілих чисел $2k$, $2\ell+3$, $k+\ell+1$ дорівнюють одне одному, то третє з них строго більше від інших. Тому рівність /6/ веде до суперечності і, отже, $P(X), Q(X)\in \mathcal{O}_K[X]$.

Виберемо точку $a_K=(\pi\xi, \pi\eta)\in A_K$ так, щоб $\sigma^i(\pi u)\not\equiv \pi\xi \pmod{\pi^2}$. Такий вибір точки a_K можливий тому, що $\sigma^i(\pi) \bmod \pi$ набуває не більше одного значення з поля $\mathfrak{a}$ і для кожного $\bar\xi\in\mathfrak{a}$ існує точка $(\pi\xi, \alpha\pi\xi+\ldots)$ /α – корінь многочлена $X^2+\bar{a}_1X+\bar{a}_2$ /, $\xi\in U_K$. Існування точки $(\pi\xi,\alpha\pi\xi+\ldots)$ випливає за методом Ньютона:

$$\alpha^2\pi^2\xi^2+a_1\alpha\pi^2\xi^2+a_3\alpha\pi\xi=\pi^3\xi^3+a_2\pi^2\xi^2+a_4\pi\xi+a_6\equiv 0 \pmod{\pi^3}$$

і $a_1\alpha\pi\xi\equiv 0 \pmod{\pi}\not\equiv 0\pmod{\pi^2}$.

Добуток за Тейтом – Шафаревичем класу групи $H^1(g, A_\ell)$ з представником-коциклом $f(\sigma)=a_\ell$ і класу групи $H^0(g, A_\ell)$, представником якого є різниця $a_K \dot{-} \gamma_K$, де $\gamma_K=(\pi^{-2}-a_1\pi^{-1}+\ldots-\pi^{-3}+\ldots)$, не дорівнює нулю. Справді, $V_K(\varphi(a_K)\varphi(\gamma_K)^{-1})$ не ділиться на q тому, що $V_K(\varphi(\gamma_K))=-q$, а $0<V_K(\varphi(a_K))<q$, що видно з /5/.

Якщо $q=2$ і $H^i(g,A_\ell)\xrightarrow{\sim} H^i(g,\pi_0(A_\ell))\xrightarrow{\sim}$ $\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $f(\sigma)=(\pi u,\pi v)=a_\ell$ – представник нетривіального класу групи $H^1(g, A_\ell)$; $a_k=(\pi\xi,\pi\alpha\xi+\ldots)$ – представник нетривіального класу групи $H^0(g,A_\ell)$, то добуток класів з представниками a_ℓ і $a_k\dot{-}\gamma_k$ не дорівнює нулю, оскільки $\pi u-\pi\xi$ не ділиться на π^2, отже, не є нормою /тут $n>2$/. Якщо $n=2$, то обчислення виконують аналогічно наведеному в кінці 8-го кроку.

<u>6-й крок</u>. A – крива типу (B_n) з мультиплікативною редукцією і ℓ/k – слабо розгалужене розширення загального локального поля k степеня q.

2 – 207

У роботі [4] показано, що в цьому разі всі групи $H^i(\mathcal{G}, A_\ell)$ $(i \in \mathbb{Z})$ тривіальні або ізоморфні $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Якщо $H^i(\mathcal{G}, A_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, то $H^1(\mathcal{G}, A_\ell) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{G}, \pi_0(A_\ell)$; $H^0(\mathcal{G}, A_\ell) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{G}, A_\ell')$.

Нехай $f(\sigma) = a_\ell$ - представник деякого нетривіального класу групи $H^1(\mathcal{G}, A_\ell)$. Функція $\varphi(x, y)$ на кривій A з дивізором $a_\ell + \sigma a_\ell + \ldots + \sigma^{q-1} a_\ell - q\infty$ має з точністю до множника-константи вигляд $P(x) + yQ(x)$; $P(X), Q(X) \in \mathcal{O}_k[X]$, $\deg P \leq \frac{q-1}{2}$, $\deg Q = \frac{q-3}{2}$; старшим коефіцієнтом многочлена $Q(X)$ є 1_k і на кривій A справджується рівність

$$(P + yQ)(-P + (y + a_1 x + a_3)Q) = \prod_{i=0}^{q-1} (x - \text{абсц.}\, \sigma^i(a_\ell)).$$

Функція $\varphi(x, y)$ визначає функцію $\bar{P} + y\bar{Q}$ на редукції A' кривої A. Єдиним нулем функції $\bar{P} + y\bar{Q}$ є особлива точка кривої A'. Параметризуємо криву A' так: $x = \bar{z}^2 - \bar{a}_1 \bar{z}$; $y = (\bar{z}^2 - a_1 \bar{z})(\bar{z} + \alpha)$, де α - корінь многочлена $X^2 + \bar{a}_1 X + \bar{a}_2$. Можна вважати, що поле $\varkappa$ містить елемент з $(\varkappa^*)^q$, який не дорівнює $1_\varkappa$ /в іншому випадку як $\varkappa$ можна взяти деяке скінченне розширення поля $\varkappa$, для якого ця умова виконується/. Нехай $\bar{z} \in \varkappa^*$, $z(\bar{z} - \bar{a}_1)^{-1} \notin \varkappa^{*q}$. Тоді

$$\frac{(\bar{P} + y\bar{Q})(\bar{z})}{(\bar{P} + y\bar{Q})(\bar{z} - \bar{a}_1)} = \frac{\bar{z}^r (\bar{z} - \bar{a}_1)^{q-r}}{(\bar{z} - \bar{a}_1)^r \bar{z}^{q-r}} = \bar{z}^{2r-q} (\bar{z} - \bar{a}_1)^{q-2r} =$$

$$= \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{a}_1}\right)^{2r-q} = \left(\frac{\bar{z} - \bar{a}_1}{\bar{z}}\right)^q \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z} - a_1}\right)^{2r} \notin \varkappa^{*q},$$

оскільки $0 < r < q$ і $q > r$.

<u>7-й крок</u>. A - крива типу $(\mathcal{B}_n)$ з мультиплікативною редукцією і ℓ/k - дико розгалужене розширення степеня 2 загального локального поля k.

Використовуючи обчислення, наведені в [4], зазначимо, що або всі групи $H^i(\mathcal{G}, A_\ell)$ $(i \in \mathbb{Z})$ тривіальні, або маємо ізоморфізми

$$H^{-1}(\mathcal{G}, A_\ell) \simeq H^{-1}(\mathcal{G}, \pi_0(A_\ell)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ H^0(\mathcal{G}, A_\ell) \simeq H^0(\mathcal{G}, A^0_\ell) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

У нетривіальному випадку нехай $f(\sigma) = (\pi u, \pi v)$ – представник нетривіального класу групи $H^1(\mathcal{G}, A_\ell)$; $\varphi(x,y) = x - \pi u$ – функція на кривій A з дивізором $f(\sigma) + \sigma f(\sigma) - 2\infty$; $\gamma_k \in \Gamma_k$; $V_k(t) = m$, де m – номер останньої нетривіальної групи розгалуженого розширення ℓ/k; t – параметр γ_k; $(\xi, \eta) \in A_k \setminus \Gamma_k$;

$$\frac{\varphi((\xi,\eta) \dotplus \gamma_k)}{\varphi(\xi,\eta)} = \frac{\xi + \Delta\xi - \pi u}{\xi - \pi u} = 1 + (\xi - \pi u)^{-1} a_1 t \notin N_{\mathcal{G}} \ell^*$$

для придатного t /останнє означає, що добуток класів $f(\sigma)$ і γ_k не дорівнює нулю/.

<u>8-й крок</u>. A – крива типу (δ_n), що не є кривою з мультиплікативною редукцією; k – загальне локальне поле.

Крива A має своїм рівнянням рівняння /I/, коефіцієнти якого задовольняють умови /2/ і корені многочлена $X^2 + \bar{a}_1 X + \bar{a}_2$ не лежать у полі лишків $\varkappa$.

Добуток Тейта – Шафаревича невироджений зліва для кривої A над полем $\ell = k(\alpha)$, де α – корінь многочлена $X^2 + a_1 X + a_2$. Це випливає з попередніх кроків. Тому, використовуючи діаграму (τ_2) [4], досить показати невиродженість добутку

$$H^1(\mathcal{G}, A_\ell) \times H^0(\mathcal{G}, A_\ell) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Розглянемо для цього точну послідовність $\mathcal{G}$-модулів

$$0 \to A^0_\ell/\Gamma_\ell \to A_\ell/\Gamma_\ell \to \pi_0(A_\ell) \to 0.$$

За допомогою параметризації $t = (y - \alpha_1 x)(y - \alpha_2 x)^{-1}$, де α_1, α_2 – корені многочлена $X^2 + \bar{a}_1 X + \bar{a}_2$, дістаємо ізоморфізм групи A^0_ℓ/Γ_ℓ і мультиплікативної групи λ^* поля лишків поля ℓ з наведеною цим ізоморфізмом дією $\sigma \in \mathcal{G}$ на елементи з λ^*:

2*

$\sigma_{\text{нав}}(\alpha) = (\sigma\alpha)^{-1}$ для $\alpha \in \lambda^{*}$. Отже, $H^{i}(\mathfrak{g}, A_{\ell}^{0}/T_{\ell}) = 0$ і $H^{i}(\mathfrak{g}, A_{\ell}) \simeq H^{i}(\mathfrak{g}, \pi_{0}(A_{\ell}))$.

Відомо, що $\pi_{0}(A_{\ell}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ і класи групи $\pi_{0}(A_{\ell})$ мають своїми представниками $(u, v) = (\pi^{-r}z, \alpha\pi^{-r}z + \ldots)$; $1 \le r < \frac{n}{2}$; α - корінь многочлена $X^{2} + a_{1}X + a_{2}$, $z \in U_{\ell}$ і якщо n парне, то також клас з представником $(\pi^{\frac{n}{2}}a, \pi^{\frac{n}{2}}b)$, $a, b \in \mathcal{O}_{\ell}$ і $a \in U_{\ell}$ або $b \in U_{\ell}$.

Якщо виберемо $z \in \mathcal{O}_{k}$, то $\sigma(u, v) = (\pi^{r}z, -a_{1}\pi^{r}z - \alpha\pi^{r}z(1 - a_{3} + \ldots)$. Звідси випливає, що $\sigma(u, v) = -(u, v)$ і

$$H^{1}(\mathfrak{g}, A_{\ell}) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1; \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & n = 2k. \end{cases}$$

Нехай n парне і $n > 2$. Розглянемо клас групи $H^{1}(\mathfrak{g}, A_{\ell})$, що має своїм представником коцикл $f(\sigma) = (\pi z, \alpha\pi z + \ldots)$ і точку a_{k}, $(\pi^{n/2}a, \pi^{n/2}b)$ - представник класу групи $H^{0}(\mathfrak{g}, A_{\ell})$.

Нехай $x - \pi z$ - функція на A з дивізором $f(\sigma) + \sigma f(\sigma) - 2\infty$; $\gamma_{k} = (\pi^{-2}a_{1}\pi^{-1}a_{2} - a_{3}\pi + \ldots, -\pi^{-3} + a_{1}\pi^{-2} + \ldots)$. Тоді

$$\frac{\varphi(a_{k} \dot{+} \gamma_{k})}{\varphi(\gamma_{k})} = \frac{\pi(-z + a\pi^{n/2-1} + \ldots)}{\pi^{-2}(1 - a_{1}\pi + \ldots)} = \frac{\pi^{3}(-z + \ldots)}{1 - a_{1}\pi + \ldots} \notin N_{\mathfrak{g}}\ell^{*}$$

і тому добуток класів $f(\sigma)$ і a_{k} нетривіальний.

Якщо $n = 2$, то $f(\sigma) = (-a_{3}a_{1}^{-1}, \pi v)$ і $a_{k} = (-a_{3}a_{1}^{-1}, \pi v)$; $\varphi(x, y)$ - функція з дивізором $f(\sigma) + \sigma f(\sigma) - 2\infty$, $(\xi, \eta) \in A_{k}^{0} \setminus T_{k}$;

$$\frac{\varphi(a_{k} \dot{+} (\xi, \eta))}{\varphi(\xi, \eta)} = a_{1}\xi^{-2}\pi v + \ldots$$

не ділиться на π^{2}, отже, добуток Тейта - Шафаревича невироджений і в цьому разі.

Список літератури

1. Tate J. WC-group over p-adic fields // Sem. Bourbaki, 1956, 156.

2. Шафаревич И.Р. Группа главных однородных алгебраических многообразий // ДАН СССР, 1959. - 124. - № 1. - С. 42-43.

3. *Neron A. Modeles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globoux // Publ. Math. IHES, 1964. – № 21.*

4. Введенский О.Н. О локальных "полях классов" эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер.математ., 1973. – 37. – С. 20–88.

5. Введенский О.Н. Двойственность в эллиптических кривых над локальным полем // Изв. АН СССР. Сер.математ. Ч. I. – 1964. – 28. – С. 1091–1112; Ч. 2. – 1966. – 30. – С. 891–922.

6. *Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann Math., 1968. – 88. – № 2. – p. 239–271.*

7. *Serre J.-P. Corps locaux. – Paris, Hermann, 1962.*

8. Андрийчук В.И. Об эллиптических кривых над псевдолокальными полями / Мат.сб., 1979. – 110 /152/. – № 1 /9/. – С. 88–101.

УДК 517947

Л.С.Баб'як, О.Л.Горбачук

ПРЯМА І ОБЕРНЕНА АСИМПТОТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглядається диференціальне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \quad 0 \le t < \infty,$$

де A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0; a_i – елементи з банахового простору $\mathcal{B}$.

Встановлюється, що за деяких умов на коефіцієнти a_k довільний розв'язок даного рівняння

$$y(t) = u(t) + \sum_{k=0}^{n} b_k t^k,$$

де $u(t)$ – розв'язок однорідного рівняння з умовою $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t u(\xi) d\xi = 0$ /Чезаровська межа/.

Так само розв'язується обернена асимптотична задача: знайти розв'язок $y(t)$ і многочлен $P(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ /коефіцієнти невідомі/,