4. Шварц Ш. К теории гаусcдорфовых бикомпактних полугрупп // Чехосл.математ.журн., 1955. - Вып. 5. - № 1. - С. 1-23.

5. Hewitt E. Compact monothetic semigroups// Duke Math.J., 1956.-V. 23.-P. 447-457.

6. Koch R.J., Wallace A.D. Notes on inverse semigroups// Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 1964.-V. 9.-P. 19-24.

7. Архангельский А.В. О мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности // ДАН СССР, 1969. - Т. 187. - С. 967-970.

8. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. - М.: Мир, 1980.

9. Guran I.I. On metrizability of compact topologically inverse semigroups // IX international conf. on Topology and its applications. -Kiev, 1992. -P. 83.

УДК 512.552.12

Б.В.Забавський

ПРО PP-КВАЗІДУОКІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Розглядатимемо кільця, в яких будь-який максимальний правий ідеал є двобічним. Відомо, що така область елементарних дільників є дуообластю [1].

У [2] зазначено, що праве квазідуокільце елементарних дільників є лівим квазідуокільцем, а також дуокільцем. Усе це є обгрунтуванням актуальності дослідження дуокілець елементарних дільників. Тут розглядатимуться ріккартові кільця, а саме: розглядаються умови, за яких такі кільця є кільцями елементарних дільників, що є частковою відповіддю на запитання, поставлені в [3].

Під терміном "кільце" розумітимемо асоціативне кільце з одиницею, відмінною від нуля, під ідеалом - двобічний ідеал. Праве /ліве/ дуокільце - це кільце, в якому довільний правий /лівий/ ідеал є ідеалом. Ліве і праве дуокільце називається дуокільцем. Якщо в кільці довільний максимальний правий ідеал є ідеалом, то кільце називається правим квазідуокільцем. Правим ріккартовим кільцем /правим PP-кільцем/ називається кільце, в якому правий анулятор довільного елемента породжується ідемпотентом. Якщо в кільці R для довільного елемента a рівняння $axa = a$ завжди має розв'язок, то це кільце називається регулярним; якщо цей розв'язок є оберненим елементом кільця R, то останне називається одинично регулярним. Регулярне дуокільце називається абельово регулярним, а кільце R – самоін'єктивним справа, якщо воно є ін'єктивним правим R-модулем.

Нагадаємо, що матриці A і B з елементами кільця R називаються еквівалентними, коли $B = PAQ$ для обернених над R матриць P і Q відповідних розмірів. Якщо матриця A з елементами кільця R еквівалентна деякій діагональній матриці $diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0)$, де $\varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i \supseteq R\varepsilon_{i+1} R$ $(i = 1, 2, \dots, r-1)$, то говорять, що матриці A притаманна діагональна редукція /під діагональною матрицею розуміємо не обов'язково квадратну матрицю, а лише таку, в якої по головній діагоналі стоять відповідні елементи, а на інших місцях – нулі/. Якщо над кільцем R усім матрицям притаманна діагональна редукція, то кільце R називається кільцем елементарних дільників /скорочено к.е.д./. Якщо ж над кільцем R довільній Іх2 /2хІ/ матриці притаманна діагональна редукція, то кільце R називається правим /лівим/ ермітовим кільцем. Праве і ліве кільця Ерміта називаються кільцями Ерміта. З означення правого кільця Ерміта випливає, що воно є кільцем скінченнопороджених правих головних ідеалів, тобто кільцем, в якому довільний скінченнопороджений правий ідеал є головним правим ідеалом [3; 4].

Якщо елемент кільця – ні правий, ні лівий дільник нуля, то він називається регулярним. Центр кільця R позначається $Z(R)$, а радикал Джекобсона – $J(R)$. Звичайно $U(R)$ означає групу одиниць кільця R, а R_n – кільце квадратних матриць розміром n з елементами кільця R.

І. Про квазідуокільця елементарних дільників

Зазначимо відомі результати А.А.Туганбаєва, необхідні для посилань.

<u>Теорема І</u>. Праве регулярне квазідуокільце є абельово регулярним.

<u>Теорема 2</u>. У правому PP-квазідуокільці скінченнопороджених правих головних ідеалів довільний елемент є добутком центрального ідемпотента на регулярний елемент.

Теорема 3. Праве PP-квазідуокільце скінченнопороджених правих головних ідеалів, в якому будь-який головний ідеал є головним правим і лівим ідеалом з однією і тією самою твірною, є дуокільцем.

Доведення. Нехай R - праве PP-квазідуокільце скінченнопороджених правих головних ідеалів, в якому будь-який головний ідеал є правим і лівим ідеалом з однією і тією самою твірною. На підставі теореми 2 будь-який елемент $a \in R$ можна подати у вигляді $a = e \cdot b$, де $e^2 = e \in Z(R)$; b - регулярний елемент. Оскільки $RbR = b_\# R = Rb_\#$, то $b = b_\# \cdot u$. Оскільки $b_\# \in RbR$, то $b_\# = \sum_{i=1}^{n} x_i b y_i$; $x_i, y_i \in R$. Оскільки $b_\# R = Rb_\#$, то $x_i b_\# = b_\# x_i'$, $x_i' \in R$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. Звідси $b_\# (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i' u y_i) = 0$. Унаслідок регулярності елемента b отримаємо $Ku R = R$.

На підставі теореми 3 [2] маємо $u \in U(R)$, отже, b - дуоелемент кільця, тобто $bR = Rb$, а отже, $aR = Ra$, що й треба було довести.

Теорема 4. Нехай R - праве PP-квазідуокільце елементарних дільників, в якому будь-який головний ідеал є головним правим і лівим ідеалом з однією і тією самою твірною, а отже, дуокільцем.

Доведення. Нехай $a \in R \setminus 0$. На підставі означення маємо

$$\mathrm{diag}(a, a) P = Q \,\mathrm{diag}(z, b), \qquad /1/$$

де $P = (p_{ij}) \in U(R_2)$; $Q = (q_{ij}) \in U(R_2)$; $zR \cap Rz \supseteq RbR$.

Оскільки $a \neq 0$, то $b \neq 0$. З рівності /1/ маємо

$$a p_{12} = q_{12} b; \quad a p_{22} = q_{22} b. \qquad /2/$$

Оскільки $R p_{12} + R p_{22} = R$, на підставі леми 1 [1] маємо $p_{12} \cdot u + p_{22} \cdot v = 1$; $u, v \in R$. З рівності /2/ маємо

$a = ap_{12}u + ap_{22} \cdot v = q_{12}bu + q_{22}bv \in RbR$. Звідси $RaR = RbR$. Очевидно, $RaR = RzR$. Оскільки $RbR \subseteq zR \cap Rz$, то $RaR = zR = Rz$. Згідно з теоремою 3 R- дуокільце.

2. Про адекватні PP-квазідуокільця

Нехай R- дуокільце. Припустимо, елемент $a \in R \setminus 0$ адекватний елементу b /у позначеннях $a A b$ /, якщо елемент a можна подати у вигляді $a = r \cdot s$, де $rR + bR = R$, і для довільного необерненого дільника s' елемента s виконується умова $s'R + bR \neq R$. Елемент r назвемо максимальною взаємно простою з b компонентою елемента a, а s' - максимальною спільною з b компонентою елемента a.

Твердження I. Нехай R- дуокільце і $a, b, c \in R$, причому $aR + bR + cR = R$, $c A a$. Тоді існує елемент $m \in R$ такий, що $(a + mb)R + mcR = R$.

Доведення. Оскільки $c A a$, то $c = r \cdot s$, де r - максимальна взаємно проста з a компонента елемента c; s- максимальна спільна з a компонента елемента c.

Розглянемо $(a + rb)R + rcR = kR$. Нехай $k \notin U(R)$; $kR + rR = eR$, де $e \notin U(R)$. Оскільки $(a+rb)R \subset eR$; $rR \subset eR$, то $aR \subset eR$, що суперечить умові $rR + aR = R$. Отже, $kR + rR = R$. Тоді, очевидно, $sR + kR = eR$, де $e \notin U(R)$. На підставі означення елемента s маємо $eR + aR = nR$, де $n \notin U(R)$. Оскільки $(a + rb)R \subset nR$, то $bR \subset nR$, що суперечить умові $aR + bR + cR = R$. Отже, $k \in U(R)$. Поклавши $r = m$, отримаємо доведення твердження.

Означення. Ермітове дуокільце, в якому довільний ненульовий елемент адекватний, назвемо адекватним дуокільцем.

Для подальшого розгляду необхідні такі результати.

Твердження 2. Якщо R - праве ермітове кільце, то для довільних елементів $a, b \in R$ існують елементи $a_1, b_1, d \in R$ такі, що $a = da_1$; $b = db_1$; $a_1R + b_1R = R$.

Доведення. Унаслідок правої ермітовості кільця R існує обернена матриця $P = (p_{ij})$ така, що $(a, b)P = (d, 0)$, де $d \in R$. Оскільки $P \in U(R_2)$, то для матриці P існує обернена матриця $Q = (q_{ij})$. Тоді $(d, 0)Q = (a, b)$. Звідси $dq_{11} = a$; $dq_{12} = b$, $q_{11}p_{11} + q_{12}p_{21} = 1$, тобто $q_{11}R + q_{12}R = R$. Поклавши $a_1 = q_{11}$, $b = q_{12}$, дістанемо доведення твердження.

Твердження 3. Нехай R- дуокільце, а b - регулярний елемент. Тоді для довільної матриці $P \in U(R_2)$ існує матриця $P' \in U(R_2)$ така, що $diag(b, b)P = P'diag(b, b)$.

Доведення. Якщо $P = (p_{ij})$; $bp_{ij} = p'_{ij}b$, то матриця $P' = (p'_{ij})$ шукана.

Теорема 5. Праве PP-адекватне дуокільце є кільцем елементарних дільників.

Доведення. Щоб довести теорему, досить обмежитись матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Нехай $aR + bR + cR = xR$. Тоді на підставі твердження 2 $a = xa_0$; $b = xb_0$; $c = xc_0$, де $a_0R + b_0R + c_0R = R$. Згідно з теоремою 2 маємо $x = e\alpha$, де $e^2 = e \in Z(R)$; α - регулярний елемент R. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, якщо $c_0 = 0$, то матриці A притаманна діагональна редукція. Якщо $c_0 \neq 0$, то $c_0 \wedge a_0$; $c_0 = r \cdot s$, де r - максимальна взаємно проста з a_0 компонента елемента c_0; s - максимальна спільна з a_0 компонента елемента c_0. Згідно з твердженням I існує елемент $m \in R$ такий, що $(a_0 + m b_0)R + m_0 R = R$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + m b_0, & m c_0 \\ * & * \end{pmatrix} = B.$$

Очевидно, матриці B притаманна діагональна редукція. Для матриці

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}.$$

існують матриці $P, Q \in U(R_2)$ такі, що $PA_0Q = diag(r, k)$, де $kR \subset zR$. Оскільки α - регулярний елемент, то згідно з твердженням 3 існує обернена матриця $P' \in R_2$ така, що $P' diag(\alpha, \alpha) = diag(\alpha, \alpha) P$. Оскільки $e \in Z(R)$, то, очевидно, матриці PAQ притаманна діагональна редукція. Отже, R - к.е.д. Таким чином, теорему 2 доведено.

Оскільки абелево регулярне кільце є правим адекватним PP-квазідуокільцем, в якому довільний головний ідеал є головним правим і лівим ідеалом з однією і тією самою твірною, то як очевидний наслідок дістанемо такий результат.

Теорема 6. Абельово регулярне кільце є кільцем елементарних дільників.

Оскільки кільце матриць над кільцем елементарних дільників є кільцем елементарних дільників, а також прямі добутки кілець елементарних дільників є знову кільцями елементарних дільників, то як очевидний наслідок дістаємо такий результат.

Теорема 7. Регулярне праве самоін'єктивне кільце, всі примітивні фактор-кільця якого є артіновими, є кільцем елементарних дільників.

Теорема 8. Довільний ненульовий простий ідеал адекватного дуокільця міститься в єдиному максимальному ідеалі.

Доведення. Відомо, що в дуокільці простий ідеал є цілком простим. Нехай P - ненульовий цілком простий ідеал кільця, який міститься в перетині двох різних максимальних правих ідеалів M, N кільця R. Оскільки M і N різні, існують елементи $m \in M$, $n \in N$ такі, що $m+n = 1$. Нехай p - довільний ненульовий елемент P. Оскільки R - адекватне кільце, то $p A m$, де $p = r \cdot s$; r - максимальна взаємно проста з m компонента елемента p. Оскільки елемент P цілком простий і $P \subset M$, то $s \in P$. Нехай $sR + nR = dR$. Оскільки $s \in P \subset N$, то $d \notin U(R)$. Але $dR + mR \supset mR + nR = R$, отже, $dR + mR = R$, що суперечить такому: $p A m$. Отже, теорему доведено.

Означення. Ермітове дуокільце називається узагальнено адекватним, якщо для довільних ненульових елементів кільця один з них адекватний щодо іншого.

Твердження 4. Нехай R - дуокільце Ерміта і $a, b, c \in R$, причому $aR + bR + cR = R$ і $a A c$. Тоді існує елемент $m \in R$ такий, що $Ram + R(bm+c) = R$.

Доведення. Оскільки $a A c$, то $a = r \cdot s$, де r - максимальна взаємно проста з c компонента елемента a; s - максимальна спільна з c компонента елемента a. За аналогією з твердженням I, поклавши $m = r$, дістанемо доведення твердження.

Теорема 9. Праве PP-узагальнено адекватне дуокільце є кільцем елементарних дільників.

Доведення. Згідно з твердженнями I і 4 дана теорема доводиться аналогічно теоремі 4.

Твердження 5. Праве PP-дуокільце скінченнопороджених головних правих ідеалів є правим ермітовим.

Доведення. Нехай R - праве PP-дуокільце скінченнопороджених правих головних ідеалів. Тоді, очевидно, R - півспадкове справа і нехай $a, b \in R$, $aR + bR = dR$. Покладемо $K = \{x \mid dx = 0\}$. Розглянемо точну послідовність $0 \to K \to \to R - dR \to 0$, яка внаслідок проективності ідеалу dR розщеплюється, тобто існує правий ідеал J такий, що $R = K \oplus J$. Звідси $d = k + i$, де $k \in K$, $i \in J$. Згідно з означенням правого ідеалу K і того, що $k \in K$, маємо $dk = 0$. Звідси $0 = dk = (k+i)k = k^2 + ik$, тобто $k^2 = 0$. Оскільки R редуковане, то $k = 0$. Отже, $d \in J$. Оскільки $aR \subset dR \subset J$; $bR \subset dR \subset J$, то $a, b \in J$. Нехай $1 = e + f$, де $e \in K$; $f \in J$. Оскільки $aR + bR = dR$, то $a = da_0$; $b = ab_0$. З рівності $R = K \oplus J$ маємо $a_0 = = k' + a'$, де $k' \in K$; $a' \in J$. Звідси $a = da_0 = dk' + + da'$. Очевидно, $dk' = 0$. Отже, $a = da'$, де $a' \in J$. Аналогічно показується, що існує $b' \in J$ таке, що $b = db'$.

Для деяких m, $n \in R$ маємо $am + bn = d$. Оскільки $R = K \oplus J$, то $m = k' + m'$; $n = e' + n'$, де $k', e' \in K$; $m', n' \in J$. Оскільки R - дуокільце, то $da' = = a''d$, для якого $a'' \in R$. Звідси $am = ak' + am' = = da'k' + am' = a''dk' + am' = 0 + am' = am'$.

Аналогічно $bn = bn'$. Отже, доведено, що $am' + + bn' = d$, $m', n' \in J$. Звідси $da'm' + db'n' = d$, а отже, $d(f - a'm' - b'n') = 0$. Таким чином, $f - a'm' - b'n' \in \in K \cap J = 0$; $a'R + b'R = J$. Покладемо $a_1 = a'$; $b_1 = e + b'$. Тоді $a = da_1$; $db_1 = d(e + b') = de + db' = = db' = b'$.

Очевидно, $a_1R + b_1R = a'R + (e + b')R = a'R + eR + + b'R = R$.

Нехай R - праве квазідуокільце. Множину максимальних правих ідеалів, які містять елемент a, позначимо $M(a)$.

<u>Теорема 10.</u> Нехай R - праве pp-дуокільце Ерміта і для будь-якого необерненого $a \notin J(R)$ множина $M(a)$ не перевищує счисленну. Тоді R - кільце елементарних дільників.

<u>Доведення</u>. На підставі наведених аргументів для доведення теореми достатньо обмежитись матрицями вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

де $aR + bR + cR = R$.

Якщо $a \in J(R)$, то $bR + cR = R$, і, очевидно, тоді матриці A притаманна діагональна редукція. Отже, нехай $a \notin J(R)$. З точністю до еквівалентності матриць можна вважати, що $b \notin M_1$, де M_1 - перший елемент множини $M(a)$. Дійсно, якщо $b \in M_1$, то $b + c \notin M_1$. Тоді матриця

$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b+c & c \end{pmatrix}$ еквівалентна матриці A і на місці /2, 1/ стоїть

елемент, який не належить M_1. Отже, нехай $b \notin M_1$. Тоді $Ra + Rb = Ra_1$. Очевидно, $a_1 \notin M_1$. Отже, матриця A еквівалентна деякій матриці вигляду

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

де $a_1 R + b_1 R + c_1 R = R$; $a_1 \notin M_1$.

Продовжуючи цей процес, отримуємо ланцюг ідеалів

$$aR \subset a_1 R \subset \ldots \subset a_n R \subset,$$

де $a_i \notin M_i$; M_i - i - елемент множини $M(a)$.

Доведемо, що цей ланцюг скінченний. Якщо це не так, то для власного ідеалу $J = \cup a_i R$ існує максимальний правий ідеал M такий, що $J \subset M$. Оскільки $aR \subset J$, то $M \in M(a)$, тобто $M = M_k$. Остання рівність неможлива, оскільки $a_k \notin M_k$. Отже, отримано суперечність. Це доводить, що даний ланцюг скінченний. Таким чином, матриця A еквівалентна матриці A_n, де $a_n \in U(R)$. Очевидно, матриці A_n, а отже, і матриці A притаманна діагональна редукція. Теорему доведено.

Наслідок. Праве PP-квазідуокільце Ерміта, в якому множина максимальних правих ідеалів не перевищує скінченну, є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно дуокільце.

Як наслідки отримуємо такі результати.

Теорема II. Праве півлокальне PP-квазідуокільце Ерміта є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли воно дуокільце.

Твердження 6. Праве ланцюгове кільце Ерміта є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли воно дуокільце.

Список літератури

1. Забавський Б.В., Комарницький М.Я. Дистрибутивні області з елементарними дільниками // Укр.математ.журн., 1990. - Т. 42. - № 7. - С. 1000-1004.

2. Туганбаев А.А. Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца // Успехи математ.наук, 1991. - Т. 46. - Вып. 6. - С. 219-220.

3. Larsen Max. D., Lewis W.J., Shores T.S. Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc, 1974.- V. 187.- N1. - P. 231-248.

4. Gillman L., Henriksen M. Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc., 1956.- 82.- P. 362-365.

7 - 207