УДК 519.46

І.Й.Гуран

МЕТРИЗОВНІСТЬ КОМПАКТНИХ ІНВЕРСНИХ ПІВГРУП

Нехай S- інверсна півгрупа [1]; $E(S)$- півгрупа її ідемпотентів. Елемент, інверсний до $x \in S$, позначимо x^{-1}.

Нехай $\mathcal{T}$ - гаусcдорфова топологія на інверсній півгрупі S. Якщо операції множення і взяття інверсного елемента в S неперервні щодо топології $\mathcal{T}$, то пара $/ S, \mathcal{T} /$ називається топологічно інверсною півгрупою. Якщо $\mathcal{T}$ - компактна топологія на S, то $/ S, \mathcal{T} /$ - компактна інверсна півгрупа. Завжди далі S - топологічно інверсна півгрупа. Якщо $x \in X$, то $\chi(x, X)$- характер точки x в X /див. [3, с. 34]/.

Нехай точка x належить компактній півгрупі X. Позначимо $\mathcal{G}(x)$ монотетичну півгрупу, породжену елементом x, тобто $\mathcal{G}(x) = \{x^p \mid p \in \mathbb{N}\}$. Відомо [2], що півгрупа $\mathcal{G}(x)$ містить абельову підгрупу $A(x) = \cap \{\mathcal{G}_n(x) / n \in \mathbb{N}\}$, де $\mathcal{G}_n(x) = \{x^p \mid p \geq n\}$. Крім того, півгрупа $\mathcal{G}(x)$ компактна і містить єдиний ідемпотент e_x. Будемо говорити, що елемент y належить ідемпотенту e, якщо e - єдиний ідемпотент півгрупи $\mathcal{G}(y)$. Множину всіх елементів, що належать ідемпотенту e, позначимо $K(e)$. Якщо $a \in K(e)$, то елемент a називається регулярним при $ae = ea = a$. Природні неперервні відображення інверсної півгрупи S $\pi_1 : S \to E(S)$; $\pi_1(x) = xx^{-1}$; $\pi_2 : S \to E(S)$; $\pi_2(x) = x^{-1}x$ - ретракції, а підмножина $H(e) = \pi_1^{-1}(e) \cap \pi_2^{-1}(e)$ - максимальна підгрупа, яка містить ідемпотент e.

На множині $E(S)$ ідемпотентів півгрупи S існує природний частковий порядок, а саме: $e_1 \leq e_2$ тоді і лише тоді, коли $e_1 e_2 = e_1 = e_2 e_1$, де $e_1, e_2 \in E(S)$. Якщо підпростір $E(S)$ у S лінійно впорядкований [3] щодо введеного порядку $\leq$, то півгрупа S називається L-півгрупою.

<u>Теорема 1</u>. Якщо компактна інверсна півгрупа S задовольняє одну з таких умов:

для будь-якого $x \in S$ півгрупа $\mathcal{G}(x)$ або не містить ізольованих точок, або є групою;

кожний елемент $x \in S$ є регулярним;

для будь-якого $x \in S$ виконується умова $xx^{-1} = x^{-1}x$;

S є L-півгрупою,

то півгрупа S є об'єднанням компактних максимальних підгруп $H(e)$, $e \in E(S)$, що не перетинаються. Кожна з наведених умов є необхідною і достатньою умовою такого розкладу. Крім того, $H(e) = K(e)e = eK(e)$.

Доведення. Перші дві з наведених умов еквівалентні, що випливає з теореми 7, наведеної в [4], і основного результату, поданого в [5]. Третя умова еквівалентна тому, що інверсна півгрупа є об'єднанням груп $H(e), e \in E(S)$ [1, теорема 4.5]. З теореми 7, наведеної в [4], випливає, що друга і третя умови також еквівалентні. Припустимо, що S є L-півгрупою, яка не є диз'юнктним об'єднанням груп. Тоді з третьої умови випливає, що існує елемент $x \in S$ такий, що $xx^{-1} = x^{-1}x$. Отже, ідемпотенти xx^{-1} і $x^{-1}x$ порівнянні, а тому згідно з лемою 1.31, наведеною в [1], півгрупа S містить біциклічну півгрупу, породжену елементами x і x^{-1}. Проте біциклічна півгрупа не вкладається в компактну півгрупу [6].

Наслідок. Якщо S - компактна інверсна півгрупа, то для будь-якого $x \in S$ або $xx^{-1} = x^{-1}x$, або ідемпотенти xx^{-1} і $x^{-1}x$ непорівнянні.

Відомо, що підмножини $H(e,f) = \{x \in S \mid xx^{-1} = e \,\&\, x^{-1}x = f\}$, $e, f \in E(S)$ гомеоморфні максимальним підгрупам $H(e)$ і $H(f)$. Підгрупа $E(S)$ - ретракт S, а тому компактна. Розглянемо таке загальне питання щодо компактних інверсних півгруп: які топологічні властивості притаманні півгрупі S, якщо припустимо, що $\mathcal{P}_1$ - топологічна властивість, притаманна підпівгрупі $E(S)$, а $\mathcal{P}_2$ - топологічна властивість, притаманна максимальним підгрупам $H(e)$?

Наприклад, якщо підпівгрупа $E(S)$ злічення, а всі максимальні підгрупи компактної інверсної півгрупи S метризовні, то S - метризовний компакт. Це наслідок того, що в цьому разі півгрупа S є зліченним об'єднанням компактів $H(e,f)$, e, $f \in E(S)$ і за теоремою О.В.Архангельського [3, 3.1.20] S -

метризовний компакт. Необхідно визначити, наскільки вимога зліченності підпівгрупи $E(S)$ є суттєвою, а також чи справджується така гіпотеза.

Гіпотеза /Б.М.Бокало/. Якщо S - компактна інверсна півгрупа, підпівгрупа ідемпотентів, усі максимальні підгрупи якої метризовні, то півгрупа S метризовна.

Встановимо правильність цієї гіпотези для деяких класів інверсних півгруп. Основний результат - теорема 2, наведена в [9].

Означення I. Нехай $e \in E(S)$ і S - топологічна інверсна півгрупа. Точка e називається ізольованою зліва /справа/, якщо існує окіл $U(e) \ni e$ у S, який не містить точок $e' \in E(S)$ таких, що $e' < e$ $(e < e')$.

Зрозуміло, що в L-півгрупі ідемпотенти, ізольовані як зліва, так і справа, є ізольованими точками в $E(S)$.

Лема I. Якщо півгрупа S містить ізольовану точку x і $x \in H(e,f)$, то ідемпотенти e і f ізольовані зліва.

Доведення. Легко побачити, що коли простір $H(e,f)$ містить ізольовану точку, то підгрупи $H(e)$ і $H(f)$ також містять ізольовані точки. Тому, не зменшуючи загальності, можна вважати, що x - ізольована точка підгрупи $H(e)$. Якщо $H(e) = \{x\}$, то все доведено. Якщо ж $x \neq e$, то з неперервності множення і рівності $xe = x = ex$ випливає таке: існує окіл $U(e)$ такий, що для кожного $u \in U(e)$ виконується $xu = ux = x$. Оскільки, припустивши, що e - неізольована зліва точка, маємо: існує точка $p \in U(e)$ така, що $p < e$ і $e = xx^{-1} = x(px)^{-1} = xx^{-1}p^{-1} = ep^{-1} = ep = p$. Отримана суперечність доводить твердження леми.

Наслідок I. Нехай S - топологічно інверсна півгрупа, підпівгрупа ідемпотентів якої не містить ізольованих зліва точок. Тоді півгрупа S не містить ізольованих точок.

Наслідок 2. Нехай S - компактна інверсна півгрупа, всі максимальні підгрупи якої метризовні, а множина $E(S)$ ідемпотентів задовольняє першу аксіому зліченності і не містить ізольованих зліва точок. Тоді потужність півгрупи S дорівнює континууму.

5*

Доведення. Оскільки $\chi(e, S) \leq \omega$ для кожної точки $e \in E(S)$, то $\psi(H(e), S) \leq \omega$. З рівності $\psi(F) = \chi(F)$ для кожної замкненої підмножини F в компакті і нерівності $\chi(x, S) \leq \chi(x, F) \cdot \chi(F, S)$ [3, с. 144] випливає, що компакт S задовольняє першу аксіому зліченності в кожній точці. З теореми О.В.Архангельського [7] випливає, що потужність S дорівнює континууму.

Приклад 1. Нехай $S' = X \times \mathbb{Z}_2$, де $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Визначимо на $S = S' \cup \{(0, \bar{0})\}$ алгебраїчну операцію таким способом:

$$(x, \varepsilon_1)(y, \varepsilon_2) = (\min(x, y), \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

де $x, y \in X$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{Z}$; $(0, \bar{0})(x, \varepsilon) = (x, \varepsilon)(0, \bar{0}) = (0, \bar{0})$.

Щодо введеної таким способом операції множина S є інверсною півгрупою. Задамо на S топологію $\mathcal{T}$, вважаючи кожну точку $\{(x, \bar{1})\}$, $x \in X$ ізольованою, а на множині $\{(x, \bar{0}) / x \in X\} \cup \{(0, \bar{0})\}$ топологія індукована з прямої $\mathbb{R}$. Легко побачити, що $(S, \mathcal{T})$ - топологічна інверсна півгрупа, підпівгрупа $E(S)$ ідемпотентів якої компактна і гомеоморфна збіжній послідовності, а всі максимальні підгрупи ізоморфні групі $\mathbb{Z}_2$.

Отже, якщо підпівгрупа ідемпотентів - зліченний компакт, а всі максимальні підгрупи навіть скінченні, то вся інверсна півгрупа необов'язково має бути компактною.

Приклад 2. Нехай $S' = X \times \mathbb{Z}_2$, де $X = (0, 1]$. На множині $S = S' \cup \{(0, \bar{0})\}$ визначимо алгебраїчну операцію так само, як у прикладі 1. Топологія на S визначена так: на підпросторі $(X \times \{0\}) \cup \{(0, \bar{0})\}$ - топологія відрізка $[0, 1]$, а на підпросторі $X \times \{\bar{1}\}$ базу топології утворюють різні півінтервали $(a, x] \times \{\bar{1}\}$. Тоді легко побачити, що S - топологічно інверсна півгрупа.

У цьому прикладі підпівгрупа ідемпотентів $E(S)$ є відрізок $[0, 1]$, усі максимальні підгрупи ізоморфні $\mathbb{Z}_2$, уся півгрупа S фінально компактна, але неметризована, оскільки містить підпростір $X \times \{\bar{1}\}$, гомеоморфний стрілці Зоргенфрея. З цього прикладу випливає, що вимога компактності всієї півгрупи S в гіпотезі про метризовність півгрупи з метризовною підпівгрупою ідемпотентів і метризовними максимальними підгрупами є суттєвою.

Лема 2. Нехай S є L-півгрупа, множина ідемпотентів $E(S)$ якої має зліченну базу. Тоді потужність множини ідемпотентів, ізольованих зліва /справа/, не більш ніж зліченна.

Доведення. Припустимо, множина $M \subset E(S)$ точок, ізольованих зліва, незліченна. Оскільки відкриті інтервали (a_n, b_n), $n \in N$ утворюють зліченну базу в $E(S)$, то існує точка $x_0 \in M$, яка не є точною нижньою межею жодного елемента бази $\{(a_n, b_n) | n \in N\}$. Тоді відкриту множину $[x_0, c)$, де $c > x_0$, не можна подати у вигляді об'єднання елементів бази. Доведення для ізольованих справа точок аналогічне.

Лема 3. Нехай S - топологічна L-півгрупа; $H(e)$ - максимальна підгрупа, яка є компактною групою Лі; e - неізольований зліва ідемпотент метризовної півгрупи $E(S)$. Тоді існує такий ідемпотент $e' < e$, що всі максимальні підгрупи $H(e'')$ топологічно ізоморфні групі $H(e)$, де $e' \leq e'' \leq e$.

Доведення. Оскільки ідемпотент e неізольований зліва, то існує послідовність $\{e_n | n \in N\}$ ідемпотентів така, що $e_i < e_{i+1}$ і $\lim_{i \to \infty} e_i = e$. Розглянемо гомоморфізми

$$\tilde{e}_i : H(e) \to H(e_i); \quad \tilde{e}_i(x) = e_i x, \quad x \in H(e)$$

/відображення $\tilde{e}_i$ є гомоморфізмами, оскільки S є L-півгрупою і з теореми I випливає, що S - об'єднання максимальних підгруп, а в цьому разі кожний ідемпотент лежить у центрі півгрупи S/.

Якщо $i > j$, то $\ker \tilde{e}_j \subset \ker \tilde{e}_i$. Дійсно, якщо $x \in \ker \tilde{e}_i$, то $e_i x = e_i$. Але тоді $\tilde{e}_j(x) = (e_j e_i) x = e_j$. Отже, $x \in \ker \tilde{e}_j$. Відомо [8, с. 138], що послідовність нормальних підгруп компактної групи Лі стабілізується, а тому існує $n \in N$ таке, що $\ker \tilde{e}_i = \ker \tilde{e}_n$ при $i \geqslant n$. Припустимо, що $\ker \tilde{e}_n \neq \{e\}$. Тоді існує точка $x \in \ker \tilde{e}_n$ і $x \neq e$. Очевидно, для всіх $i \geqslant n$ маємо $e_i x = e_i$. З іншого боку, $ex = xe = x$ і $e = \lim_{i\to\infty} e_i = \lim_{i\to\infty} e_i x = ex = x$. Отже, існує ідемпотент $e_n < e$ такий, що $\ker \tilde{e}_n = e$ і для всіх $i \geqslant n$ групи $H(e_i)$ - ізоморфні групі $H(e)$.

Лема 4. Нехай S - компактна L-півгрупа; e - неізольований зліва ідемпотент; $[e', e]$ - замкнений інтервал у $E(S)$ такий, що всі максимальні підгрупи $H(e'')$, де $e'' \in [e', e]$ ізоморфні. Тоді підпростір $H[e', e] = \cup\{H(e'') / e'' \in [e', e]\}$ гомеоморфний $H(e) \times [e', e]$.

Доведення. Нехай $x \in H(e) \times [e', e]$, $x \in (g, t)$, де $g \in H(e)$; $t \in [e', e]$. Задамо відображення

$$\varphi: H(e) \times [e', e] \to H[e', e], \quad \varphi(g, t) = gt.$$

Безпосередньо з неперервності множення випливає, що відображення φ неперервне, а з доведення леми 3 випливає, що φ - біекція. Оскільки простори $H(e) \times [e', e]$ і $H[e', e]$ - компакти, то φ - гомеоморфізм.

Позначимо $k(e)$ точну нижню межу ідемпотентів e' /менших від ідемпотенту e/ таких, що $H(e') \cong H(e)$ і $H(e'') \cong H(e)$ для всіх $e'' \in [e', e]$.

Лема 5. Нехай e - неізольований зліва ідемпотент компактної L-півгрупи з метризовною підпівгрупою $E(S)$. Тоді підпростір $H(e) = \cup\{H(t) \mid t \in |k(e), e|\}$ - метризовний компакт.

Доведення. Якщо $k(e)$ - неізольований справа ідемпотент, то $H(e) = \cup\{H[t_n, e] / t_n > k(e), t_n > t_{n+1}, \lim_{n\to\infty} t_n = k(e)\} \cup H(k(e))$. Оскільки $H(e) = \pi_1^{-1}([k(e), e])$, то $H(e)$ - компактний простір, який є об'єднанням зліченного числа метризовних компактів, а отже, метризовний.

Якщо на проміжку $[k(e), e]$ існує неізольований справа ідемпотент, то виконуємо такі самі міркування для точної нижньої межі неізольованих справа ідемпотентів, що належать відрізку $[k(e), e]$. Якщо ж усі точки проміжку ізольовані справа, то знову-таки згідно з лемою 2 їх кількість не перевищує зліченну.

Введемо на підпівгрупі $E(S)$ відношення еквівалентності: $e_1 \sim e_2$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $e' \in [e_1, e_2]$ групи $H(e_1)$, $H(e')$ і $H(e_2)$ топологічно ізоморфні. Очевидно, кожний клас T еквівалентності містить максимальний елемент e, а з леми 3 випливає, що цей клас тоді збігається з $H(e)$ або $H(e) \setminus H(r(e))$.

Теорема 2. Нехай S – компактна інверсна L-півгрупа, підпівгрупа ідемпотентів якої метризовна, а всі максимальні підгрупи є групами ЛІ. Тоді S – метризовний компакт.

Доведення. Оскільки введені класи еквівалентності непорожні, то їх множина не перевищує зліченну. Проте з леми 5 випливає, що кожний клас еквівалентності – метризовний простір. Отже, компактна півгрупа S – зліченне об'єднання метризовних компактів, а тому вона метризовна.

На підставі теореми 2 можна описати структуру компактних інверсних L-півгруп з метризовною множиною ідемпотентів і максимальними групами ЛІ. Така півгрупа складається з компактних "блоків" $H(e)$, кількість яких злічення, а деякі з цих "блоків" можуть зводитись до однієї групи.

Зауважимо, що на кожному з "підблоків" $H(e_1, e_2]$ відображення проекції $\pi_1 : S \to E(S)$ відкрите і кожний такий "блок" пошарово гомеоморфний добутку $H(e_2) \times [e_1, e_2]$.

Список літератури

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. - М.: Мир, 1972.

2. Numakura K. On bicompact semigroups // Math. J. - Okayama Univ., 1954. - V. 1. - P. 99-108.

3. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир, 1986.

4. Шварц Ш. К теории гаусcдорфовых бикомпактних полугрупп // Чехосл.математ.журн., 1955. - Вып. 5. - № 1. - С. 1-23.

5. Hewitt E. Compact monothetic semigroups // Duke Math. J., 1956. - V. 23. - P. 447-457.

6. Koch R. J., Wallace A. D. Notes on inverse semigroups // Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 1964. - V. 9. - P. 19-24.

7. Архангельский А.В. О мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности // ДАН СССР, 1969. - Т. 187. - С. 967-970.

8. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. - М.: Мир, 1980.

9. Guran I. I. On metrizability of compact topologically inverse semigroups // IX international conf. on Topology and its applications. - Kiev, 1992. - P. 83.

УДК 512.552.12

Б.В.Забавський

ПРО PP-КВАЗІДУОКІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Розглядатимемо кільця, в яких будь-який максимальний правий ідеал є двобічним. Відомо, що така область елементарних дільників є дуообластю [1].

У [2] зазначено, що праве квазідуокільце елементарних дільників є лівим квазідуокільцем, а також дуокільцем. Усе це є обгрунтуванням актуальності дослідження дуокілець елементарних дільників. Тут розглядатимуться ріккартові кільця, а саме: розглядаються умови, за яких такі кільця є кільцями елементарних дільників, що є частковою відповіддю на запитання, поставлені в [3].

Під терміном "кільце" розумітимемо асоціативне кільце з одиницею, відмінною від нуля, під ідеалом - двобічний ідеал. Праве /ліве/ дуокільце - це кільце, в якому довільний правий /лівий/ ідеал є ідеалом. Ліве і праве дуокільце називається дуокільцем. Якщо в кільці довільний максимальний правий ідеал є ідеалом, то кільце називається правим квазідуокільцем. Правим ріккартовим кільцем /правим PP-кільцем/ називається кільце, в якому правий анулятор довільного елемента породжується ідемпотентом. Якщо в кільці R для довільного