УДК 512.553

Р.В.Вовк, М.Я.Комарницький

РОЗШАРОВАНІ ДОБУТКИ ДЕЯКИХ НЕКОМУТАТИВНИХ НЕТЕРОВИХ КІЛЕЦЬ

У даній статті узагальнюється результат Т.Огоми [5] про нетеровість розшарованого добутку комутативних нетерових кілець на некомутативні нетерові кільця, в яких кожний ідеал має централізовану систему твірних, точніше доводиться, що коли кільця A_1, A_2 і A_0 нетерові і гомоморфізми $\varphi_i : A_i \to A_0$, де $i = 1, 2$, мають ядра $\mathfrak{A}_i$, яким притаманна властивість Артіна - Ріса, то умови Огоми є достатніми для нетеровості розшарованого добутку $A_1 \times_{A_0} A_2$. Метод доведення цього результату відрізняється від оригінального доведення Огоми, виконаного ним у комутативному випадку з використанням досить глибоких результатів комутативної алгебри, тим, що ми знаходимо твірні правого ідеалу J кільця $A_1 \times_{A_0} A_2$, припускаючи відомими твірні ідеалів $\pi_1(J)$, $\pi_2(J)$, $\varphi_1\pi_1(J) = \varphi_2\pi_2(J)$ та твірні модулів $\mathfrak{A}_i^{n} / \mathfrak{A}_i^{n_i+1}$ над $C = \operatorname{Im}\varphi_1 \cap \operatorname{Im}\varphi_2$, де $n_i = 1, 2, \ldots, k_i$, причому k_i - найменше з натуральних чисел, для яких $\mathfrak{A}_i^{k_i} \cap \pi_i(J) \subseteq \pi_i(J)\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$. Такий спосіб доведення дає можливість виконати грубу оцінку для числа твірних правого ідеалу розшарованого добутку кілець A_1 і A_2 над кільцем A_0. Разом з тим запропонований підхід наводить на думку, що його можна використати для обчислення стабільного рангу кільця $A_1 \times_{A_0} A_2$, якщо відомі стабільні ранги кілець A_0, A_1, A_2. Останнє питання досліджуватиметься в наступній статті.

Зазначимо, що інтерес авторів до даної задачі спричинено змістом робіт [1; 2; 4; 6; 8], де досліджуються як структурні питання самих розшарованих добутків кілець, так і різноманітні класи модулів, що є важливими з точки зору гомологічної алгебри.

1. Загальні відомості

Надалі всі кільця вважатимемо асоціативними з одиницею, відмінною від нуля, а всі модулі - правими і унітарними. Дотримуватимемось позначень, які використовував Огома в [5; 6].

Нехай A_0, A_1, A_2 - кільця; $\varphi_i : A_i \to A_0$, $i = 1, 2$ - гомоморфізми кілець. Тоді можна побудувати універсальний квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi_1} & A_1 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} \\ A_2 & \xrightarrow[\varphi_2]{} & A_0 \end{array}$$

у категорії кілець *Rings*. У цьому разі кільце A позначається $A_1 \times_{A_0} A_2$ і називається розшарованим добутком кілець A_1 і A_2 над кільцем A_0. Розшарований добуток кілець визначається однозначно з точністю до ізоморфізму. Канонічним представником класу ізоморфних до A кілець є таке кільце:

$$A = \{(a, b) \mid \varphi_1(a) = \varphi_2(b),\ a \in A_1,\ b \in A_2\} \subseteq A_1 \times A_2.$$

Гомоморфізми π_1 і π_2 у цьому разі є звуженнями канонічних проекцій прямого добутку $A_1 \times A_2$ на перший і другий множники.

Покладемо $\mathfrak{A}_i = Ker\,\varphi_i$, $C = Im\,\varphi_1 \cap Im\,\varphi_2$, $\varphi_i^{-1}(C) = B_i$, $i = 1, 2$. Зауважимо, що $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \subseteq A_1 \times_{A_0} A_2$ і C - підкільце кільця A_0. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ A_i - модуль $\mathfrak{A}_i^n / \mathfrak{A}_i^{n+1}$, $i = 1, 2$ є разом з тим модулем над кільцем $C \subseteq Im\,\varphi_i$, оскільки $Im\,\varphi_i \cong A_i/\mathfrak{A}_i$ і $\mathfrak{A}_i$ міститься в ануляторі модуля $\mathfrak{A}_i^n / \mathfrak{A}_i^{n+1}$. У [5] доведено такий факт.

Твердження 1.1. $A_1 \times_{A_0} A_2 = B_1 \times_C B_2$.

Для певних типів тверджень про розшаровані добутки кілець це дає змогу обмежитись випадком, коли φ_1 і φ_2 є накладеннями кілець /тобто сюр'єктивними гомоморфізмами/. У цьому зв'язку найбільш повні результати про розшаровані добутки дістаємо тоді, коли φ_1 і φ_2 - накладення. Так, А.Фаччіні [1] показав, що розшарований добуток комутативних локальних кілець над локальним кільцем є локальним кільцем і розшарований добуток комутативних нетерових кілець над нетеровим кільцем є нетеровим кільцем. Випадок довільних φ_1 і φ_2 не настільки очевидний. Так, Т.Огома показав, що для нетеровості розшарованого добутку нетерових комутативних кілець над комутативним нетеровим кільцем необхідно накладати також додаткову умову на модулі $\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^2$, $i = 1, 2$, а саме він довів таку теорему.

Теорема I.I [5]. Кільце $A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$ /де A_1, A_2, A_0 - комутативні кільця/ є нетеровим тоді і тільки тоді, коли

A_1, A_2, C - нетерові кільця;

C - модулі $\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^2$, $i = 1, 2$ скінченнопороджені.

Щоб перенести цю теорему на некомутативний випадок, необхідно накладати також додаткові умови. Нехай $\mathfrak{A}$ - двобічний ідеал у кільці R. Кажуть, що $\mathfrak{A}$ задовольняє праву умову Артіна - Ріса тоді, коли для кожного правого ідеалу $J \subseteq R$ існує натуральне число n, за яким правильне включення $J \cap \mathfrak{A}^n \subseteq J\mathfrak{A}$.

Відомо [3], що в комутативному нетеровому кільці кожному ідеалу притаманна властивість Артіна - Ріса і це саме справджується для кілець, в яких кожний ідеал має систему центральних твірних. Основний результат роботи [7] стверджує, що в некомутативному випадку всім ідеалам притаманна ця властивість тоді і тільки тоді, коли над кільцем усі кручення стабільні.

2. Достатні умови нетеровості розшарованого добутку некомутативних кілець

Твердження 2.I. Нехай A_1, A_2, C - нетерові справа кільця, ідеали $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$ задовольняють праву умову Артіна - Ріса, а $\mathfrak{A}_i^j / \mathfrak{A}_i^{j+1}$ - скінченнопороджений правий C-модуль за будь-яких $j \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Тоді кільце $A = A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$ нетерове справа.

<u>Доведення</u>. Нехай J - довільний правий ідеал у кільці $A = A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$. Зрозуміло, що $\varphi_1 \pi_1(J) = \varphi_2 \pi_2(J) \subset C$. Множина $\varphi_1 \pi_1(J) C$ - правий ідеал у кільці C. Оскільки C нетеровий, то існує скінченна система правих твірних $c_1, \ldots, c_m$ для даного ідеалу. При цьому кожний елемент $c \in \varphi_1 \pi_1(J)$ подається у вигляді $c = c_1 \lambda_1' + \ldots + c_m \lambda_m'$, де $c_i \in \varphi_1 \pi_1(J) C$, $\lambda_i' \in C$.

Серед елементів $c_1, \ldots, c_m$ є, можливо, такі, які не належать до $\varphi_1 \pi_1(J)$. Їх можна подати у вигляді $\sum x_i t_i$, де $t_i \in C$; $x_i \in \varphi_1 \pi_1(J)$. Тому, замінивши елементи c_j на x_j, можна вважати, що всі $c_1, \ldots, c_m \in \varphi_1 \pi_1(J)$. Для кожного $i = 1, \ldots, m$ виберемо такий елемент $a_i \in J$, що $\varphi_1 \pi_1(a_i) = c_i$.

Виберемо тепер такі натуральні числа n_1 і n_2, що $\pi_1(J)A_1 \cap \mathfrak{A}_1^{n_1} \subseteq \pi_1(J)\mathfrak{A}_1$ і $\pi_2(J)A_2 \cap \mathfrak{A}_2^{n_2} \subseteq \pi_2(J)\mathfrak{A}_2$. Оскільки модулі $\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^2$, $\mathfrak{A}_i^2/\mathfrak{A}_i^3, \ldots, \mathfrak{A}_i^{n_i-1}/\mathfrak{A}_i^{n_i}$, $i = 1, 2$ скінченнопороджені над нетеровим справа кільцем C, то праві C-модулі $\mathfrak{A}_i \cap \pi_i(J)A_i / \mathfrak{A}_i^2 \cap \pi_i(J)A_i, \ldots$

$\ldots, \mathfrak{A}_i^2 \cap \pi_i(J)A_i / \mathfrak{A}_i^3 \cap \pi_i(J)A_i, \ldots, \mathfrak{A}_i^{n_i-1} \cap \pi_i(J)A_i / \mathfrak{A}_i^{n_i} \cap \pi_i(J)A_i$

$i = 1, 2$ скінченнопороджені, оскільки ізоморфні деяким підмодулям наведених раніше C-модулів. Виберемо такі елементи $b_j' \in J$, $j = 1, \ldots, k$, що елементи $\pi_1(b_1'), \ldots, \pi_1(b_{s_1}')$ є представниками твірних суміжних класів C-модуля $\mathfrak{A}_1 \cap \pi_1(J)A_1 / \mathfrak{A}_1^2 \cap \pi_1(J)A_1$, а $\pi_1(b_{s_1+1}'), \ldots, \pi_1(b_{s_2}')$ є представниками твірних суміжних класів C-модуля

$\mathfrak{A}_1^2 \cap \pi_1(J)A_1 / \mathfrak{A}_1^3 \cap \pi_1(J)A_1$ і т.д.; $\pi_1(b_{k-s_{q-1}+1}'), \ldots$

$\ldots, \pi_1(b_k')$ є представниками твірних суміжних класів C-модуля $\mathfrak{A}_1^{n_1-1} \cap \pi_1(J)A_1 / \mathfrak{A}_1^{n_1} \cap \pi_1(J)A_1$. Розглянемо також елементи $\alpha_1, \ldots$

$\ldots, \alpha_u \in J$, образи яких у разі дії π_1 твірні для правого ідеалу $\pi_1(J)A_1\mathfrak{A}_1^{n_1}$ нетерового справа кільця A_1. Можна вважати, що

$\alpha_1 = \pi_1(\rho_1)\beta_1, \ldots, \alpha_u = \pi_1(\rho_u)\beta_u$, де $\rho_i \in J$, $\beta_i \in \mathfrak{A}_1$ при $i = 1, 2, \ldots, u$.

Аналогічні побудови виконаємо за другою компонентою з тією лише різницею, що замість J використовуватимемо правий ідеал $\mathcal{J} = (J \cap (0) \times \mathfrak{A}_2) \subseteq (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) \cap J$. Позначимо $b_1^2, \ldots, b_t^2$ елементи з $\mathcal{J}$, образи яких у разі дії гомоморфізму π_2, як і в попередньому випадку, є представниками твірних суміжних класів C-модулів $\mathfrak{A}_2^i \cap \pi_2(\mathcal{J})A_2 / \mathfrak{A}_2^{i+1} \cap \pi_2(\mathcal{J})A_2$, $i = 1, \ldots, n_2 - 1$, а $e_1, \ldots, e_\sigma$ – твірні правого ідеалу $\pi_2(\mathcal{J})\mathfrak{A}_2 \subseteq \pi_2(J)\mathfrak{A}_2$ у нетеровому справа кільці A_2. При цьому можна вважати, що

$e_1 = z_1 d_1, \ldots, e_\sigma = z_\sigma d_\sigma$, де $z_i \in \pi_2(\mathcal{J})$, $d_i \in \mathfrak{A}_2$ за будь-якого $i = 1, \ldots, \sigma$.

Тепер стверджуємо, що система елементів з $\mathcal{J}$

$$\{a_1, \dots, a_m, b_1^1, \dots, b_k^1, b_k^2, \dots, b_l^2, p_1, \dots, p_k, (0, z_1), \dots, (0, z_s)\} \qquad /*/$$

є системою твірних правого ідеалу $\mathcal{J}$ в кільці A.

Справді, нехай x - довільний елемент з $\mathcal{J}$. Тоді $\varphi_1 \pi_1(x) = c_1 \lambda_1' + \dots + c_m \lambda_m'$, де $\lambda_1', \dots, \lambda_m'$ - деякі елементи з C. Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in A$ такі, що $\varphi_1 \pi_1(\lambda_i) = \lambda_i'$, $i = 1, \dots, m$. Звідси

$$\pi_1(x - a_1\lambda_1 - \dots - a_m \lambda_m) \in \ker \varphi_1 = \mathfrak{A}_1 .$$

Тому $y_{s_1} = \pi_1(x - a_1\lambda_1 - \dots - a_m\lambda_m) \in \mathfrak{A}_1 \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1$. Образ елемента y_{s_1} у випадку канонічного гомоморфізму $\sigma_1 : \mathfrak{A}_1 \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1 \to \mathfrak{A}_1 \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1 / \mathfrak{A}_1^2 \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1$ тепер зображується у вигляді $\sigma_1(y_{s_1}) = \sigma_1(b_1^1)\bar{\mu}_1^{*1} + \dots + \sigma_1(b_{s_1}^1)\bar{\mu}_{s_1}^{*1}$, де $\mu_1^{*1}, \dots, \mu_{s_1}^{*1}$ - представники суміжних класів з кільця $A_1/\mathfrak{A}_1$, які відповідають коефіцієнтам $\mu_1^{**1}, \dots, \mu_{s_1}^{**1}$ з $C \subset \operatorname{Im} \varphi_1 \cong A_1/\mathfrak{A}_1$, що є коефіцієнтами розкладу елемента $\sigma_1(y_{s_1})$ через вибрані раніше твірні. Тоді $y_{s_2} = y_{s_1} - \pi_1(b_1^1\mu_1^1 + \dots + b_{s_1}^1\mu_{s_1}^1)$. Продовживши цей процес знаходження коефіцієнтів μ^{**1}, побачимо, що

$$y_k = \pi_1(x - a_1\lambda_1 - \dots - a_m\lambda_m - b_1^1\mu_1^1 - \dots - b_{s_1}^1\mu_{s_1}^1 - \dots$$
$$\dots - b_{k-s_{q-1}+1}^1 \mu_{k-s_{q-1}+1}^1 - \dots - b_k^1\mu_k^1) \in \mathfrak{A}_1^{n} \cap \pi_1(\mathcal{J})A_1 ,$$

де $\varphi_1\pi_1(\mu_i^1) = \mu_i^{**1}$, $i = 1, \dots, k$.

Виразимо $y_k \in \pi_1(\mathcal{J})\mathfrak{A}_1$ через елементи $\pi_1(p_1), \dots, \pi_1(p_u)$ з коефіцієнтами з $\mathfrak{A}_1$: $y_k = \pi_1(p_1)z_1 + \pi_1(p_2)z_2 + \dots + \pi_1(p_u)z_u$, де $z_i \in \mathfrak{A}_1$, $i = 1, \dots, u$. Тоді елемент

$$x - a_1\lambda_1 - \dots - a_m\lambda_m - b_1^1\mu_1^1 - \dots - b_k^1\mu_k^1 - p_1(z_1, 0) - \dots - p_u(z_u, 0)$$

належить правому ідеалу $\mathcal{J} \cap (0, \mathfrak{A}_2) = \mathcal{J}$.

Продовживши за аналогією процес підбору коефіцієнтів розкладу через інші елементи відокремленої раніше системи $/*/$, дістанемо розклад елемента x на лінійну комбінацію елементів системи / * / з коефіцієнтами з кільця $A = A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$. Твердження доведено.

Урахувавши інформацію, викладену раніше, та процес доведення твердження 2.I, дістаємо такий результат.

Теорема 2.I. Якщо гомоморфізми φ_1 і φ_2 такі, що всі праві ідеали кілець A_1 і A_2, які містяться в ідеалах відповідно $\mathfrak{A}_1$ та $\mathfrak{A}_2$, мають центральні системи твірних, то кільце $A_1 \times_{A_0} A_2$ є нетеровим справа тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

кільця A_1, A_2 і C нетерові справа;

модуль $\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^2$ – скінченнопороджений правий C-модуль за кожного i = I, 2.

Зрозуміло, що теорема Т.Огоми отримується з теореми 2.I, як безпосередній наслідок.

Зазначимо, що наше доведення дає конкретний алгоритм побудови скінченної системи твірних довільного правого ідеалу кільця $A_1 \underset{A_0}{\times} A_2$, тоді як доведення Т.Огоми грунтується на якісних результатах комутативної алгебри. У цьому зв'язку можна виконати певну, хоча й грубу, оцінку для числа твірних правих ідеалів розшарованого добутку нетерових кілець над нетеровим кільцем.

Щоб сформулювати точний результат, необхідно ввести ще деякі позначення та поняття.

Нехай $L_r(R)$ – решітка правих ідеалів кільця R. Мінімальну кількість центральних твірних скінченнопородженого правого ідеалу J позначатимемо $\varkappa(J)$, де $J \in L_r(R)$, а точну верхню межу /якщо така існує/ для множини $\{\varkappa(J) / J \in L_r(R)\}$ позначатимемо $\varkappa(R)$.

Число n назвемо AR-індексом ідеалу $\mathfrak{A}$ кільця R відносно правого ідеалу J, якщо воно найменше серед таких чисел k, що має місце включення $J \cap \mathfrak{A}^k \subseteq J\mathfrak{A}$. Якщо ідеал $\mathfrak{A}$ має AR-індекс відносно J, то позначимо його $\theta_J(\mathfrak{A})$.

Теорема 2.2. Нехай A_1, A_2, C – нетерові справа кільця, в яких кожний правий ідеал має центральну систему твірних. Нехай $\varphi_1 : A_1 \to C$; $\varphi_2 : A_2 \to C$ – такі гомоморфізми кілець, що модуль $M_1 = \mathfrak{A}_1 / \mathfrak{A}_1^2$ має k_1 твірних над C, а модуль $M_2 = \mathfrak{A}_2 / \mathfrak{A}_2^2$ має k_2 твірних над C. Тоді виконується нерівність

$$\varkappa(J) \leq \varkappa(\bar{\pi}_1(J)) + \varkappa(\bar{\pi}_2(J)) + \varkappa(\varphi_1 \bar{\pi}_1(J)) + \frac{k_1(k_1^{\theta_J(a_1)}-1)}{k_1-1} + \frac{k_2(k_2^{\theta_J(a_2)}-1)}{k_2-1}.$$

Ця теорема доводиться безпосереднім аналізом алгоритму побудови системи твірних правого ідеалу J кільця $A_1 \times_{A_0} A_2$ в доведенні твердження I.I.

Список літератури

1. Facchini A. Fiber products and Morita Duality for commutative rings. Rend// Sem. Mathem. University Padova, 1981. -67. - N1. - P. 143-159.
2. Facchini A., Vamos P. Injective modules over pullbacks // J. London Mathem. Soc., 1985. -31.- N3.- P. 425 - 438.
3. Mc Conel J.C., Robson J.C. Noncommutative noetherian rings // John Willey - Sons. - New York, 1987.
4. Nashiar B., Nichols W. Patching Modules over commutative squares // J. Algebra, 1988. - 113. - N2. - P. 297-317.
5. Ogoma T. Fibre products of noetherian rings and their applications // Math. Proc. Cambr. Phil. Society, 1985. - 97. - N1. - P. 231-241.
6. Ogoma T. Fibre products of noetherian rings // Advance Stud. Pure Math., 1987. - 11. - N1. - P. 173 - 182.
7. Van Ogstaegen F. On the AR - property // Bull. Soc. Math. Belgium, 1976. - 28. - N1. - P. 11 - 16.
8. Wiseman A.N. Projective modules over pullbacks rings // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1985. - 97. - 335. - N3. - P. 399 - 406.