3. *Neron A. Modeles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux // Publ. Math. IHES, 1964. - № 21.*

4. Введенский О.Н. О локальных "полях классов" эллиптических кривых // Изв. АН СССР. Сер.математ., 1973. - 37. - С. 20-88.

5. Введенский О.Н. Двойственность в эллиптических кривых над локальным полем // Изв. АН СССР. Сер.математ. Ч. I. - 1964. - 28. - С. 1091-1112; Ч. 2. - 1966. - 30. - С. 891-922.

6. *Ax J. The elementary theory of finite fields // Ann Math., 1968. - 88. - № 2. - p. 239-271.*

7. *Serre J.-P. Corps locaux. - Paris, Hermann, 1962.*

8. Андрийчук В.И. Об эллиптических кривых над псевдолокальными полями / Мат.сб., 1979. - 110 /152/. - № 1 /9/. - С. 88-101.

УДК 517947

Л.С.Баб'як, О.Л.Горбачук

ПРЯМА І ОБЕРНЕНА АСИМПТОТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглядається диференціальне рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \quad 0 \le t < \infty,$$

де A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0 ; a_i – елементи з банахового простору $\mathcal{B}$.

Встановлюється, що за деяких умов на коефіцієнти a_k довільний розв'язок даного рівняння

$$y(t) = u(t) + \sum_{k=0}^{n} b_k t^k,$$

де $u(t)$ – розв'язок однорідного рівняння з умовою $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t u(\xi)d\xi = 0$ /Чезаровська межа/.

Так само розв'язується обернена асимптотична задача: знайти розв'язок $y(t)$ і многочлен $P(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ /коефіцієнти невідомі/,

$y(t)$ – розв'язок даного рівняння, який задовольняє умову $y(0)=y_0$, $y_0 \in \mathcal{D}(A)$ і $y(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k + v(t)$ /a_k задані/ і $v(t)$ – розв'язок однорідного рівняння, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t v(\xi)d\xi = 0$.

Нехай B – рефлексивний банаховий простір. Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \quad t\in[0;\infty); \qquad /1/$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t), \qquad t\in[0;\infty), \qquad /2/$$

де A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0 /див. [1, с. 50]/; a_k – елементи банахового простору B.

Відомо, що коли A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0, то банаховий простір розкладається на пряму суму замикання образу і ядра оператора A, тобто $B=\overline{R(A)} \dotplus \ker A$ /див. [2, теорема 18, 6.2]/.

Проектор на $\ker A$ позначимо P. Нагадаємо, що межа функції, за Чезаро,

$$(C-1)\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t y(\xi)d\xi .$$

<u>Теорема 1</u>. Довільний розв'язок рівняння /1/ подається у вигляді

$$y(t) = u(t) + \sum_{k=0}^{n} b_k t^k ,$$

де $u(t)$ – розв'язок рівняння /2/; $(C-1)\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, тоді і тільки тоді, коли $a_n \in R(A)$, $a_{n-1},\dots,a_0 \in R(A)+\ker A$, причому многочлен $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ визначається однозначно.

<u>Доведення</u>. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді многочлена $P(t)=\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$. Дістаємо зв'язок коефіцієнтів відомих a_k і шуканих b_k:

$$A b_n = -a_n;$$
$$A b_{n-1} = n b_n - a_{n-1};$$
$$A b_{n-2} = (n-1) b_{n-1} - a_{n-2};$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$A b_1 = 2 b_2 - a_1;$$
$$A b_0 = b_1 - a_0.$$

Вираз $k b_k - a_{k-1}$, $k = n, n-1, \ldots, 1$ має лежати в $R(A)$. Якщо $a_{k-1} = z_{k-1} + f_{k-1}$, де $z_{k-1} \in R(A)$; $f_{k-1} \in Ker A$, то $b_k = z_k + \frac{1}{k} f_{k-1}$, де $z_k \in R(A)$; $A z_k = b_k$.

З цих формул випливає, що $a_n \in R(A)$ і $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in R(A) + Ker(A)$, $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1$ визначаються однозначно. Єдиність коефіцієнтів $b_1, b_2, \ldots, b_n$ випливає також з того, що многочлен, який не дорівнює константі, не може бути розв'язком однорідного рівняння /2/.

Щоб $(C-1) \lim_{t \to \infty} u(t) = 0$, потрібно, щоб $u(0) \in R(A)$ /див. [3, с. 1263, теорема]/. Коефіцієнт b_0 вибирається так, що $P(b_0 - y(0)) = 0$, де P – проектор на $Ker A$.

З теореми безпосередньо випливає наслідок.

<u>Наслідок</u>. Якщо область значень оператора A замкнена, тобто $R(A) = \overline{R(A)}$, то за умов теореми I довільний розв'язок $y(t)$ рівняння /I/ подається у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k + u(t),$$

де $(C-1) \lim_{t \to \infty} u(t) = 0$, тоді і тільки тоді, коли $b_n \in R(A)$.

Тепер поставимо обернену асимптотичну задачу: знайти $y(t)$ і многочлен $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ /коефіцієнти невідомі/, де $y(t)$ – розв'язок рівняння /I/, який задовольняє умову $y(0) = y_0$, $y_0 \in D(A)$ і $y(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k + v(t)$ /де b_k задані/ і $v(t)$ – розв'язок рівняння /2/, для якого $(C-1) \lim_{t \to \infty} v(t) = 0$.

Теорема 2. Многочлен $P(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ визначається однозначно і розв'язок $y(t)=\sum_{k=0}^{n} b_k t^k + v(t)$ /b_k задані/;

$(C-1)\lim_{t\to\infty} v(t)=0$, існує тоді і тільки тоді, коли $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 \in \mathcal{D}(A)$ і $P(b_0-y_0)=0$.

Доведення. Підставляючи відомий многочлен $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ у рівняння /I/, знаходимо a_k з рівностей

$$a_n = -Ab_n;$$
$$a_{n-1} = nb_n - Ab_{n-1};$$
$$- - - - - - - - -$$
$$a_1 = 2b_1 - Ab_1;$$
$$a_0 = b_1 - Ab_0.$$

Звідси випливає, що $b_n, \dots, b_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Щоб $(C-1)\lim_{t\to\infty} v(t)=0$, потрібно, щоб $P(y_0-b_0)=0$ /див. [3, с. 1263]/, припускаючи в теоремі $\rho=0$.

Список літератури

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр.лит., 1962. – 830 с.
3. Горбачук О.Л. Розв'язок деякої оберненої задачі для еволюційного рівняння у банаховому просторі // Укр.математ.журн., 1990. – Т. 42. – № 9. – С. 1262-1265.

УДК

Б.М.Бокало

ПРО КАРДИНАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ ТОПОЛОГІЧНИХ ІНВЕРСНИХ ПІВГРУП

§ 1. Термінологія і позначення

Нехай S – інверсна півгрупа. Позначимо E множину ідемпотентів /в'язку/ півгрупи S.

Далі важливу роль відіграватиме відношення природного порядку на множині E, яке визначається умовою $e\le f$ тоді і тільки тоді,