Список літератури

I. Казимирський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук.думка, 1981. – 224 с.

2. Любачевский Б.Д. Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. Ч. I // Сибирск.математ.журн., 1973. – XIУ. – № 2. – С. 337–356.

3. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, 1970.

4. Щедрик В.П. Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена // Укр.математ.журн., 1987. – 39. – № 3. – С. 370–373.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988.

6. Казимирський П.С., Зелiско В.Р. Про видiлення з полiномiальної матрицi регулярного множника з наперед заданою формою Смiта // Теоретичнi та прикладнi питання алгебри i диференцiальних рiвнянь. – К.: Наук.думка, 1977. – С. 52–61.

7. Зелiско В.Р. Єдинiсть унiтальних дiльникiв матричного многочлена // Вiсн.Львiв.ун-ту. Сер.мех.-мат., 1988. – Вип. 30. – С. 36–38.

8. Икрамов Х.Д. Матричные пучки: Теория, приложения, численные методы // Итоги науки и техники. Сер. математ.анализ. – М., 1991. – 29. – С. 3–106.

УДК 515.12

Р.Є.Кокорузь, Є.Я.Пенцак

ПРО ГЛАДКІ СТРУКТУРИ НА $\mathbb{R}^\infty$-МНОГОВИДАХ

Символом $\mathbb{R}^\infty$ позначається пряма межа послідовності

$$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \to \dots,$$

де вкладення $i_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ діє за формулою $i_n(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n,0)$. У даному разі ототожнюємо $\mathbb{R}^\infty$ з множиною фінітних послідовностей $\{(x_1, x_2,\dots) \mid x_i = 0$ для всіх i, крім скінченного числа$\}$; при цьому $\mathbb{R}^n$ ототожнюємо з підмножиною $\{(x_1,\dots,x_n,0,\dots,0\dots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$.

Сепарабельний паракомпактний простір X називається $\mathbb{R}^\infty$-многовидом, якщо його точка має окіл, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^\infty$. Топологічні властивості $\mathbb{R}^\infty$-многовидів досліджувались, зокрема, в [1; 2]. У [3] Сакаї розглянув кусково-лінійну структуру на $\mathbb{R}^\infty$-многовидах.

Один із способів уведення гладкої структури на $\mathbb{R}^\infty$-многовиді запропоновано Ремпалом [4].

Означення [4]. Многовидом із фільтрацією /фільтр-многовидом/ називається топологічний простір M_∞ разом з відокремленою послідовністю підпросторів $\{M_i\}_{i\geq 0}$ такою:

/1/ що M_i - гладкий замкнений скінченновимірний многовид;

/2/ M_i - гладкий замкнений підмноговиду M_{i+1};

/3/ $M_\infty = \varinjlim \{M_i, j_i\}$, де $j_i : M_i \to M_{i+1}$ -включення.

Для фільтра-многовиду M_∞ використовується запис $M_\infty = \varinjlim M_i$.

Відображення $f: N_\infty \to N_\infty$ фільтр-многовидів називається гладким, якщо для кожного $i \geq 0$ існує $\alpha(i) \geq 0$ таке, що $f(M_i) \subset N_{\alpha(i)}$ і відображення $f_i = f|M_i : M_i \to N_{\alpha(i)}$ гладке.

У подальшому вважатимемо, що послідовність $\{dim(N_i)\}$ строго монотонно зростає. У цьому разі з [4, лема 2] випливає, що M_∞ - $\mathbb{R}^\infty$- многовид.

Твердження 1. На кожному $\mathbb{R}^\infty$-многовиді існує структура фільтра-многовиду.

Доведення. Кожний $\mathbb{R}^\infty$-многовид M припускає відкрите вкладення $f: M \to \mathbb{R}^\infty$ [1]. Існує послідовність компактних підмножин $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ у M, для якої $f(K_i) \subset \mathbb{R}^i \subset \mathbb{R}^\infty$; $M = \cup \{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Індукцією за i легко побудувати послідовність замкнених гладких підмноговидів $N_i \subset f(M) \cap \mathbb{R}^{i+1}$, для яких $f(K_i) \subset N_i \subset N_{i+1}$. Тоді $(f^{-1}(N_i))$ - фільтрація для M.

Результат, наведений далі, можна розглядати як обернений до сформульованого твердження.

Теорема I. Нехай $M = \underrightarrow{\lim} M_i$ - фільтр-многовид. Тоді існує гладке відкрите вкладення $j: M \to R^\infty$.

Доведення. Нехай $i_1 = 1$. Згідно з теоремою Уітні про вкладення [5] існує вкладення $j_1: M_{i_1} \to R^{k_1}$, де $k_1 = 2 \dim \times M_{i_1} + 1$. Оскільки образ $j_1(M_{i_1})$ - гладкий підмноговид у R^{k_1}, то згідно з теоремою про трубчастий окіл [5] існує компактний трубчастий окіл U_{k_1} підмноговиду $j_1(M_{i_1})$, локально тривіально розшарований над $j_1(M_{i_1})$ відображенням $p: U_{k_1} \to j_1(M_{i_1})$. Існує скінченне відкрите покриття $\{W_1, \ldots, W_\ell\}$ підмноговиду $j_1(M_{i_1})$ стягуваними відкритими в $j_1(M_{i_1})$ множинами, над якими розшарування p тривіальне. Нехай $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ - гладке розбиття одиниці на $j_1(M_{i_1})$, для якого $supp(\alpha_i) \subset W_i$. Ототожнюємо p з розшаруванням одиничних куль над $j_1(M_{i_1})$.

Існує скінченна послідовність $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_\ell$; $\beta_1 > i_1 = \beta_0$, для якої $\dim M_{\beta_{q+1}} - \dim M_{\beta_q} \geq k_1 - \dim M_{i_1}$, $0 \leq q \leq \ell - 1$.

Нехай V_q - трубчастий окіл підмноговиду M_{β_q} в $M_{\beta_{q+1}}$, $0 \leq q \leq \ell - 1$; $s_q: V_q \to M_{\beta_q}$ - відповідне розшарування, яке трактуємо як векторне. Для кожного q, $0 \leq q \leq \ell - 1$ зафіксуємо гладке пошарове лінійне вкладення h_ℓ множини $p^{-1}(W_{\ell+1})$ в $s_\ell^{-1}(j_1^{-1}(W_{\ell+1}))$, для якого $h_\ell(p^{-1}(W_{\ell+1})) \subset V_\ell \setminus V_{\ell-1}$ при $\ell \geq 1$. Нарешті, відображення $m_1: U_{i_1} \to V_\ell \subset M_{\beta_\ell}$ задамо формулою $m_1(x) = \sum_{i=1}^{\ell} h_{\ell-1} \alpha_\ell(x)$, $x \in U_{i_1}$.

Легко переконатись, що відображення m_1 - гладке вкладення. Нехай $M_{i_2} = M_{\beta_\ell}$. Легко побачити, що існує гладке вкладення $j_2: M_{i_2} \to R^{k_2}$, де $k_2 > k_1$, і комутативна діаграма

$$
\begin{tikzcd}
M_{i_1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_1"'] & M_{i_2} \arrow[d, "j_2"] \\
\mathbb{R}^{k_1} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "m_1"] & \mathbb{R}^{k_2}
\end{tikzcd}
$$

Продовжуючи побудову, дістаємо комутативну діаграму

$$
\begin{tikzcd}
M_{i_1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_1"'] & M_{i_2} \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_2"] & M_{i_3} \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_3"] & \dots \\
U_{i_1} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "m_1"] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & U_{i_2} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "m_2"] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & U_{i_3} \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & \dots \\
\mathbb{R}^{k_1} \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^{k_2} \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^{k_3} \arrow[r, hook] & \dots
\end{tikzcd}
$$

Тут U_{i_p} - околи підмноговидів $j_p(M_{i_p})$, $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$

Звідси дістаємо, що відображення $j = \varinjlim j_p$ гладко вкладає $M = \varinjlim \{M_{i_p}\}$ в $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \{\mathbb{R}^{k_p}\}$. Крім того, $j(M) = \varinjlim \{U_{i_p}\}$ - відкрита підмножина в $\mathbb{R}^\infty$. Отже, теорему I доведено.

Теорема 2. Нехай $M = \varinjlim M_i$ - фільтр-многовид. Тоді існує гладке замкнене вкладення $j : M \to \mathbb{R}^\infty$.

Доведення. Згідно з теоремою I можна вважати, що $M \subset \mathbb{R}^\infty$ - відкрита множина. Нехай $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ - послідовність компактів така, що $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$; $K_i \subset M_i$. Існує гладке відображення $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ таке, що $\varphi_i | K_i \equiv 0$, $\varphi_i(x) > 0$, якщо $x \in M_i \setminus K_i$. Означимо відображення $\varphi : M \to \mathbb{R}^\infty$ формулою $\varphi(x_1, x_2, \dots) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1, x_2), \dots)$, $(x_1, x_2, \dots) \in M$. Відображення φ означене коректно, оскільки для кожного $x \in M$ існує $i \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in K_i$, а тому $\varphi_j(x) = 0$ для всіх $j \geq i$ і $\varphi(x) \in \mathbb{R}^\infty$. Крім того, кожна множина $\varphi(M) \cap \mathbb{R}^i = \varphi_1(K_{i+1} \cap M_1) \times \varphi_2(K_{i+1} \cap M_2) \times \ldots \times \varphi_i(K_{i+1} \cap M_i) \subseteq \mathbb{R}^i$ компактна.

Означимо відображення $\psi: M \to \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \cong \mathbb{R}^\infty$ формулою $\psi(x) = (x, \varphi(x))$, $x \in M$. Оскільки відображення φ замкнене і власне /тобто прообраз компакту при відображенні φ є компактом/, то відображення ψ – замкнене вкладення.

Теорема 3. Нехай $f: M \to N$ – гомотопійна еквівалентність фільтр-многовидів. Тоді відображення f гомотопне дифеоморфізму.

Доведення. Нехай $M = \varinjlim M_i$, $N = \varinjlim N_j$ – фільтровані многовиди. Покладемо $m_1 = 1$ і, як у доведенні теореми I, знайдемо $n_1 \in \mathbb{N}$ і вкладення $f_1: M_{m_1} \to N_{n_1}$, для яких $f(M_{m_1}) \subset N_{n_1}$ і відображення $f | M_{m_1}$ і f_1 гомотопні так само, як відображення в N_{n_1}. Позначаючи $g: N \to M$ гомотопійно обернене до f відображення, дістаємо, що існує гладке вкладення $g_1: N_{n_1} \to M_{m_2}$ за деякого $m_2 > m_1$, для якого виконано такі умови: відображення g_1, $g | N_{n_1}$ гомотопні як відображення в M_{m_2} і $g | f(M_{m_1}) = f^{-1} | f(M_{m_1})$.

Продовжуючи цей процес, знаходимо комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
M_{m_1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_1"] & M_{m_2} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_2"] & M_{m_3} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_3"] & \ldots \\
N_{n_1} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "g_1"] & N_{n_2} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "g_2"] & N_{n_3} \arrow[r, hook] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Звідси випливає, що відображення $f' = \varinjlim \{f_i\}: \varinjlim \{M_{m_i}\} = M \to N = \varinjlim \{N_{n_i}\}$ є дифеоморфізмом з оберненим $g' = \varinjlim \{g_i\}$. Гомотопність відображень f і f' випливає з результатів, наведених у [6]. Отже, теорему доведено.

Наслідок I. На кожному фільтр-многовиді гладка структура єдина з точністю до дифеоморфізму.

Наслідок 2 /стабільність/. Кожний фільтр-многовид M дифеоморфний фільтр-многовиду $M \times \mathbb{R}^\infty$.

Список літератури

1. Sakai K. On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds // Topol. Appl., 1984.-V. 18.-N1.-P. 69-80.

2. Sakai K. On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds II // Infinite deficiency // Tsukuba J. Math., 1984.-V. 8.-N1-P. 101-118.

3. Sakai K. Each $\mathbb{R}^\infty$-manifold has a unique piecewise linear $\mathbb{R}^\infty$-structure // Proc. Amer. Math. Soc., 1984.-V. 90.-N4.-P. 616-618.

4. Rempała J.A. On a class of infinite-dimensional manifolds // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. sci. math., astr. et phys., 1974.-V. 22.-N5.-P. 533-537.

5. Хирш М. Дифференциальная топология. - М.: Мир, 1979. - 280 с.

6. Hansen V.L. Some theorem on direct limits of expanding sequences of manifolds // Math. Scandinavica, 1971.-V. 29.-N1.-P. 5-36.

УДК 515.12

О.Р.Никифорчин

ПРИРОДНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУНКТОРА ЙМОВІРНІСНИХ МІР НА ОПУКЛИХ КОМПАКТАХ ТА БЛИЗЬКІ ПИТАННЯ

Нагадаємо конструкцію функтора ймовірнісних мір на категорії компактів $Comp$ /детальніше див. [1]/. Позначимо PX простір додатно визначених нормованих лінійних функціоналів на банаховому просторі $C(X)$ неперервних функцій на компакті X, наділений $*$ - слабкою топологією. За теоремою Ріса [2] елементи простору