мірний і топологічно однорідний, є топологічною групою? Якщо опустити умову скінченновимірності, то контрприкладом може служити гільбертів куб $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]_i$ з операцією

$$((x_i)_{i=1}^{\infty})((y_i)_{i=1}^{\infty}) = (\min\{x_i, y_i\})_{i=1}^{\infty}$$

/топологічна однорідність Q показана в [9]/.

Список літератури

1. Koch R.J., Wallace A.D. Notes on inverse semigroups // Rev. roumaine math. pures et appl., 1964. - V. 9. - N 1. - P. 19-24.
2. Федорчук В.В. О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи математ. наук, 1984. - Т. 39. - Вып. 5. - С. 169-208.
3. Клифф А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. I. - М.: Мир, 1972.
4. Борсук К. Теория ретрактов. - М.: Мир, 1971.
5. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. - М.: Мир, 1976.
6. Engelking R. Dimension theory. - Warszawa: PWN.
7. Bestvina M. Characterizing k-dimensional universal Menger compacta // Memoirs of the AMS, 1988. - N 380. - 110 p.
8. Дранишников А.Н. Универсальные менгеровские компакты и универсальные отображения // Математ. сб., 1986. - Т. 129. - № 1. - С. 121-139.
9. Чепмэн Т. Лекции о Q-многообразиях. - М.: Мир, 1981.

УДК 512.64

В.Р.Зеліско

ПРИПУСТИМА ФАКТОРИЗАЦІЯ І ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЕМ МНОГОЧЛЕНІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Основи теорії розкладності многочленних матриць на множники закладені в [I]. Проте в теорії лінійних стаціонарних систем та інших прикладних задачах безпосередньо використовуються факторизації симетричних матриць над кільцями многочленів з комплексними і дійсними коефіцієнтами [2; 3]. У цьому зв'язку в даній роботі досліджуються питання факторизації симетричних матриць над кільцями многочленів $\mathbb{C}[x]$ і $\mathbb{R}[x]$ з інволюцією. Для зручності збережемо термінологію і позначення, наведені в [I; 2; 4].

Інволюція в комутативному кільці K - це операція ∇ така, що для довільних елементів $a, b \in K$ мають місце рівності

$$(a+b)^\nabla = a^\nabla + b^\nabla, \quad (ab)^\nabla = a^\nabla b^\nabla, \quad ((a^\nabla)^\nabla = a.$$

Як доведено в [2], інволюцію в кільці $\mathbb{C}[x]$ можна визначити такими попарно різними способами:

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum \bar{a}_k (-x)^k; \qquad (\alpha)$$

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum a_k (-x)^k; \qquad (\beta)$$

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum a_k \; x^k. \qquad (\gamma)$$

Для матриці $A(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ інволюція

$$A(x)^\nabla = \| a_{ij}(x) \|^\nabla = \| a_{ji}(x)^\nabla \| .$$

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x)^\nabla = A(x)$.

Основна мета даної роботи - пошук необхідних і достатніх умов для можливості зображення симетричної многочленної матриці у вигляді

$$A(x) = B(x)\, C(x)\, B(x)^\nabla , \qquad /I/$$

де $B(x)$ - регулярна матриця; $C(x) = C(x)^\nabla$ - симетрична матриця, а також побудова самої факторизації /I/.

Важливим є дослідження питання про можливість регуляризації деяких многочленних матриць, а тому розглянемо його докладніше. Многочленну матрицю $A(x)$ називатимемо регулярною, якщо в її запису у вигляді матричного многочлена $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$ старший коефіцієнт A_m - невироджена матриця, тобто $\det A_m \neq 0$. Будемо говорити, що многочленна матриця $A(x)$ регуляризується справа, якщо існує обернена над $\mathbb{C}(x)$ матриця $R(x)$ така, що $A(x)R(x)$ - регулярна матриця.

Щоб визначити умови регуляризації многочленних матриць, скористаємось результатами, наведеними в [1; 4].

Значенням многочленної матриці $G(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_m)^{k_m}$ називають числову матрицю

$$M_{G(x)}(\varphi) = \left\| \begin{matrix} H_1 \\ \vdots \\ H_m \end{matrix} \right\|, \quad H_i = \left\| \begin{matrix} G(\alpha_i) \\ G'(\alpha_i) \\ \dots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{matrix} \right\|,$$

де $G^{(j)}(x)$ - похідні порядку j від матриці $G(x)$; $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,k_i-1}$.

Нехай $\Phi(x)=diag(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$, $G(x)$ - многочленна матриця, рядки якої позначимо $g_1(x),\dots,g_n(x)$. Значенням многочленної матриці $G(x)$ на системі коренів елементів матриці $\Phi(x)$ називається матриця вигляду

$$M_{G(x)}(\Phi) = \left\| \begin{matrix} M_{g_1(x)}(\varphi_1) \\ \dots\dots\dots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n) \end{matrix} \right\|, \qquad /2/$$

де рядки $M_{g_i(x)}(\varphi_i)$ відсутні, якщо φ_i - многочлени нульового степеня.

Наприклад, відомо [5], що для кожної многочленної матриці $A(x)$ існують обернені над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)$ і $Q(x)$ такі, що

$$P(x)A(x)Q(x)=diag(\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_n(x)), \qquad /3/$$

де $\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x)$, $i=\overline{1,n-1}$.

Матрицю $S_A = diag(\mathcal{E}_1(x),\dots,\mathcal{E}_n(x))$ називають канонічною діагональною формою матриці $A(x)$ або її формою Сміта.

З даних, наведених у [I; 4], видно, що многочленна матриця $A(x)$, для якої $\deg \det A(x) = nr$, регуляризується справа тоді і тільки тоді, коли

$$\det M_{P(x)\| E,\ Ex,\dots,Ex^{r-1}\|}(S_A) \neq 0$$

для довільної оберненої матриці $P(x)$ із /3/.

Нехай $A(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} A_i x^i$ – деяка симетрична в розумінні однієї із введених раніше інволюцій у $\mathbb{C}[x]$ многочленна матриця степеня $m \geqslant 2$. Припустимо, що форму Сміта матриці $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$S_A = \Phi(x) D(x) \Phi(x)^{\nabla}, \qquad /4/$$

де $\Phi(x) = diag(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$; $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$; $\sum\limits_{i=1}^{n} \deg \varphi_i = nr$; $D(x) = diag(d_1(x),\dots,d_n(x))$; $d_i(x) \mid d_{i+1}(x)$; $i = \overline{1, n-1}$.

Відомо [2], що умова /4/ виконується тоді, коли кожний інваріантний множник $\mathcal{E}_i(x)$ матриці S_A або не має коренів на множині ∇-нерухомих точок Γ, або має їх, але кратність кожного такого кореня парна. Множина Γ визначена для кожного типу інволюцій. Так, у разі інволюції (α) множина Γ – уявна вісь $Re\, x = 0$, у разі інволюції (β) – це початок координат $x = 0$, а в разі інволюції (γ) – $\Gamma = \mathbb{C}$ – уся комплексна площина.

<u>Означення</u>. Зображення симетричної многочленної матриці у вигляді

$$A(x) = B(x)\, C(x)\, B(x)^{\nabla}, \qquad /5/$$

де $B(x)$ – регулярна матриця степеня $r \geqslant 1$ з формою Сміта $S_B = \Phi(x)$; $C(x) = C(x)^{\nabla}$ – деяка симетрична многочленна матриця з формою Сміта $S_C = D(x)$, називається припустимою факторизацією матриці $A(x)$, паралельною факторизації /4/ її форми Сміта S_A, тобто факторизація /5/ припустима тоді, коли форма Сміта многочленної матриці дорівнює добутку форм Сміта її співмножників.

<u>Теорема 1</u>. Для симетричної многочленної матриці $A(x)$ має місце припустима факторизація /5/, паралельна факторизації /4/ її форми Сміта S_A тоді і тільки тоді, коли

$$\det M_{P(x)\|E,\ Ex,\ldots,\ Ex^{r-1}\|}(\Phi) \neq 0, \qquad /6/$$

де $P(x)$ - довільна матриця із /3/.

<u>Доведення</u>. Необхідність: Якщо для матриці $A(x)$ має місце факторизація /5/, паралельна факторизації /4/ її форми Сміта S_A, то це означає, що матриця $A(x)$ має лівий регулярний множник $B(x)$ степеня r, причому $S_A = S_B\, S_{CB^\nabla}$, а тому згідно з результатами з [4; 6] виконується умова /6/.

Достатність: Нехай для форми Сміта многочленної матриці $A(x)$ має місце факторизація /4/. Тоді

$$A(x) = P^{-1}(x)\,\Phi(x)\,D(x)\,\Phi(x)^\nabla Q^{-1}(x). \qquad /7/$$

Оскільки $P(x)$ і $Q(x)$ - обернені над $\mathbb{C}[x]$ матриці, то існує обернена над $\mathbb{C}[x]$ матриця $S(x)$ така, що $P(x)^\nabla = Q(x)\,S(x)$, а саме: $S(x) = Q^{-1}(x)\,P(x)^\nabla$. Для матриці $S(x)$ існує обернена над $\mathbb{C}[x]$ матриця $H(x)$, така, що

$$H(x)\,\Phi(x)^\nabla = \Phi(x)^\nabla S(x), \qquad /8/$$

причому матриця $H(x)$ не обов'язково многочленна, тобто її елементами можуть бути раціональні функції від x.

Із (7) і (8) дістаємо

$$A(x) = P^{-1}(x)\,\Phi(x)\,D(x)\,H(x)\,\Phi(x)^\nabla (P(x)^\nabla)^{-1}.$$

Звідси, ураховуючи очевидну рівність $(P(x)^{\nabla})^{-1} = P^{-1}(x)^{\nabla}$, дістаємо

$$A(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)D(x)H(x)\Phi(x)^{\nabla}P^{-1}(x)^{\nabla}. \quad /9/$$

Покажемо, що $D(x)H(x)$ - многочленна матриця. Ураховуючи рівність /8/, бачимо, що $D(x)H(x) = \Phi(x)^{\nabla}S(x)(\Phi(x)^{\nabla})^{-1}$. Оскільки $S(x)$ - многочленна матриця і в матриці $\Phi(x)^{\nabla}$ елементи задовольняють умову $\varphi_i(x)^{\nabla} \mid \varphi_{i+1}(x)^{\nabla}$, то в матриці $H' = D(x)H(x)$ при $i \geqslant j$ усі елементи h'_{ij} - многочлени. Із рівності /9/, ураховуючи, що $A(x) = A(x)^{\nabla}$ - симетрична матриця і $\det P^{-1}(x)\Phi(x) \neq 0$, випливає таке: $D(x)H(x)$ - симетрична матриця, а тому елементи матриці $D(x)H(x)$ є многочленами при $i \leqslant j$.

Умова /6/ означає, що матриця $P^{-1}(x)\Phi(x)$ регуляризується справа, тобто існує обернена над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$ така, що $P^{-1}(x)\Phi(x)R(x) = B(x)$ - регулярна многочленна матриця степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$. Тоді з /9/ дістаємо

$$A(x) = B(x)R^{-1}(x)D(x)H(x)R^{-1}(x)^{\nabla}B(x)^{\nabla}. \quad /10/$$

Нехай $R^{-1}(x)D(x)H(x)R^{-1}(x)^{\nabla} = C(x)$. Оскільки $D(x)H(x)$ - симетрична многочленна матриця, то $C(x) = C(x)^{\nabla}$ - многочленна матриця з формою Сміта $D(x)$, тобто доведено існування припустимої факторизації для $A(x)$, паралельної факторизації /4/. Отже, теорему I доведено.

Наслідок I. Нехай $A(x)$ - регулярна симетрична многочленна матриця степеня $m = 2r$, форму Сміта якої можна подати у вигляді

$$S_A = \Phi(x)I\Phi(x)^{\nabla}, \quad /11/$$

де $\Phi(x) = diag(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = \overline{1, n-1}$, $I = diag(\pm 1, \ldots, \pm 1)$.

Для матриці $A(x)$ має місце припустима факторизація

$$A(x)=B(x)\,C\,B(x)^{\nabla},\quad C=C^{\nabla},$$

паралельна факторизації /II/ тоді і тільки тоді, коли виконується умова /6/, де $\Phi(x)$ - матриця з /II/.

Многочленну матрицю $A(x)=\sum_{i=0}^{m} A_i\, x^i$ називають унітальною, якщо $A_m=E$ - одинична матриця. Враховуючи результати з [I; 7], дістаємо таку теорему.

Теорема 2. У припустимій факторизації /5/ многочленної матриці $A(x)$, паралельної факторизації /4/, унітальний множник $B(x)$ єдиний із формою Сміта $\Phi(x)$.

З [I; 4] легко побачити, що за умов теорем I і 2 коефіцієнти многочленної матриці $B(x)=Ex^{r}-B_1x^{r-1}-\ldots-B_r$ можна знайти за формулою

$$\left\|\begin{matrix} B_r\\ \vdots\\ B_1\end{matrix}\right\| = \left(M_{P(x)\|E,\,Ex,\ldots,\,Ex^{r-1}\|}^{(\Phi)}\right)^{-1} M_{P(x)x^{r}}^{(\Phi)}. \qquad /12/$$

Зауважимо, що коли $A(x)$ - дійсна симетрична многочленна матриця, для якої інволюції (α) і (β), очевидно, збігаються, то, враховуючи результати, наведені в [4], бачимо, що коли у факторизації /4/ всі елементи з $\mathbb{R}[x]$, то умова /6/ є необхідною і достатньою умовою факторизації /5/, де

$$B(x),\ C(x)\in M_n(\mathbb{R}[x]).$$

Наслідок 2. Із теорем I і 2 при $r=1$ на підставі узагальненої теореми Безу [5] дістанемо необхідні й достатні умови існування розв'язку матричного рівняння

$$X^{m}A_m+X^{m-1}A_{m-1}+\ldots+XA_1+A_0=0 \qquad /13/$$

у таких випадках: I/ усі матриці A_{2k} ермітові, а всі A_{2k+1} - антиермітові, що відповідає інволюції (α) матриці $A(x)$;

8*

2/ усі матриці A_{2k} симетричні, а всі A_{2k+1} - кососиметричні /інволюція (β) /; 3/ усі матриці симетричні /інволюція (γ) /.

Матриця $X = B$, яка є розв'язком рівняння /13/, єдина із жордановою формою, що визначається діагональним дільником $\Phi(x)$ форми Сміта, яка відповідає рівнянню /13/ многочленної матриці $A(x)$. Щоб знайти цей розв'язок, можна використати формулу /12/ при $\tau = 1$. Зауважимо, що коли B - розв'язок рівняння /13/, то матриця B^{∇} - розв'язок рівняння

$$A_m X^m + A_{m-1} X^{m-1} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0$$

за таких самих умов, що накладені на коефіцієнти A_i.

Покажемо, що для регулярних симетричних многочленних матриць узагальнюються результати робіт [5; 8], які стосуються строгої еквівалентності та конгруентності матриць. Нехай $A(x)$ і $B(x)$ - регулярні многочленні матриці степеня m. Якщо для $A(x)$ і $B(x)$ існують обернені над $\mathbb{C}$ матриці P і Q, тобто $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$, такі, що $B(x) = PA(x)Q$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються строго еквівалентними. Якщо ж для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існує обернена над $\mathbb{C}$ матриця T така, що $B(x) = T^{\nabla} A(x) T$, де ∇ - інволюція в кільці $\mathbb{C}(x)$, задана одним із розглянутих раніше трьох способів, то многочленні матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються конгруентними. Очевидно, що кожна пара конгруентних матриць є парою строго еквівалентних матриць. Обернене твердження неправильне, але має місце такий результат.

<u>Теорема 3</u>. Якщо регулярні симетричні многочленні матриці $A(x)$ і $B(x)$ строго еквівалентні, то вони конгруентні.

<u>Доведення</u>. Нехай має місце рівність

$$B(x) = PA(x)Q \qquad /14/$$

за деяких $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$; $B(x)^{\nabla} = B(x)$ та $A(x)^{\nabla} = A(x)$.

Тоді $B(x)^{\nabla} = Q^{\nabla} A(x)^{\nabla} P^{\nabla}$ і, враховуючи симетричність матриць $A(x)$, $B(x)$, дістаємо

$$B(x) = Q^{\nabla} A(x) P^{\nabla}. \qquad /15/$$

Із /14/ і /15/ знаходимо

$$A(x) Q P^{\nabla -1} = P^{-1} Q^{\nabla} A(x). \qquad /16/$$

Позначивши U матрицю $QP^{\nabla -1}$, рівність /16/ запишемо так:

$$A(x) U = U^{\nabla} A(x). \qquad /17/$$

Із рівності /17/ дістаємо:

$$A(x) U^{k} = (U^{\nabla})^{k} A(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже,

$$A(x) S = S^{\nabla} A(x), \qquad /18/$$

де $S = f(U)$: $f(x)$ - довільний многочлен із $\mathbb{C}[x]$.

Виберемо $f(x)$ так, щоб $\det S \neq 0$. Тоді з /18/ знайдемо

$$A(x) = S^{\nabla} A(x) S^{-1}. \qquad /19/$$

Підставляючи /19/ у /14/, дістаємо

$$B(x) = P S^{\nabla} A(x) S^{-1} Q. \qquad /20/$$

Співвідношення /20/ буде перетворенням конгруентності, якщо $(PS^{\nabla})^{\nabla} = S^{-1}Q$, тобто $SP^{\nabla} = S^{-1}Q$. Звідси $S^{2} = QP^{\nabla -1}$, тобто $S^{2} = U$. Із [5; 8] відомо, що матриця $S = f(U)$ буде задовольняти це рівняння, якщо $f(x)$ - інтерполяційний многочлен для функції $\sqrt{x}$ на спектрі матриці U, причому, оскільки $\det S \neq 0$, а тому і $\det U \neq 0$, то такий $f(x)$ існує. Отже, нехай $T = S^{-1}Q = \sqrt{P^{\nabla}Q^{-1}}\,Q = \sqrt{P^{\nabla}Q}$. Тоді $B(x) = T^{\nabla} A(x) T$. Теорему 3 доведено.

Список літератури

1. Казимирський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук.думка, 1981. – 224 с.

2. Любачевский Б.Д. Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. Ч. I // Сибирск.математ.журн., 1973. – XIУ. – № 2. – С. 337-356.

3. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, 1970.

4. Щедрик В.П. Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена // Укр.математ.журн., 1987. – 39. – № 3. – С. 370-373.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.

6. Казимирський П.С., Зеліско В.Р. Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – К.: Наук.думка, 1977. – С. 52-61.

7. Зеліско В.Р. Єдиність унітальних дільників матричного многочлена // Вісн.Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат., 1988. – Вип. 30. – С. 36-38.

8. Икрамов Х.Д. Матричные пучки: Теория, приложения, численные методы // Итоги науки и техники. Сер. математ.анализ. – М., 1991. – 29. – С. 3-106.

УДК 515.12

Р.Є.Кокорузь, Є.Я.Пенцак

ПРО ГЛАДКІ СТРУКТУРИ НА $\mathbb{R}^\infty$-МНОГОВИДАХ

Символом $\mathbb{R}^\infty$ позначається пряма межа послідовності

$$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \to \ldots,$$

де вкладення $i_n: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ діє за формулою $i_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0)$. У даному разі ототожнюємо $\mathbb{R}^\infty$ з множиною фінітних послідовностей $\{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i = 0$ для всіх i, крім скінченного числа$\}$; при цьому $\mathbb{R}^n$ ототожнюємо з підмножиною $\{(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0 \ldots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$.