Теорема 2. Многочлен $P(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ визначається однозначно і розв'язок $y(t)=\sum_{k=0}^{n} b_k t^k + V(t)$ /b_k задані/;
$(C-1)\lim_{t\to\infty} V(t)=0$, існує тоді і тільки тоді, коли $b_n, b_{n-1}, \ldots$
$\ldots, b_0 \in \mathcal{D}(A)$ і $P(b_0-y_0)=0$.

Доведення. Підставляючи відомий многочлен $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ у рівняння /I/, знаходимо a_k з рівностей

$$a_n=-Ab_n;$$
$$a_{n-1}=nb_n-Ab_{n-1};$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$a_1=2b_1-Ab_1;$$
$$a_0=b_1-Ab_0.$$

Звідси випливає, що $b_n,\ldots, b_0\in\mathcal{D}(A)$.

Щоб $(C-1)\lim_{t\to\infty} V(t)=0$, потрібно, щоб $P(y_0-b_0)=0$ /див. [3, с. 1263]/, припускаючи в теоремі $\rho=0$.

Список літератури

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр.лит., 1962. – 830 с.

3. Горбачук О.Л. Розв'язок деякої оберненої задачі для еволюційного рівняння у банаховому просторі // Укр.математ.журн., 1990. – Т. 42. – № 9. – С. 1262-1265.

УДК

Б.М.Бокало

ПРО КАРДИНАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ ТОПОЛОГІЧНИХ ІНВЕРСНИХ ПІВГРУП

§ 1. Термінологія і позначення

Нехай S – інверсна півгрупа. Позначимо E множину ідемпотентів /в'язку/ півгрупи S.

Далі важливу роль відіграватиме відношення природного порядку на множині E, яке визначається умовою $e\le f$ тоді і тільки тоді, коли $ef = fe = e$. Відомо, що комутативна в'язка є нижньою півструктурою /далі просто півструктурою/ відносно природного порядку на E. Центр півгрупи S позначимо $Cent\ (S)$. Відомо, що коли $E \subset Cent\ (S)$, то $xx^{-1} = x^{-1}x$ для всіх $x \in S$ /тут єдиний інверсний елемент до елемента x позначається x^{-1}/. Якщо $E \subset Cent\ (S)$, то π позначимо відображення /далі називатимемо проекцією/ $\pi : S \longrightarrow E$, яке визначається так: $\pi(x) = xx^{-1} = x^{-1}x$.

Інверсна півгрупа S називається топологічною інверсною півгрупою, якщо на S існує топологія, відносно якої операції множення і взяття інверсного неперервні.

Використовуватимемо такі кардинальні інваріанти простору X з топологією $\mathcal{T}$: потужність $|X|$; вага $w(X) = min\{|\mathcal{B}|: \mathcal{B}$ -база $X\}$; шільність $d(X) = min\{|Y|: Y \subset X,\ \bar{Y} = X\}$; число Сусліна $c(X) = sup\{|\gamma|: \gamma \subset \mathcal{T},\ \gamma$ - диз'юнктна$\}$; число Ліндельофа $\ell(X) = min\ \{\tau$: якщо $\gamma \subset \mathcal{T}$ і $\cup\gamma = X$, то існує $\gamma' \subset \gamma$, для якого $|\gamma'| \leq \tau$ і $\cup\gamma' = X\}$, характер простору X у точці x є кардинал $\chi(x,X) = \lambda_0^s\ min\{|\mathcal{B}_x|: \mathcal{B}_x$ -база X у точці $x\}$; характер простору $\chi\ (X)$ є $\chi(X) = sup\{\chi\ (x,X): x \in X\}$; псевдохарактер простору X у точці x є кардинал $\psi(x,X) = \lambda_0\ min\{|\gamma|: \gamma \subset \mathcal{T},\ \cap\gamma = \{x\}\}$; псевдохарактер простору X є кардинал $\psi(X) = sup\{\psi(x,X): x \in X\}$; тіснота простору X у точці x є кардинал $t(x,X) = min\{\tau$: якщо $A \subset X$, $x \in \bar{A}$, то існує $B \subset A$, для якого $x \in \bar{B}$ і $|B| \leq \tau\}$ і тіснота простору X є кардинал $t(X) = sup\{t(x,X): x \in X\}$.

Кардинал τ називається калібром простору X, якщо кожна сім'я γ потужності τ непорожніх відкритих множин у X містить підсім'ю γ' таку, що $|\gamma'| = \tau$ і $\cap\gamma' \neq \phi$.

Кардинал $min\ \{\tau : \tau^+$-калібр $X\}$ називається числом Шаніна простору X і позначається $sh\ (X)$. Завжди $c(X) \leq sh\ (X) \leq d\ (X)$.

Решта позначень такі самі, як і в [I; 2; 5].

3 - 207

§ 2. Постановка задачі

Відомо /див. [5]/, що за деяких обмежень на інверсну півгрупу S /зокрема, якщо $E \subset Cent(S)$/ S розкладається на півструктуру E груп H_e, тобто $S = \bigcup\{H_e : e \in E\}$, де $H_e = \pi^{-1}(e)$. Причому якщо S є топологічною інверсною півгрупою, то E є топологічною півструктурою і всі групи H_e топологічні.

Таке розкладання підгрупи S дає змогу підійти до вивчення топологічних властивостей півгрупи через властивості більш спеціальних структур: топологічних груп H_e і півструктури E.

У загальному випадку задачу можна сформулювати так. Нехай півструктура E належить до класу $\mathcal{T}_1$ топологічних просторів, а топологічні групи H_e – класу $\mathcal{T}_2$ топологічних просторів. Описати клас $\mathcal{T}_3$ топологічних просторів, до якого належить півгрупа S.

Вважатимемо, що інверсні півгрупи гаусcдорфові і задовольняють умову $E \subset Cent(S)$.

§ 3. Кардинальні інваріанти на топологічних інверсних півгрупах

Спробуємо з'ясувати, для яких кардинальних інваріантів $\mathcal{T}$ справджується формула

$$\mathcal{T}(S) \leq \sup\left\{\mathcal{T}(E),\ \mathcal{T}(H_e) : e \in E\right\}.$$

З теореми Архангельського [I] безпосередньо випливає таке твердження.

3.I. Твердження. Якщо відображення π замкнене, то
$$t(S) \leq \sup\left\{t(E),\ t(H_e) : e \in E\right\}.$$

Приклад 3.2 показує, що в твердженні 3.I від замкненості π відмовитись не можна.

3.2. Приклад. Нехай A_τ – компактифікація однією точкою a_τ /у розумінні П.С.Александрова/ дискретного простору потужності $\tau > \aleph_0^5$. На A_τ задамо операцію $*$ так:

$$a * b = \begin{cases} a_\tau, & \text{якщо } a \neq b; \\ a, & \text{якщо } a = b. \end{cases}$$

Очевидно, A_τ є компактною інверсною півгрупою / в'язкою/. Нехай $\mathbb{Z}_2 = \{ \bar{0}, \bar{1} \}$ – двоелементна абельова група. Покладемо $S = (A_\tau \times \mathbb{Z}_2) \setminus \{ (a_\tau, \bar{1}) \}$, операцію на S задамо так:

$$(a, \bar{i})(b, \bar{j}) = \begin{cases} (a_\tau, \bar{0}), & \text{якщо } a \neq b \text{ або } a = b = a_\tau; \\ (a, \bar{i} + \bar{j}), & \text{якщо } a = b \neq a_\tau. \end{cases}$$

Усі точки множини S, крім $(a_\tau, \bar{0})$, вважатимемо відкритими, а базою околів у точці $(a_\tau, \bar{0})$ є сім'я множин U, для яких $U \setminus (A_\tau \times \{\bar{1}\})$ злічення, а $U \setminus (A_\tau \{\bar{0}\})$ скінченна.

Легко перевірити, що S – топологічна інверсна півгрупа, для якої $t(S) > \sup\{t(E), t(H_e) : e \in E\}$.

3.3. Твердження. Якщо S – топологічна інверсна півгрупа, то $\psi(S) \leq \sup\{\psi(E), \psi(H_e) : e \in E\}$.

<u>Доведення.</u> Нехай s – довільний елемент із S. Тоді існує таке $e_s \in E$, що $s \in H_{e_s}$. Нехай γ – сім'я відкритих множин у E така, що $\cap \gamma = \{e_s\}$ і $|\gamma| \leq \psi(E)$, а γ' – сім'я відкритих у S множин така, що $\cap \gamma' \cap H_{e_s} = s$ і $|\gamma'| \leq \psi(H_{e_s})$.

Тоді $s = \cap\{\pi^{-1}(U) : U \in \gamma\} \cap (\cap \gamma')$.

3.4. Наслідок. Якщо S – компактна інверсна півгрупа з лінійно впорядкованою в'язкою, то $\chi(S) = \psi(S) = t(S)$.

Доведення цього наслідку випливає з тверджень 3.I і 3.3, а також з відомих фактів про те, що тіснота компактної групи збігається з характером, та аналогічного факту, справджуваного для лінійно впорядкованих просторів. Нагадаємо лему з [4].

3.5. Лема. Нехай E – в'язка півгрупи S. Тоді для довільного $e \in E$ множини $\{k \in E : k \leq e\}$ і $\{k \in E : k \geq e\}$ завжди замкнені в S.

Із цієї леми безпосередньо випливає, що коли півструктура E лінійно впорядкована природним порядком і компактна, то топологія на E збігається з топологією, породженою лінійним порядком.

Приклад 3.6 показує, що існує несепарабельна компактна півгрупа S, в якої множина ідемпотентів E - спадково сепарабельний лінійно впорядкований компакт, а кожна H_e скінченна.

3.6. Приклад. Нехай $X = \{(t,0): 0 < t \le 1\} \cup \cup \{t,1): 0 \le t < 1\}$. На X вводиться такий лінійний порядок: $(t,i) < (t',i')$, якщо $t < t'$; $t = t'$; $i = 0$; $i' = 1$ /простір X з топологією, породженою лінійним порядком $<$, є компактом, який називається "дві стрілки" П.С.Александрова [3]/.

Покладемо $X = X \times \mathbb{Z}_2$, де $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ - адитивна двоелементна група. На $\tilde{X}$ уведемо операцію півпрямого добутку, тобто $(a,\bar{i})(b,\bar{j}) = (min(a,b), \bar{i}+\bar{j})$. Базу топології утворюють одноточкові множини $(x, \bar{1}) \in X \times \{\bar{1}\}$ і множини вигляду $(U \times \{\bar{0}\}) \cup \cup ((U \times \{\bar{1}\}) \setminus A)$, де U відкрита в X, а A - скінченна підмножина $U \times \{\bar{1}\}$. Покладемо $S = \tilde{X} \setminus \{((t,0), \bar{1}) : t \in (0,1]\}$. Легко перевірити, що S - топологічна інверсна півгрупа, яка містить незліченний відкритий дискретний підпростір. Причому $E = X$, а група H_e ізоморфна $\mathbb{Z}_2$ для кожного $e \in E$. Тому $sup\{d(E), d(H_e): e \in E\} = sup\{sh(E), sh(H_e): e \in E\} = \lambda_0^S$. Але $d(S) \geq sh(S) \geq c(S) > \lambda_0^S$.

3.7. Теорема. Нехай E - локально компактна півструктура така, що для довільної відкритої підмножини U і довільного елемента $e \in U$ існує така V, що $e \in V$ і $\cup\{V^n : n \in N\} \subset U$. Тоді

$$sh(S) \le sup\{w(E), sh(H_e): e \in E\}.$$

<u>Доведення</u>. Розглянемо зліченний випадок. Нехай $sup\{w(E), sh(H_e): e \in E\} \le \lambda_0^S$ /у загальному випадку

міркування відрізняються тільки термінологією/. Припустимо, що $sh(S) > \lambda_0^s$. Тоді існує точково зліченна незліченна сім'я $\mathcal{U}$ відкритих у X множин. Зліченну базу простору E позначимо $\mathcal{B}$. Пару (V, V_0) назвемо позначеною, якщо $(V, V_0) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, $\overline{\cup\{V_0^n : n \in N\}} < V$ і $\overline{\cup\{V_0^n : n \in N\}}$ - компакт. Нехай $\mathcal{B}^*$ - сім'я всіх позначених пар. Очевидно, $|\mathcal{B}^*| \leq |\mathcal{B} \times \mathcal{B}| \leq \lambda_0^s$. Оскільки $\overline{\cup\{V_0^n : n \in N\}}$ є компактною півструктурою, то існує єдиний мінімальний елемент цієї півструктури, який позначимо $e(V, V_0)$.

Нехай $L = \{e(V, V_0) : (V, V_0) \in \mathcal{B}^*\}$. Ясно, що $|L| \leq \lambda_0^s$. Покладемо $\mathcal{U}_{(V, V_0)} = \{U \in \mathcal{U} : U \cap H_{e(V, V_0)} \neq \emptyset\}$. Покажемо, що $\mathcal{U} = \cup\{\mathcal{U}_{(V, V_0)} : (V, V_0) \in \mathcal{B}^*\}$.

Нехай $U \in \mathcal{U}$. Зафіксуємо довільне $s \in U$. Тоді $e_s = ss^{-1} \in E$. Оскільки $e_s s = s \in U$, то за неперервністю множення існує таке $V \in \mathcal{B}$, що $V \subset U$. Для V зафіксуємо таке V_0, що $e_s \in V_0$, $\overline{\cup\{V_0^n : n \in N\}}$ - компакт і $\overline{\cup\{V_0^n : n \in N\}} \subset V$. Тоді, очевидно, пара $(V, V_0) \in \mathcal{B}^*$. Оскільки $e(V, V_0) \in V$, то $e(V, V_0)s \subset U$. Але $(e(V, V_0)s) \times e(V, V_0)s)^{-1} = e(V, V_0)e_s = e(V, V_0)$. Таким чином, $e(V, V_0)s \in H_{e(V, V_0)}$. Отже, $U \cap H_{e(V, V_0)} = \emptyset$, тобто $U \in \mathcal{U}_{(V, V_0)}$. Оскільки $|\mathcal{U}| \geq \lambda_1^s$, то існує така $(V, V_0) \in \mathcal{B}^*$, що $|\mathcal{U}_{(V, V_0)}| \geq \lambda_1^s$. А це суперечить тому, що калібр групи $H_{e(V, V_0)}$ дорівнює λ_1^s.

Аналогічно можна довести таку теорему.

3.8. Теорема. Нехай E - локально компактна півструктура така, що для довільної відкритої підмножини U і довільного елемента $e \in U$ існує така V, що $e \in V$ і $\cup\{V^n : n \in N\} \subset U$. Тоді

$$c(S) \leq \sup\{w(E), c(H_e) : e \in E\}.$$

Далі використовуватимемо такі леми.

3.9. Лема. Нехай U - відкрита підмножина в півструктурі E і для деякого елемента $u^* \in U$ маємо

$$U \cap \{k \in E: k < u^*\} = \emptyset.$$

Тоді існує таке V^*, що $u^* \in V^* \subset U$ і $V^* \subset \{e \in E: e \geq u^*\}$.

Доведення. Нехай $U \cap \{k \in E: k < u\} = \emptyset$. Візьмемо таку відкриту в E множину V^*, що $u^* \in V^* V^* \subset U$, а також довільний елемент $e \in V^*$. Тоді $eu^* \in V^* V^* \subset U$ і $eu^* \leq u^*$. Але $U \cap \{k \in E: k < u^*\} = \emptyset$. Тому $eu^* = u^*$. А отже, $e \geq u^*$.

3.10. Лема. Для довільної топологічної півструктури E маємо $|\{e \in E:$ існує окіл $O(e)$ такий, що $O(e) \cap \{v \in E: v < e\} = \emptyset\}| \leq w(E)$.

Доведення. Нехай B - база E така, що $|B| \leq w(E)$. Покладемо $E' = \{e \in E:$ існує окіл $O(e)$ такий, що $O(e) \cap \{v: v < e\} = \emptyset\}$. Побудуємо відображення $\varphi: E' \to B$ так: кожному $e \in E'$ поставимо у відповідність такий окіл $\varphi(e) \in B$, що $e \in \varphi(e) \subset \{v: v \geq e\}$ /це можна зробити згідно з лемою 3.9/. Покажемо, що відображення φ ін'єктивне. Справді, нехай $e_1, e_2 \in E'$ і $e_1 \neq e_2$. Якщо $e_1 < e_2$, то $e_1 \in \varphi(e_1)$ і $e_1 \notin \varphi(e_2)$, якщо $e_2 < e_1$, то $e_2 \notin \varphi(e_1)$ і $e_2 \in \varphi(e_2)$, а якщо e_1 і e_2 непорівнянні, то $e_1 \in \varphi(e_1)$ і $e_2 \notin \varphi(e_1)$. Отже, в усіх випадках, якщо $e_1 \neq e_2$, то $\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$.

3.11. Теорема. Нехай S - топологічна інверсна півгрупа і E - множина її ідемпотентів. Нехай для довільної точки $e \in E$ і довільного її околу $U(e)$ існує такий окіл $V(e)$, для якого $Int_E\{V(e) \cap \{k: k \leq e\}\} \neq \emptyset$ або $V(e) \cap \{k: k < e\} = \emptyset$.

Тоді справджуються такі формули:

$$sh(S) \leq \sup\{w(E), sh(H_e): e \in E\}; \qquad /a/$$

$$c(S) \leq \sup\{w(E),\ c(H_e): e \in E\}. \qquad /б/$$

<u>Доведення</u>. Доведемо формулу /а/ /формула /б/ доводиться аналогічно/. Розглянемо зліченний випадок. Нехай

$$\sup\{w(E),\ sh(H_e): e \in E\} \leq \lambda_0^s$$

/у загальному випадку міркування відрізняються тільки термінологією/.

Припустимо супротивне, тобто $sh(S) > \lambda_0^s$. Нехай $\mathcal{U}$ є точково зліченна незліченна сім"я відкритих у S непорожніх множин. Покладемо $E' = \{e \in E:$ існує такий окіл $O(e)$, що $O(e) \subset \{v: v \geq e\}\}$, а зліченну всюди щільну підмножину в E позначимо E''. Нехай $\mathcal{U}_e = \{U \in \mathcal{U} : U \cap H_e \neq \emptyset\}$. Покажемо, що $\mathcal{U} = \cup\{\mathcal{U}_e : e \in E' \cup E''\}$.

Зафіксуємо довільне $U \in \mathcal{U}$ і довільний елемент $s \in U$. Нехай $e_s = s \cdot s^{-1}$. Тоді існує така відкрита в E множина V_{e_s}, що $e_s \in V_{e_s}$ і $V_{e_s} \cdot s \subset U$. Якщо $Int_E\{V_{e_s} \cap \{e \in E: e < e_s\}\} = \emptyset$, то, очевидно, $e_s \in E'$ і $U \in \mathcal{U}_{e_s}$. Тепер нехай $Int_E\{V_{e_s} \cap \{e \in E: e \leq e_s\}\} \neq \emptyset$. Тоді існує таке e^*, що $e^* \in E''$ і $e^* < e_s$. Оскільки $(e^* s)(e^* s)^{-1} = e^* e_s = e^*$ і $e^* s \in U$, то $U \in \mathcal{U}_{e^*}$. Отже, $\mathcal{U} = \cup\{\mathcal{U}_e : e \in E' \cup E''\}$. Згідно з лемою 3.10 $|E'| \leq \lambda_0^s$, а тому існує таке $e \in E' \cup E''$, що $|\mathcal{U}_e| > \lambda_0^s$. А це означає, що $sh(H_e) > \lambda_0^s$. Отримана суперечність завершує доведення теореми.

Залишаються відкритими такі питання:

3.12. Питання. Нехай S - інверсна півгрупа. Чи правильно, що $d(S) \leq \sup\{w(E),\ d(H_e): e \in E\}$?

3.13. Питання. Нехай S - компактна інверсна півгрупа. Чи правильно, що $w(S) \leq \sup\{w(E): w(H_e): e \in E\}$?

3.14. Питання. Нехай S - інверсна півгрупа і відображення π замкнене. Чи вірно, що $\chi(S) \leq \sup\{\chi(E),\ \chi(H_e): e \in E\}$?

Зауважимо, що за деяких обмежень відповідь на друге питання позитивна /І.Й.Гуран, М.М.Зарічний/.

Якщо в питанні 3.14 не вимагати замкненості $\mathcal{T}$, то відповідь негативна.

3.12. Приклад. Нехай $X = N \cup \{\eta\} \subset \beta N$, де $\eta \in \beta N \setminus N$. Покладемо $S = (X \times \mathbb{Z}_2) \setminus \{(\eta, \bar{1})\}$. На S задамо алгебраїчну операцію $*$ так:

$$(a, \bar{i}) * (b, \bar{j}) = \begin{cases} (\eta, \bar{0}), \text{ якщо } a \neq b; \\ (a, \bar{i} + \bar{j}), \text{ якщо } a = b. \end{cases}$$

Топологію на S задамо так, що підпростір $\{(n, \bar{1}) : n \in N\} \cup \{(\eta, \bar{0})\}$ гомеоморфний X, а підпростір $\{(n, \bar{0}) : n \in N\} \cup \{(\eta, \bar{0})\}$ – звичайна збіжна послідовність із граничною точкою $(\eta, \bar{0})$.

Легко перевірити, що $\chi(S) > \sup\{\chi(E), \chi(H_e) : e \in E\} = \lambda_0^S$.

§ 4. Деякі наслідки з результатів § 3

Нагадаємо [1; 2], що компакт X називається компактом Корсона, якщо X можна топологічно вкласти в Σ-добуток відрізків $[0, 1]$.

4.1. Теорема. Нехай S – компактна інверсна півгрупа і півструктура E лінійно впорядкована.

Тоді S є компактом Корсона тоді і тільки тоді, коли компакт S метризований.

Доведення. Нехай S – компакт Корсона. Тоді згідно з теоремою Л.Б.Нахмансона [2; 6] E – метризований компакт. Оскільки тіснота компакта Корсона зліченна, то для кожного $e \in E$ група H_e метризована. Тому /див.теорему 3.8/ λ_1^S є калібром простору S і $\chi(S) \leq \lambda_0^S$ /див.наслідок 3.4/. Оскільки кожний компакт з першою аксіомою зліченності, для якого λ_1^S є калібром, сепарабельний [I], то компакт S також сепарабельний. Оскільки компакт Корсона монолітний, то $w(S) \leq \lambda_0^5$, а отже, компакт S метризований.

Теорема 4.I є наслідком загальнішої теореми.

4.2. Теорема. Нехай S - компактна інверсна півгрупа з лінійно впорядкованою півструктурою E.

Тоді число Ліндельофа простору неперервних функцій $C_p(S)$ у топології поточкової збіжності дорівнює вазі простору S.

У доведенні теореми 4.2 суттєво використовується така теорема Л.Б.Нахмансона.

4.3. Теорема [6]. Якщо X - лінійно впорядкований компакт, то число Ліндельофа простору $C_p(X)$ дорівнює вазі простору X.

У теоремах 4.I і 4.3 лінійна впорядкованість півструктури E природним порядком суттєва. Одноточкова компактифікація A_τ незліченного дискретного простору є компактною інверсною півгрупою / в'язкою/. Відомо, що A_τ - компакт Еберлейна [2] неметризований.

Список літератури

I. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // УМН, I978. - Т. 33. - № 6. - С. 29-64.

2. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. - М.: Изд-во при МГУ, I989.

3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М.: Наука, I974.

4. Бейда А.А. О топологических инверсных полугруппах с компактным пространством замкнутых инверсных подполугрупп // Деп. в ВИНИТИ; 23.II.8I; № 5582 - 8I.

5. Клифорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. - М.: Мир, I972.

6. Нахмансон Л.Б. Линделефовость в пространстве функций // Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. - Кишинев, I985. - С. I83.