УДК 515.12+519.16

М.М.Зарічний

ПРО ТОПОЛОГІЧНО ІНВЕРСНІ ПІВГРУПИ, ГОМЕОМОРФНІ МНОГОВИДАМ

Множина X разом із заданою на ній асоціативною операцією /у подальшому цю операцію записуватимемо як множення/ називається інверсною півгрупою, якщо для кожного $x \in X$ існує единий елемент $y \in X$ такий, що $xyx = x$ і $yxy = y$. При цьому елемент y називається інверсним до x і позначається $y = x^{-1}$. Якщо X - топологічний простір і відображення множення та інверсії $(x \longmapsto x^{-1})$ неперервні, то X називається топологічно інверсною півгрупою [1]. Елемент $e \in X$ називається ідемпотентом, якщо $e^2 = e$; множина всіх ідемпотентів інверсної півгрупи X позначається $E(X)$. Відображення $r: X \longrightarrow E(X)$, $r(x) = xx^{-1}$ є ретракцією.

Нагадаемо, що топологічний простір X називається LC^n-простором $/n = 0, 1, 2, \dots/$, якщо для кожної точки $x \in X$, для кожного околу U точки x існує окіл V точки x, $V \subset U$ такий, що кожне відображення $f: S^i \longrightarrow V$, $0 \leq i \leq n$ має продовження до відображення $\bar{f}: B^{i+1} \longrightarrow U$ /тут S^i - i-вимірна сфера, яка обмежує $(i+1)$-вимірну кулю $B^{i+1} \subseteq \subseteq \mathbb{R}^{i+1}$/.

<u>Лема 1.</u> Нехай X - топологічно інверсна півгрупа і X - компакт. Тоді якщо $E(X) \in LC^0$, то $E(X) \in LC^n$ для кожного $n = 1, 2, \dots$

<u>Доведення</u>. Позначимо $h: B^{i+1} \to exp_3 S^i$, $i \geq 1$ відображення, для якого $h(y) = \{y\}$, якщо $y \in S^i \subset B^{i+1}$ [2]. Тут $exp_3 (S^i)$ позначено множину

$$\{A \subset S^i \mid 1 \leq |A| \leq 3\},$$

наділену метрикою Гауссдорфа

$$d_H(A,B) = \min\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B),\ B \subset O_\varepsilon(A)\},$$

де $O_\varepsilon(A)$ – ε - окіл множини $A \subset S^i$ у деякій фіксованій метриці на S^i.

Для заданого відображення $f: S^i \longrightarrow E(X)$ означимо відображення $\bar{f}: B^{i+1} \longrightarrow E(X)$ формулою

$$\bar{f}(y) = f(z_1) f(z_2) f(z_3),$$

якщо $h(y) = \{z_1, z_2, z_3\} \in exp_3(S^i)$, $y \in B^{i+1}$.
Коректність такого означення відображення $\bar{f}$ легко випливає з таких властивостей інверсних півгруп: кожні два ідемпотенти комутують; добуток ідемпотентів є ідемпотентом [3]. Очевидно, $\bar{f}$ – продовження відображення f. Твердження леми випливає тепер з рівномірної неперервності множення в X.

Нагадаємо, що простір X називається C^n-простором, $n = 0, 1, 2, \ldots$, якщо для кожного відображення $f: S^i \longrightarrow X$, $i \leq n$ існує продовження $\bar{f}: B^{i+1} \longrightarrow X$.

Аналогічно лемі І доводиться таке твердження.

<u>Лема 2</u>. Нехай X – топологічно інверсна півгрупа і X – компакт. Тоді якщо $E(X) \in C^0$, то $E(X) \in C^n$ для кожного $n = 1, 2, \ldots$

<u>Теорема І</u>. Нехай X – зв'язна топологічно інверсна півгрупа, простір якої гомеоморфний замкненому многовиду. Тоді X – топологічна група.

<u>Доведення</u>. Зауважимо, що X – абсолютний з околами ретракт / ANR /, а тому $E(X) \in ANR$ – ретракт простору X. Оскільки згідно з лемою 2 $E(X) \in C^n$ для кожного $n = 1, 2, \ldots$, то $E(X)$ – абсолютний ретракт / AR / і, зокрема, стягуваний простір [4].

Із компактності X випливає, що існує елемент $e_0 \in E(X)$ такий, що $e_0 e = e_0 = e e_0$ для кожного $e \in E(X)$. Нехай $g_t: E(X) \to E(X)$, $t \in [0, 1]$ – гомотопія, яка

7*

з'єднує тотожне відображення $g_0 = id$ зі сталим відображенням g_1 у точку e_1. Означимо гомотопію $g_t' : X \to X$ формулою

$$g_t'(x) = x g_t(r(x)), \quad x \in X.$$

Очевидно, $g_0' = id$. Припускаючи, що $E(X) \neq \{e_0\}$, дістаємо, що $g_1'(X) \neq X$. Але замкнений многовид не може бути деформованим на свою власну підмножину /це легко випливає з гомологічних властивостей многовидів [5]/. Отже, $E(X) = \{e_0\}$, звідки випливає, що X – топологічна група. Теорему доведено.

Зауважимо, що в теоремі I умова "X – замкнений многовид" не може бути ослаблена до умови "X – компактний многовид з краєм" або "X – некомпактний многовид без краю". Справді, нескладно показати, що лист Мебіуса і відкритий лист Мебіуса можуть бути наділені структурою топологічно інверсної півгрупи.

Символом μ_n позначається n-вимірний універсальний компакт Менгера [6]; основи теорії μ_n-многовидів закладені в [7; 8].

<u>Теорема 2</u>. Жодному зв'язному компактному μ_n-многовиду при $n \geq 1$ не притаманна структура топологічно інверсної півгрупи.

<u>Доведення</u>. Припустимо супротивне: нехай існує таке X. Оскільки $X \in LC^{n-1}$, то $E(X) \in LC^{n-1}$ і згідно з лемою I $E(X) \in LC^m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Оскільки $\dim E(X) \leq n$, то $E(X) \in ANR$, а згідно з лемою 2 $E(X) \in AR$. Припускаючи, що $|E(X)| > 1$, і міркуючи так само, як у доведенні теореми I, дістаємо, що існує деформаційна ретракція μ_n-многовиду X на свою власну підмножину Y. Існує вкладення сфери S^n у $X \setminus Y$ і легко побачити, що слід цієї сфери в разі деформаційної ретракції має бути щонайменше $(n+1)$-вимірним. Отримана суперечність завершує доведення теореми.

Зауважимо, що простір μ_0 гомеоморфний топологічній групі $(\mathbb{Z}/2)^\omega$.

На підставі теорем I і 2 постає таке питання: чи кожна зв'язна компактна топологічно інверсна півгрупа, простір якої скінченновивимірний і топологічно однорідний, є топологічною групою? Якщо опустити умову скінченновимірності, то контрприкладом може служити гільбертів куб $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]_i$ з операцією

$$((x_i)_{i=1}^{\infty})((y_i)_{i=1}^{\infty}) = (\min\{x_i, y_i\})_{i=1}^{\infty}$$

/топологічна однорідність Q показана в [9]/.

Список літератури

1. Koch R.J., Wallace A.D. Notes on inverse semigroups // Rev. roumaine math. pures et appl., 1964. - V. 9. - N 1. - P. 19-24.

2. Федорчук В.В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи математ. наук, 1984. - Т. 39. - Вып. 5. - С. 169-208.

3. Клифф А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. I. - М.: Мир, 1972.

4. Борсук К. Теория ретрактов. - М.: Мир, 1971.

5. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. - М.: Мир, 1976.

6. Engelking R. Dimension theory. - Warszawa: PWN.

7. Bestvina M. Characterizing k-dimensional universal Menger compacta // Memoirs of the AMS, 1988. - N 380. - 110 p.

8. Дранишников А.Н. Универсальные менгеровские компакты и универсальные отображения // Математ. сб., 1986. - Т. 129. - № 1. - С. 121-139.

9. Чепмэн Т. Лекции о Q-многообразиях. - М.: Мир, 1981.

УДК 512.64

В.Р.Зеліско

ПРИПУСТИМА ФАКТОРИЗАЦІЯ І ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЕМ МНОГОЧЛЕНІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Основи теорії розкладності многочленних матриць на множники закладені в [1]. Проте в теорії лінійних стаціонарних систем та ін-