Наслідок 2 /стабільність/. Кожний фільтр-многовид M дифеоморфний фільтр-многовиду $M \times \mathbb{R}^{\infty}$.

Список літератури

1. Sakai K. On $\mathbb{R}^{\infty}$-manifolds and Q^{∞}-manifolds // Topol. Appl., 1984.- V. 18. - N1. - P. 69-80.

2. Sakai K. On $\mathbb{R}^{\infty}$-manifolds and Q^{∞}-manifolds II // Infinite deficiency // Tsukuba J. Math., 1984. - V. 8. - N1 - P. 101-118.

3. Sakai K. Each $\mathbb{R}^{\infty}$-manifold has a unique piecewise linear $\mathbb{R}^{\infty}$-structure // Proc. Amer. Math. Soc., 1984. - V. 90. - N4. - P. 616-618.

4. Rempała J.A. On a class of infinite-dimensional manifolds // Bull. Acad. Pol. sci. Ser. sci. math., astr. et phys., 1974. - V. 22. - N5. - P. 533-537.

5. Хирш М. Дифференциальная топология. - М.: Мир, 1979. - 280 с.

6. Hansen V. L. Some theorem on direct limits of expanding sequences of manifolds // Math. Scandinavica, 1971. - V. 29. - N1. - P. 5-36.

УДК 515.12

О.Р.Никифорчин

ПРИРОДНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУНКТОРА ЙМОВІРНІСНИХ МІР НА ОПУКЛИХ КОМПАКТАХ ТА БЛИЗЬКІ ПИТАННЯ

Нагадаємо конструкцію функтора ймовірнісних мір на категорії компактів $Comp$ /детальніше див. [1]/. Позначимо PX простір додатно визначених нормованих лінійних функціоналів на банаховому просторі $C(X)$ неперервних функцій на компакті X, наділений $*$ - слабкою топологією. За теоремою Ріса [2] елементи простору

PX ототожнюються з імовірнісними мірами на X. Для відображення $f: X \to Y$ відображення $Pf: PX \to PY$ задається так: $Pf(m)(\varphi) = m(\varphi \circ f)$, $m \in PX$, $\varphi \in C(Y)$. Легко побачити, що P - функтор у категорії $Comp$.

Позначимо P_{Conv} звуження функтора P на категорію $Conv$, об'єктами якої є опуклі компакти, а морфізмами - афінні неперервні відображення. Надалі P_{Conv} розглядається як функтор з $Conv$ у $Comp$.

Для кожного $x \in X$ позначимо δ_x міру Дірака, зосереджену в точці x: $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$. Відображення $\eta_X : X \to PX$, $\eta_X(x) = \delta_x$, $x \in X$ є вкладенням.

Для кожного X позначимо P^2X простір PPX. Відображення $\psi_X : P^2X \to PX$ означимо формулою $\psi_X(\mu)(\varphi) = \mu(\bar{\varphi})$, $\varphi \in C(X)$, $\mu \in P^2X$, де $\bar{\varphi} \in C(PX)$ - функція, для якої $\bar{\varphi}(m) = m(\varphi)$, $m \in PX$.

Відображення η_X та ψ_X є компонентами природних перетворень: $\eta: Id \to P$, $\psi: P^2 \to P$, $\eta_{Conv}: I_{Conv} \to P_{Conv}$, де I_{Conv} - "забуваючий" функтор з $Conv$ у $Comp$.

У [3] показано, що η і ψ - єдині природні перетворення відповідно з Id у P та з P^2 у P. У даній праці побудовані сім'ї природних перетворень з P_{Conv} у себе, параметризовані деякими топологічними просторами, чим одночасно розв'язано питання про нетривіальні природні перетворення з P^2 у себе. Показано, що поряд із стандартною опуклою структурою просторам PX /де X - опуклий компакт/ притаманна додаткова структура C-опуклості.

§ I. Допоміжні результати

Зауважимо, що базу $*$-слабкої топології в просторі PX утворюють множини вигляду $O\langle m, f_1, \ldots, f_k, \varepsilon\rangle = \{m' \in PX \mid |m'(f_i) - m(f_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}$, де $m = PX$, $f_1, \ldots, f_k \in C(X)$, $\varepsilon > 0$. Простір PX є підпростором простору M^+X додатно означених функціоналів на $C(X)$, які називатимемо просто мірами. База $*$-слабкої топології на M^+X має такий самий вигляд. Якщо в подальшому розглядатимуться неймовірнісні міри, це буде обумовлено особливо. Позначимо $\|m\| = m(1_X)$, $m \in M^+X$. Наведена далі лема легко випливає з відомих результатів [4].

Лема I.I. Нехай A – всюди щільна підмножина компакта X і задане відображення $f: A \to PY$ для деякого компакта Y. Для існування й єдиності неперервного продовження $f: X \to PY$ відображення f необхідно і достатньо, щоб для довільної функції $\varphi \in C(Y)$ і довільних $\varepsilon > 0$, $x \in X$ існував окіл $O_{\varepsilon,x}$ точки x такий, що $|f(x_1)(\varphi) - f(x_2)(\varphi)| < \varepsilon$ для кожних $x_1, x_2 \in O_{\varepsilon,x} \cap A$.

Лема I.2. Нехай $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ – послідовність неперервних відображень з компакта X у PY /де Y – компакт/ і A – всюди щільна підмножина в X. Якщо для кожного $\varphi \in C(Y)$ послідовність $\{f_i(x)(\varphi)\}$ збігається рівномірно за $x \in A$ до деякого $f(x)(\varphi)$ /$f: A \to PY$ – відображення/, то існує неперервне продовження $\bar{f}: X \to PY$ відображення f таке, що послідовність $\{f_i(x)(\varphi)\}$ збігається рівномірно за $x \in X$ до $\bar{f}(x)(\varphi)$ для кожного $\varphi \in C(Y)$.

Доведення очевидне.

Означення I.I. Вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ назвемо зрівноваженим, якщо $x_1 + \dots + x_n = 0$. На підпросторі зрівноважених векторів $L_n \subset \mathbb{R}^n$ розглядаємо норму $\|x\| = \max\{|x_i| \mid 1 \le i \le n\}$. Зрівноважений вектор x назвемо симетричним, якщо вектор $-x$ можна отримати з x деякою перестановкою координат.

Лема I.3. Для кожного зрівноваженого вектора $a \in L_n$, $n \geqslant 2$ існує не більше від $2n-3$ симетричних векторів $a_1, \dots, a_k$ таких, що виконується таке: $\|a\| = \|a_1\| + \dots + \|a_k\|$, $a = a_1 + \dots + a_k$.

Доведення. Для $n=2$ або $a=0$ твердження очевидне, тому в подальшому вважатимемо, що $n \geqslant 3$, $a \neq 0$. Нехай $a=(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$. Позначимо p /відповідно q/ число координат, які дорівнюють $\|a\|$ /відповідно $-\|a\|$/, і нехай ці координати розташовані на місцях $i_1, \ldots, i_p$ /відповідно $j_1, \ldots, j_q$/. Розглянемо два випадки.

I. Нехай $p=q$. Покладемо $c_1 = max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$;

$c_2 = max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n,\ x_i < c_1\}$; $c_3 = min\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$;

$c_4 = min\{x_i \mid 1 \leq i \leq n,\ x_i > c_3\}$; $c = min\{c_1 - c_2,\ c_4 - c_3\}$.

Нехай a_1 – вектор, в якого координати з номерами $i_1, \ldots$ $\ldots, i_p$ дорівнюють c, а координати з номерами $j_1, \ldots, j_p$ дорівнюють $-c$, решта координат нульові. Тоді вектор a_1 симетричний і маємо $a = \|a_1\| + \|a_1'\|$, де $a_3' = a - a_1$.

2. Нехай $p \neq q$. Припустимо для визначеності, що $p > q$. Очевидно, що число від'ємних координат вектора a, які не дорівнюють $-\|a\|$, перевищує $p-q$. Виберемо з них $p-q$, менші за модулем, припустимо, на місцях з номерами $j_{q+1}, \ldots, j_p$. Означимо c_1, c_2, c_3, c_4. Як у випадку I, покладемо $c_5 =$ $= max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n,\ x_i < 0\}$, $c = min\{c_1 - max\{c_2, 0\},\ min\{c_4, 0\} -$ $- c_3, -c_5\}$. Тоді $c \neq 0$ і вектор a_1, означений так само, як у випадку I, симетричний і $\|a\| = \|a_1\| + \|a_1'\|$, де $a_1' = a - a_1$.

В обох випадках число нульових координат, а також число координат, які дорівнюють за модулем нормі вектора, для вектора a_1' не менші за відповідні числа для вектора a, причому хоча б одне з них більше.

Виконуючи аналогічні міркування, дістаємо $a_1' = a_2 + a_2'$, $a_2' = a_3 + a_3'$ і т.д. Враховуючи виконані зауваження, отримуємо твердження леми.

Лема I.4. Нехай $a = (x_1, \ldots, x_n)$ – зрівноважений вектор; $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – невід'ємні числа такі, що $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Утворимо зрівноважений вектор $\bar{a}$ за формулою $\bar{x}_{\ell_1 + (\ell_2 - 1)\cdot n + \ldots + (\ell_k - 1)n^{k-1}} = \lambda_1 x_{\ell_1} + \ldots + \lambda_k x_{\ell_k}$, де $1 \leq \ell_1, \ldots, \ell_k \leq n$. Зауваження: із симетричності a випливає симетричність $\bar{a}$.

Для довільного зрівноваженого вектора a і чисел $\lambda_1, \ldots$
$\ldots, \lambda_k \geq 0, \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ середнє арифметичне модулів координат вектора $\bar{a}$ не перевищує норми вектора a, помноженої на $\sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2}$.

Доведення. На підставі леми І.3 це досить довести лише для симетричного вектора a. Користуючись відомим співвідношенням між середнім арифметичним та середнім квадратичним, необхідне твердження можна вивести з нерівності

$$\sqrt{\frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n^k} \bar{x}_i^2} \leq \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Згідно з даним означенням

$$\sqrt{\frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n^k} \bar{x}_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n^k} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} (\lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_k x_{i_k})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^k} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} (\lambda_1^2 x_{i_1}^2 + \ldots + \lambda_k^2 x_{i_k}^2)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2}.$$

Друга рівність випливає із симетричності вектора a. Отже, лему доведено.

Лема І.5. Кожний многочлен від n змінних $x_1, \ldots, x_n$, $n \in N$ може бути поданий у вигляді суми скінченного числа многочленів однієї змінної, аргументами яких є лінійні комбінації змінних $x_1, \ldots, x_n$.

Доведення. Позначимо A множину многочленів, які можуть бути подані так. Очевидно, A містить усі константи й одночлени $x_1, \ldots, x_n$. Якщо $f_1, f_2 \in A$, то випливають такі властивості: І/ $f_1 + f_2 \in A$; 2/ $f_1 f_2 = A$. Властивість І очевидна. Доведемо властивість 2. Для цього досить показати, що для довільних $k, \ell \in N$ маємо $x_1^k x_2^\ell \in A$. Але $x_1^k x_2^\ell =$
$= x_1^{k+\ell} t^\ell$, де $t = \frac{x_2}{x_1}$. Система функцій $t^{k+\ell}$,
$(t+1)^{k+\ell}, \ldots, (t+k+\ell)^{k+\ell}$ є базою в лінійному просторі многочленів від змінної t степеня $k+\ell$. Отже,

$$t^2 = \sum_{i=0}^{k+l} a_i (t+i)^{k+l};$$

$$x_1^k x_2^l = x_1^{k+l} \sum_{i=0}^{k+l} a_i \left(\frac{x_2}{x_1}+i\right)^{k+l} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+l} a_i (x_2 + i x_1)^{k+l}.$$

Звідси випливає, що добуток двох многочленів від змінних $x_1, \dots, x_n$, а отже, і від лінійних комбінацій змінних $x_1, \dots, x_n$ є сумою многочленів від деяких інших лінійних комбінацій. Отже, A збігається з усім кільцем многочленів від змінних $x_1, \dots, x_n$.

Наслідок. Множина A всюди щільна в $C(I^n)$ -просторі неперервних функцій на n-вимірному декартовому кубі I^n.

Лема I.6. Для довільного опуклого компакта X - множина функцій, що є скінченною сумою многочленів однієї змінної від неперервних на X афінних функціоналів із значеннями в I, всюди щільна в $C(X)$.

Доведення. Множина функцій, що залежать від скінченного числа координат, всюди щільна в $C(I^\tau)$, де I^τ - довільний тихонівський куб. Довільний опуклий компакт X афінно вкладається в деякий куб I^τ і згідно з теоремою Брауера - Тітце - Урисона кожна неперервна на X функція продовжується до деякої функції, неперервної на I^τ /детальніше див. [I, с. I6-I7; 5, с. 63-72]/. Об'єднання цих фактів з наслідком леми I.5 закінчує доведення.

Лема I.7. Нехай X - опуклий компакт; $\mathcal{T}$ - сукупність неперервних афінних функціоналів з X у I. Кожна міра $m \in PX$ однозначно визначається сукупністю $(m' \in PI \mid m' = Pl(m), l \in \mathcal{T})$.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ довільне. Для довільної $f \in C(X)$ згідно з лемою I.6 існують многочлени $p_1, \dots, p_k$ і лінійні неперервні функціонали $l_1, \dots, l_k$, $k \in \mathbb{N}$ такі, що

$$\| f - \sum_{i=1}^{k} p_i(l_i) \| < \varepsilon. \text{ Тоді } | m(f) - \sum_{i=1}^{k} m(p_i(l_i)) | < \varepsilon.$$

Але $m(p_i(l_i)) = Pl_i(m)(p_i)$ відоме для довільних l_i, p_i. Отже, $m(f)$ визначається з довільною точністю, що закінчує доведення.

Означення I.2. Відомо, що кожна міра $m \in PI$ однозначно визначається функцією $\Phi: \mathbb{R} \to I$, $\Phi(y) = m(\{x \in]-\infty, y] \cap I\})$.

Нехай X – опуклий компакт; $e: X \to I$ – афінний неперервний функціонал. Задамо функцію розподілу міри $m \in PX$ формулою $\Phi_{e,m}(y) = m(\{x \in X \mid e(x) \leq y\})$.

Лема I.8. Кожна міра $m \in PX$, де X – опуклий компакт, однозначно визначається сукупністю функцій розподілу.

Доведення очевидне.

Зауваження. Леми I.7 і I.8 без змін переносяться на випадок $m \in M^+X$.

Докладніше поняття носія міри, характеристичної та квазіхарактеристичної функції, властивостей регулярності міри та інші розглянуто в [I].

Означення I.3. Нехай $m \in M^+X$, F – замкнена множина в компакті X, $C_+(X) = \{f \in C(X) \mid f(x) \geq 0,\ x \in X\}$.

Позначимо $m|_F$ функціонал на $C_+(X)$, заданий формулою

$$m|_F(f) = \inf_{\psi \in X(F)} m(\psi f), \quad f \in C_+(X).$$

Продовжимо цей функціонал на $C(X)$, поклавши $m|_F(f_1 - f_2) = m|_F(f_1) - m|_F(f_2)$.

Твердження I.I.

I. Дане означення є повним і коректним.

2. Для довільних $f_1, f_2 \in C(X)$, $C_1 C_2 \in \mathbb{R}$ маємо

$$m|_F(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 m|_F(f_1) + C_2 m|_F(f_2).$$

3. Для довільної $f \in C_+(X)$: $0 \leq m|_F(f) \leq m(f)$.

Зауваження. З пп.I–3 твердження I.I випливає, що $m|_F \in M^+X$.

4. $\| m|_F \| = m(F)$.

5. Для довільних $m_1, m_2 \in M^+X$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$ маємо

$$(C_1 m_1 + C_2 m_2)|_F = C_1 m_1|_F + C_2 m_2|_F.$$

6. $m_F(f) = \inf\limits_{\psi \in rX(F)} m(\psi f), \quad f \in C_+(X).$

7. $(m|_F)|_G = m|_{F\cap G} = (m|_G)|_F$ / F, G замкнені/.

8. $supp\,(m|_F) \subset F.$

Доведення. I. Для довільної $f \in C(X)$ покладемо $f^+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. Маємо $f^+, f^- \in C_+(X)$, $f = f^+ - f^-$. Нехай $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \in C_+(X)$. Очевидно, що $f_1 \geq f^+$, $f_2 \geq f^-$; $f_1 - f^+ = f_2 - f^- \geq 0$.

Отже,

$$m|_F(f_1) - m|_F(f_2) = m|_F(f^+ + (f_1 - f^+)) - m|_F(f^- + (f_2 - f^-)) =$$

$$= m|_F(f^+) - m|_F(f^-) + m|_F(f_1 - f^+) - m|_F(f_2 - f^-) = m|_F(f^+) - m|_F(f^-).$$

П.7 твердження I.I випливає з того, що для довільної $\psi \in rX \times (F \cap G)$ існують функції $\psi_1 \in X(F)$, $\psi_2 \in X(G)$ такі, що $\psi_1 \psi_2 \leq \psi$.

Решта властивостей очевидні.

Означення I.4. Міру $m \in M^+X$ назвемо зосередженою на множині F тоді і тільки тоді, коли $m|_F = m$.

Коректність означення випливає з пп. 7 і 8 твердження I.I. Очевидно, що кожна міра зосереджена на своєму носії і міра, зосереджена на F, зосереджена також на довільній $G \supset F$.

Означення I.5. Нехай $m \in M^+X$, $D = F_1 \setminus F_2$, де F_1, F_2 – множини, замкнені в компакті X. Позначимо $m|_D$ функціонал $m|_{F_1} - m|_{F_1 \cap F_2}$.

Твердження I.2.

I. Означення є коректним, тобто для фіксованої множини D не залежить від вибору F_1 і F_2.

2. $m|_\Delta \in M^+X$ й істинні пп. 2, 3, 5, 7 твердження I.I.

Доведення. I. Нехай множина D зображується у даному вигляді. Тоді непорожньою є множина $\{(F_{1\alpha}, F_{2\alpha}) \mid \alpha \in A\}$ пар таких, що

$D = F_{1\alpha} \setminus F_{2\alpha}$ /$F_{1\alpha}$, $F_{2\alpha}$ замкнені/. Покладемо $F_{10} = \bigcap_{\alpha\in A} F_{1\alpha}$, $F_{20} = \bigcap_{\alpha\in A} F_{2\alpha}$. Очевидно, що $F_{10} \supset F_{20}$, $F_{10} \setminus F_{20} = D$. Для довільного $\alpha \in A$ маємо $F_{1\alpha} \setminus F_{2\alpha} \subset F_{10}$. За регулярністю міри звідси випливає, що $m|_{F_{1\alpha}} - m|_{F_{1\alpha}\cap F_{2\alpha}}$ зосереджена на F_{10}. Тому $(m|_{F_{1\alpha}} - m|_{F_{1\alpha}\cap F_{2\alpha}})|_{F_{10}} = m|_{F_{1\alpha}\cap F_{10}} - m|_{F_{1\alpha}\cap F_{2\alpha}\cap F_{10}} = m|_{F_{10}} - m|_{F_{20}}$.

2. Усі властивості перевіряються безпосереднім обчисленням на підставі означення I.4 і твердження I.I.

§ 2. Відображення $c: PX \times PX \times I \to PX$

Нехай X – опуклий компакт, $M_f^+X = \{m \in M^+X \mid |\operatorname{supp} m| < \infty\}$ і $P_fX = \{m \in PX \mid |\operatorname{supp} m| < \infty\}$. Міри з M_f^+X і P_fX, які назвемо фінітними, подаються у вигляді $m = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}$, де $p_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$; δ_x – міра Дірака, зосереджена в точці x. Якщо $m \in P_fX$, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, інакше $\sum_{i=1}^{n} p_i = \| m \|$. У [1] доводиться, що P_cX і M_f^+X – всюди щільні множини відповідно в PX і M^+X.

Задамо відображення $c: M_f^+X \times M_f^+X \times I \to M^+X$ формулою

$$c\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{x_i}, \sum_{j=1}^{n} q_j \delta_{y_j}, \lambda\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j \delta_{\lambda x_i + (1-\lambda) y_j}.$$

З очевидної властивості $\| c(m_1, m_2, \lambda) \| = \| m_1 \| \cdot \| m_2 \|$, $m_1, m_2 \in M_f^+X$ випливає, що при $m_1, m_2 \in P_fX$, $\lambda \in I$ маємо $c(m_1, m_2, \lambda) \in PX$. Відображення c афінне й однорідне за кожною з двох перших координат на $M_f^+X \times M_f^+X \times I$ та афінне на $P_fX \times P_fX \times I$.

<u>Лема 2.I</u>. Існує єдине неперервне продовження відображення $c: P_fI \times P_fI \times I \to PI$ на $PI \times PI \times I$.

<u>Доведення</u>. Скористаємось лемою I.I. Нехай $m_1, m_2 \in PI$, $\lambda \in I$, $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C(I)$ довільні. Не зменшуючи загальності, можна покласти $\| \varphi \| < 1$. Оскільки функція φ неперервна на від-

10*

різку, вона є неперервною рівномірно й існує $s \in \mathbb{N}$ таке, що $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$, якщо $|x_1 - x_2| < \frac{\ell}{s}$. Нехай $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_s$ – функції на I, задані формулами $\theta_i(x) = \max \times$ $\times \{0, 1 - s|x - \frac{i}{s}|\}$. Очевидно, що $\{\theta_i \mid 0 \le i \le s\}$ – розбиття одиниці, вписане в покриття діаметром $\frac{\ell}{s}$.

Для довільних фінітних мір $m_1' = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}$ і $m_2' = \sum\limits_{j=1}^{\ell} \beta_j \delta_{y_j}$ маємо $C(m_1', m_2', \lambda')(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{\ell} \alpha_i \beta_j \varphi(\lambda' x_i + (1-\lambda') y_j) =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{r=0}^{s}\sum_{t=0}^{s} \alpha_i \beta_j \theta_r(x_i)\theta_t(y_j)\varphi(\lambda' x_i + (1-\lambda')y_j) =$$

$$= \sum_{r=0}^{s}\sum_{t=0}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}(\theta_r(x_i)\alpha_i)(\theta_t(y_j)\beta_j)\varphi(\lambda' x_i + (1-\lambda')y_j)\Big).$$

Нехай

$$|\lambda' - \lambda| < \frac{1}{s},\ x \in \left]\frac{r-1}{s}, \frac{r+1}{s}\right[,\ y \in \left]\frac{t-1}{s}, \frac{t+1}{s}\right[,\ 0 \le r, t \le s.$$

Тоді

$$|\lambda' x + (1-\lambda')y - (\lambda \frac{r}{s} + (1-\lambda)\frac{t}{s})| < \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{s};$$

$$|\varphi(\lambda' x + (1-\lambda')y) - \varphi(\lambda \frac{r}{s} + (1-\lambda)\frac{t}{s})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Але

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_r(x_i)\alpha_i = m_1'(\theta_r); \quad \sum_{j=1}^{\ell}\theta_t(y_j)\beta_j = m_2'(\theta_t).$$

Отже, якщо

$$\lambda', \lambda'' \in \left]\lambda - \frac{1}{s}, \lambda + \frac{1}{s}\right[\cap I,$$

$$m_1', m_1'' \in O\langle m_1, \theta_0, \ldots, \theta_s, \varepsilon, 8(s+1)\rangle \cap P_f X,$$

$$m_2', m_2'' \in O\langle m_2, \theta_0, \ldots, \theta_s, \varepsilon, 8(s+1)\rangle \cap P_f X,$$

то $|C(m_1', m_2', \lambda')(\varphi) - C(m_1'', m_2'', \lambda'')(\varphi)| \le$

$$\le |C(m_1', m_2', \lambda')(\varphi) - \sum_{r,t=0}^{s} m_1'(\theta_r)m_2'(\theta_t)\varphi(\lambda\frac{r}{s} + (1-\lambda)\frac{t}{s})| +$$

$$+ \sum_{r,t=0}^{s}|m_1'(\theta_r)m_2'(\theta_t) - m_1''(\theta_r)m_2''(\theta_t)| +$$

$$+ |\sum_{r,t=0}^{s} m_1''(\theta_r)m_2''(\theta_t)\varphi(\lambda\frac{r}{s} + (1-\lambda)\frac{t}{s}) - C(m_1'', m_2'', \lambda'')(\varphi)| <$$

$$< \varepsilon/4 + \sum_{r,t=0}^{s} m_1'(\theta_r)\,|m_2'(\theta_t) - m_2''(\theta_t)| + \sum_{r,t=0}^{s} |m_1'(\theta_r) -$$

$$- m_1''(\theta_r)|\, m_2''(\theta_t) + \varepsilon/4 < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon.$$

Отже, теорему доведено.

Теорема 2.2. Існує єдине неперервне продовження C з $P_f X \times P_f X \times I$ на $PX \times PX \times I$, де X – довільний опуклий компакт.

Доведення. Знову скористаємось лемою І.І. Нехай $\varphi \in C(X)$, $\varepsilon > 0$, $m_1, m_2 \in PX$, $\lambda \in I$. Згідно з лемою з І.7 існують неперервні афінні функціонали $\ell_1, \dots, \ell_k$ із значеннями в I і многочлени $p_1, \dots, p_k$ такі, що $\|\varphi - \sum_{i=1}^{k} p_i(\ell_i)\| < \varepsilon/4$. Отже, для виконання нерівності $|c(m_1', m_2', \lambda')(\varphi) - c(m_1'', m_2'', \lambda'')(\varphi)| < \varepsilon$ досить, щоб виконувалось k нерівностей $|c(m_1', m_2', \lambda')(p_i(\ell_i)) - c(m_1'', m_2'', \lambda'')(p_i(\ell_i))| < \varepsilon \cdot 2_k$, тобто

$$|P\ell_i(c(m_1', m_2', \lambda'))(p_i) - P\ell_i(c(m_1'', m_2'', \lambda''))(p_i)| < \varepsilon/2k, \quad 1 \le i \le k.$$

Для фінітних мір очевидна властивість

$$P\ell_i(c(m_1', m_2', \lambda'))(p_i) = c(P\ell_i(m_1'), P\ell_i(m_2'), \lambda')(p_i).$$

Далі доведення очевидно випливає з доведення теореми 2.I і неперервності відображень $P\ell_i : PX \to PI$, $i = 1, \dots, k$.

Теорема 2.3. Відображення $c : PX \times PX \times I \to PX$, де X – опуклий компакт, є ін'єктивним за першим /другим/ аргументом за фіксованих інших аргументів і $\lambda \ne 0$ /відповідно $\lambda \ne 1$/.

Доведення. Наведені далі властивості для фінітних мір перевіряються безпосереднім обчисленням і продовжуються за неперервністю на всі міри: а/ $c(m_1, m_2, \lambda) = c(m_2, m_1, 1-\lambda)$, $m_1, m_2 \in PX$, $\lambda \in I$;

б/ $P\ell(c(m_1, m_2, \lambda)) = c(P\ell(m_1), P\ell(m_2), \lambda)$, $m_1, m_2 \in PX$, $\lambda \in I$,
$\ell : X \to I$ – афінний неперервний функціонал.

З наведених властивостей, а також з леми І.7 випливає, що теорему досить довести для першого аргументу і випадку $c : PI \times PI \times I \to PI$, $\lambda \ne 0$. Кожна міра $m \in PI$ однозначно визначається функцією $\Phi : \mathbb{R} \to I$, $\Phi(y) = m(]-\infty, y] \cap I)$, причому $\Phi \equiv 0$ на $]-\infty, 0[$; $\Phi \equiv 1$ на $[1, +\infty[$ і Φ – неспадна неперервна справа функція.

Звуження довільної міри m на множину $]a; b] \cap I$ позначимо $m\big|_a^b$. Тоді, якщо $c_0 < c_1 < \dots < c_{k-1} < c_k$, $c_0 = -\infty$, $c_k = +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, то $m = \sum_{i=1}^{k} m\big|_{c_{i-1}}^{c_i}$. Очевидно, що коли $m_1 = m_1\big|_{u_1}^{v_1}$, $m_2 = m_2\big|_{u_2}^{v_2}$, $m = c(m_1, m_2, \lambda)$, $\lambda \in I$, то для m справедливо

$m = m\Big|^{\lambda V_1+(1-\lambda)V_2}_{\lambda u_1+(1-\lambda)u_2}$. Отже, для довільних мір $m_1, m_2 \in PI$, чисел $\lambda \in I$, $y \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, $i \le k$ міра $c\left(m_1\Big|^{\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_i}_{-\infty}, m_2\Big|^{c_i}_{c_{i-1}}, \lambda\right)$ зосереджена на $]-\infty, y] \cap I$, а міра $c\left(m_1\Big|^{+\infty}_{\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_{i-1}}, m_2\Big|^{c_i}_{c_{i-1}}, \lambda\right)$ – на $]y, +\infty[\cap I$.

Тому для довільної невід'ємної функції $\varphi \in C(I)$ маємо

$$\sum_{i=1}^{k} c\left(m_1\Big|^{\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_i}_{-\infty}, m_2\Big|^{c_i}_{c_{i-1}}, \lambda\right)(\varphi) \le c(m_1, m_2, \lambda)\Big|^{y}_{-\infty}(\varphi) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} c\left(m_1\Big|^{\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_{i-1}}_{-\infty}, m_2\Big|^{c_i}_{c_{i-1}}, \lambda\right)(\varphi)\,.$$

Отже, функція розподілу міри $m = c(m_1, m_2, \lambda)$, яка дорівнює $\Phi(y) = c(m_1, m_2, \lambda)\Big|^{y}_{-\infty}(1_I)$, лежить між $\sum_{i=1}^{k}\Phi_1\left(\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_i\right)\times$ $\times(\Phi_2(c_i)-\Phi_2(c_{i-1}))$ і $\sum_{i=1}^{k}\Phi_1\left(\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}c_{i-1}\right)(\Phi_2(c_i)-\Phi_2(c_{i-1}))$.

Ці суми є відповідно верхньою та нижньою сумами Дарбу для інтеграла Рімана – Стілтьєса $\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_1\left(\frac{1}{\lambda}y-\frac{1-\lambda}{\lambda}t\right)d\Phi_2(t)$.

Існування інтеграла та ін'єктивність його за Φ_1 з описаного раніше класу функцій Φ доводяться тривіально. Цим теорему доведено.

<u>Зауваження</u>. Теореми 2.1–2.3 істинні також для $c: M^+X \times$ $\times M^+X \times I \to M^+X$.

§ 3. Відображення класів c, cp, c^1, cp^1

Індукцією за n означимо "півопуклу" комбінацію n мір з PX. Нехай $\Delta_{n-1} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \ge 0,\ 1 \le i \le n,$ $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1\}$ – вимірний симплекс.

<u>Означення 3.1</u>. Нехай $c_1 : PX \times \Delta_0 = PX \times \{(1)\} \to PX$ – проектування на перший співмножник, тобто $c_1(m, (1)) = m$, $m \in PX$.

Покладемо $c_n : (PX)^n \times \Delta_{n-1} \to PX$, $c_n((m_1, \dots, m_n),$
$(0,0,\dots,0,1)) = m_n$, інакше $c_n((m_1,\dots,m_n),(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = c(c_{n-1}\times$
$\times((m_1,\dots,m_{n-1}),(\lambda_1/(1-\lambda_n),\dots,(\lambda_{n-1}/(1-\lambda_n))), m_n, 1-\lambda_n)$.

Легко побачити, що для довільних $m_1, m_2, m_3 \in P_f X$, а отже, і для $m_1, m_2, m_3 \in PX$ і $\lambda_1, \lambda_3 \in [0,1[$, $\lambda_2 \in I$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ маємо $c(m_1, c(m_2, m_3, \lambda_2/(\lambda_2+\lambda_3)), \lambda_1) =$
$= c(c(m_1, m_2, \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)), m_3, \lambda_1+\lambda_2)$.

Тому значення $c_n((m_1,\dots,m_n),(\lambda_1,\dots,\lambda_n))$ не змінюється в разі одночасної перестановки відповідних m_i і λ_i. Звідси, зокрема, випливає неперервність c_n при $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=(0,\dots,0,1)$. Отже, c неперервне.

Означення 3.2. Відображення $cp_n : (PX)^n \times P\Delta_{n-1} \to PX$ задамо формулою $cp_n((m_1,\dots,m_n),M)(\varphi) = M(\varphi_{\vec{m}})$, де
$\varphi \in C(X)$, $\vec{m} = (m_1,\dots,m_n) \in (PX)^n$, $M \in P\Delta_{n-1}$,
$\varphi_{\vec{m}}((\lambda_1,\dots,\lambda_n)) = c_n((m_1,\dots,m_n),(\lambda_1,\dots,\lambda_n))(\varphi)$.

Теорема 3.1. Відображення cp_n визначене для всіх значень аргументів і неперервне.

Доведення. Очевидно, що $\varphi_{\vec{m}} \in C(\Delta_{n-1})$ і $cp_n((m_1,\dots,m_n),M) \in PX$. Неперервність випливає з такого факту. Якщо відображення $g : Z \times Y \to \mathbb{R}$ неперервне і Z - компакт, то g неперервне за Y рівномірно за Z, тобто для довільних $y \in Y$, $\varepsilon > 0$ існує окіл $O(y)$ такий, що для всіх $z \in Z$, $y' \in O(y)$ маємо $|g(z, y') - g(z,y)| < \varepsilon$. Покладемо $Z = \Delta_{n-1}$, $Y = (PX)^n$, $g((\lambda_1,\dots,\lambda_n),(m_1,\dots,m_n)) = \varphi_{\vec{m}}((\lambda_1,\dots,\lambda_n))$, $\vec{m} \in (PX)^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \vec{\lambda} \in \Delta_{n-1}$. Для довільних $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C(X)$, $\vec{m} \in (PX)^n$ існує окіл $O(\vec{m})$ такий, що $|c_n(\vec{m}', \vec{\lambda})\times$
$\times(\varphi) - c_n(\vec{m},\vec{\lambda})(\varphi)| < \varepsilon/2$, коли $\vec{m}' \in O(\vec{m})$, $\vec{\lambda} \in \Delta_{n-1}$.

Покладемо $O(M) = \{M' \in P\Delta_{n-1} \mid M'(\varphi_{\vec{m}}) - M(\varphi_{\vec{m}})| < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Тоді з $\vec{m}' \in O(\vec{m})$, $M' \in O(M)$ випливає, що $cp_n(\vec{m}', M')(\varphi) - cp_n(\vec{m}, M)(\varphi)| < \varepsilon$. Отже, твердження доведено.

Означення 3.4. Нехай $(PX)^{\omega}$ - злічений степінь простору PX $\pi_n : (PX)^{\omega} \to (PX)^n$ - проектування на перші n співмножників і відображення $h_n : (PX)^{\omega} \times P\Delta_{n-1} \to PX$ задається формулою $h_n = cp_n \circ (\pi_n \times id_{P\Delta_{n-1}})$. Позначивши $i_n : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ природні вкладення, отримуємо, що відображення h_n індукують неперервне відображення $cp_{\omega} : \underrightarrow{lim}\{((PX)^{\omega} \times P\Delta_n, id_{(PX)^{\omega}} \times Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\} \to PX$. Оскільки $(PX)^{\omega}$ - компакт, то $\underrightarrow{lim}\{((PX)^{\omega} \times P\Delta_n,$ $id_{(PX)^{\omega}} \times Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\} = (PX)^{\omega} \times \underrightarrow{lim}\{(P\Delta_n, Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Звідси випливає коректність такого означення: $cp_{\omega} : (PX)^{\omega} \times \underrightarrow{lim}\{(P\Delta_n, Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\} \to PX$ неперервне відображення таке, що $cp_{\omega} \mid_{(PX)^{\omega} \times P\Delta_{n-1}} = h_n$.

Означення 3.5. Назвемо нескінченновимірним симплексом Δ_{∞} підпростір гільбертового куба I^{ω}, заданий умовою $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$.

Лема 3.1. Індукована на Δ_{∞} топологія збігається з топологіями, індукованими метриками $\rho_1((\lambda_1', \lambda_2', \dots), (\lambda_1'', \lambda_2'', \dots)) = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i' - \lambda_i''|$ і $\rho_2((\lambda_1', \lambda_2', \dots), (\lambda_1'', \lambda_2'', \dots)) = \sup_{1 \le i < +\infty} |\lambda_i' - \lambda_i''|$.

Доведення очевидне.

Означення 3.6. Послідовність неперервних відображень $s_i : (PX)^{\omega} \times \Delta_{\infty} \to PX$ означимо формулами $s_i((m_1, m_2, \dots), (\lambda_1, \lambda_2, \dots)) = c_i((m_1, \dots m_i), (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_{i-1}))$, а відображення $c_{\infty} : (PX)^{\omega} \times \Delta_{\infty} \to PX$ - як поточкову межу послідовності s_i.

Теорема 3.2. Для довільної $\varphi \in C(X)$:

1/ за фіксованого $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \in \Delta_{\infty}$ для послідовності $s_i(\vec{m}, \vec{\lambda})(\varphi)$ виконується критерій Коші рівномірної збіжності за $\vec{m} \in (PX)^{\omega}$;

2/ функціональна послідовність $s_i(\vec{m}, \vec{\lambda})(\varphi)$ є рівноступенево за $\vec{m} \in (PX)^{\omega}$ неперервною за $\vec{\lambda} \in \Delta_{\infty}$.

Доведення обох пунктів грунтується на інваріантності c_n в разі одночасної перестановки відповідних координат і очевидній лемі: для довільних $\varphi \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $|c(m_1, m_2, \lambda)(\varphi) - m_1(\varphi)| < \varepsilon$, коли $0 \le 1 - \lambda < \delta$.

Наслідок. Відображення $c_\infty : (PX)^\omega \times \Delta_\infty \to PX$ всюди визначене і неперервне.

Означення 3.7. Аналогічно 3.2 відображення $cp_\infty : P(X)^\omega \times P\Delta_\infty \to PX$ означимо формулою $cp_\infty(\vec{m}, M)(\varphi) = M(\varphi_{\vec{m}})$, де $\varphi \in C(X)$, $\vec{m} \in (PX)^\omega$, $M \in P\Delta_\infty$, $\varphi_{\vec{m}} : \Delta_\infty \to R$, $\varphi_{\vec{m}}(\vec{\lambda}) = c_\infty(\vec{m}, \vec{\lambda})(\varphi)$.

Під $P\Delta_\infty$ розуміється простір нормованих лінійних додатно визначених функціоналів на просторі $C(\Delta_\infty)$ неперервних обмежених на Δ_∞ функцій. Очевидно, що $\varphi_{\vec{m}} \in C(\Delta_\infty)$, оскільки $\|\varphi_m\| \le \|\varphi\|$. Існування відображення очевидне. Але в загальному випадку відображення cp_∞ не є неперервним. Можна навести приклад міри $M \in P\Delta_\infty$ такий, що cp_∞ не є неперервним навіть лише за першим аргументом.

Теорема 3.3. Нехай $M \in P\Delta_\infty$ таке, що для кожного локально скінченного зліченного розбиття одиниці $\{\gamma_i \in C(\Delta_\infty) \mid i \in N\}$ маємо $\sum_{i=1}^{\infty} M(\gamma_i) = 1$ /"зліченна адитивність"/. Тоді відображення $cp_\infty : (PX)^\omega \times P\Delta_\infty \to PX$ неперервне за першим аргументом, якщо другий дорівнює M.

Доведення. Для $M \in P\Delta_\infty$ і довільної $\bar{\varphi} \in C(\Delta_\infty)$ маємо $M(\bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^{\infty} M(\bar{\varphi} \cdot \gamma_i)$. За п.2 теореми 3.2 для сім'ї функцій $\{\varphi_{\vec{m}},\ \vec{m} \in (PX)^\omega\}$ для кожного $\vec{\lambda} \in \Delta_\infty$ існує окіл $O(\vec{\lambda})$ такий, що $|\varphi_{\vec{m}}(\vec{\lambda}') - \varphi_{\vec{m}}(\vec{\lambda})| < \varepsilon/6$, коли $\vec{\lambda}' \in O(\vec{\lambda})$, $\vec{m} \in (PX)^\omega$. Оскільки Δ_∞ - сепарабельний метричний простір, існує локально скінченне зліченне розбиття одиниці $\{\gamma_i \mid i \in N\}$, вписане у відкрите покриття $\{O(\vec{\lambda}) \mid \vec{\lambda} \in \Delta_\infty\}$. Нехай $n \in N$ таке, що

$M(\gamma_1)+\ldots+M(\gamma_n) > 1-\varepsilon/4\|\varphi\|$. Оскільки $\|\varphi_{\vec{m}}\| \le \|\varphi\|$, для кожної $\vec{m}\in(PX)^\omega$ маємо $|M(\varphi_{\vec{m}})-\sum_{i=1}^{n} M(\varphi_{\vec{m}}\cdot\gamma_i)| < \varepsilon/4$.

Нехай $supp\,\gamma_i \in O(\lambda_i)$, $1\le i\le n$. Для довільної $\vec{m}_0\in(PX)^\omega$ і кожної з точок $\vec{\lambda}_i\in\Delta_\infty$ маємо окіл $O_i(\vec{m}_0)$ такий, що для кожної міри $\vec{m}'\in O_i(\vec{m}_0)$ маємо $|\varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}_i)-$
$-\varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}_i)| < \varepsilon/6$.

Нехай $O(\vec{m}_0)=\bigcap_{i=1}^{n} O_i(\vec{m}_0)$. При $\vec{m}'\in O(\vec{m}_0)$ маємо

$$|cp_\infty(\vec{m}', M)(\varphi)-cp_\infty(\vec{m}_0, M)(\varphi)| =$$
$$= M(\varphi_{\vec{m}'}-\varphi_{\vec{m}_0})| \le \frac{\varepsilon}{4}+\sum_{i=1}^{n}|M(\gamma_i\varphi_{\vec{m}'}-\gamma_i\varphi_{\vec{m}_0})|+\frac{\varepsilon}{4}\le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^{n} M(\gamma_i)\sup_{\vec{\lambda}\in O(\lambda_i)}|\varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}')-\varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}')| \le \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^{n} M(\gamma_i)\times$$
$$\times\Big(\sup_{\vec{\lambda}\in O(\vec{\lambda}_i)}|\varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}')-\varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}_i)|+|\varphi_{\vec{m}'}(\vec{\lambda}_i)-\varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}_i)|+$$
$$+\sup_{\lambda'\in O(\vec{\lambda}_i)}|\varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}_i)-\varphi_{\vec{m}_0}(\vec{\lambda}')|\Big) < \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=1}^{n} M(\gamma_i)\Big(\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}\Big)\le\varepsilon.$$

Отже, неперервність доведено.

Зауваження. Відображення cp_n і cp_∞ афінні за другими аргументами, c_n, cp_n, cp_ω, c_∞, cp_∞ – за кожною окремою координатою першого аргументу. Значення відображень c_n і c_∞ не змінюються в разі одночасної перестановки відповідних координат обох аргументів.

Означення. 8. Відображення $d_n: PX\to(PX)^n$, $d_n(m)=(m_1,\ldots,m)$, $n\in\mathbb{N}$ і $d_\infty: PX\to(PX)^\omega$, $d_\infty(m)=(m,m_1,\ldots)$ неперервні.

Відображення задамо формулами

$$c_n^1: PX\times\Delta_{n-1}\to PX,\quad c_n^1=c_n\circ(d_n\times id_{\Delta_{n-1}});$$
$$cp_n^1: PX\times P\Delta_{n-1}\to PX,\quad cp_n^1=cp_n\circ(d_n\times id_{P\Delta_{n-1}});$$
$$cp_\omega^1: PX\times\varinjlim\{(P\Delta_n, P_{i_n})\mid n\in\mathbb{Z}_+\}\to PX;$$

$$cp'_\omega = cp_\omega \circ (d_\infty \times id_{\underrightarrow{lim}\{(P\Delta_n, Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}});$$
$$c'_\infty : PX \times \Delta_\infty \to PX, \ c'_\infty = c_\infty \circ (d_\infty \times id_{\Delta_\infty});$$
$$cp'_\infty : PX \times P\Delta_\infty \to PX, \ cp'_\infty = cp_\infty \circ (d_\infty \times id_{P\Delta_\infty}).$$

Очевидно, що відображення $c'_n, cp'_n, cp'_\omega, c'_\infty$ неперервні.

Теорема 3.4. У разі кожної фіксованої функції $\varphi \in C(X)$ функції $\varphi_{\vec{m}} : \Delta_\infty - \mathbb{R}$, де $\vec{m} = (m, m_1, \ldots)$, $m \in PX$, збігаються при $\max\limits_{i \in N} \lambda_i \to 0$ рівномірно за $m \in PX$ до $(\eta_X \circ \beta_X)(m)(\varphi)$, де β_X – неперервне відображення "центра маси" $PX \to X$, яке кожній мірі ставить у відповідність таку точку, що для довільного афінного функціонала $\ell : X \to \mathbb{R}$, $m \in PX$ маємо $m(\ell) = \delta_{\beta_X(m)}(\ell) = \ell(\beta_X(m))$.

Доведення. На підставі І.5 і І.6 теорему достатньо довести лише для опуклого компакта I. На PI відображення β_I записується аналітично: $\beta_I(m) = m(id_I)$.

За неперервністю збіжність досить довести лише для фінітних мір $m \in PI$ вигляду $m = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ і для $\vec{\lambda} \in \underrightarrow{lim}\{(\Delta_n, i_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, оскільки такі пари $(m, \vec{\lambda})$ утворюють у $PI \times \Delta_\infty$ всюди щільну множину. Для міри $m = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ маємо $\beta_I(m) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Числа $x_1 - \beta(m), \ldots, x_n - \beta(m)$ утворюють зрівноважений вектор. Якщо $\vec{\lambda} \in \Delta_{k-1}$, то міра $c'_\infty(m, \vec{\lambda})$ є середнім арифметичним n^k мір Дірака, координата носіїв яких є сумою $\beta_I(m)$ і координат n^k-вимірного вектора, утвореного з $x_1 - \beta(m), \ldots, x_n - \beta(m)$ так, як описано в лемі І.4. На підставі цієї леми середня відстань носіїв мір Дірака, що входять до $c'_\infty(m, \vec{\lambda})$, до $\beta_I(m)$ не перевищує $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_1^2 + \ldots} \leq \sqrt{\max\limits_{i \in N} \lambda_i}$. Оскільки φ обмежена і рівномірно неперервна на I, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з

$\max\limits_{i\in N} \lambda_i < \delta$ випливає: для довільної $m = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$, де $n \in N$, маємо $|c_\infty^1(\vec{m},\lambda)(\varphi) - \varphi(\mathcal{b}_I(m))| < \varepsilon$. Цим теорему доведено.

Лема 3.2. Для довільних $\varphi \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ відображення f, $f(m,\vec{\lambda}) = \varphi_{\vec{m}}(\vec{\lambda})$, де $\vec{m} = (m,m,\dots)$, $m \in PX$, можна рівномірно наблизити з точністю $< \varepsilon$ відображенням g_n, де

$$g_n(m,\vec{\lambda}) = c_{n+1}((m,\dots,m,\delta_{\mathcal{b}_X(m)});(\lambda_1',\dots,\lambda_n',1-\lambda_1',\dots,\lambda_n'))(\varphi);$$

n - деяке натуральне число; λ_1', λ_2', ..., λ_n' - найбільші n координат вектора $\vec{\lambda}$. Зауважимо, що відображення $\Delta_\infty \to \Delta_\infty$, яке впорядковує координати за спаданням, є неперервним.

Доведення спирається на такий елементарний факт: для кожних $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ існує $n \in N$ таке, що для кожного $\vec{\lambda} \in \Delta_\infty$ або $\lambda_1' + \dots + \lambda_n' > 1 - \varepsilon$, або $\lambda_{n+1}' < \varepsilon_1 (\lambda_{n+1}' + \lambda_{n+2}' + \dots)$, а також на лемі 3.1 та інваріантності c_∞ в разі одночасної перестановки відповідних координат обох аргументів.

Теорема 3.5. Відображення cp_∞^1 неперервне. Доведення випливає з леми 3.2 .

Зауваження: 1 . Для простору вигляду P^2X, де X - компакт, відображення "центра маси" - це компонента ψ_X природного перетворення $\psi: P^2 \to P$. Оскільки згідно з теоремою 3.4 маємо $\mathcal{b}_X(m) = cp_\infty^1(m, M_0)$, $m \in PX$, де M_0 - міра вигляду $M_0(\varphi) = LIM(\varphi(\vec{\lambda}_1), \varphi(\vec{\lambda}_2),\dots)$, $\varphi \in C(\Delta_\infty)$; $\max\limits_{i\in N} \lambda_{ki} \to 0$ при $k \to \infty$; LIM - банахова межа [5], то

$$\psi_X(m) = cp_\infty^1(m, M_0), \quad m \in P^2X.$$

2. Для кожного з відображень c_n^1, cp_n^1, cp_ω^1, c_∞^1, cp_∞^1 існує, але не є єдиною "права одиниця" - таке фіксоване значення другого аргументу, яке перетворює відображення в тотожне.

3. Позначимо F_{c_n}, $F_{c'_n}$ і т.п. множини відображень з PX, $(PX)^n$ чи $(PX)^\omega$ в PX, які можна отримати, зафіксувавши другий аргумент в означених раніше відображеннях. Очевидно, що $F_{c_n} \subset F_{cp_n}$, $F_{c_\infty} \subset F_{cp_\infty}$, $F_{cp_\omega} \subset F_{cp_\infty}$, $F_{c'_n} \subset F_{cp'_n} \subset F_{cp'_\infty} \subset F_{cp'_\infty}$, $F_{c'_n} \subset F_{c'_\infty} \subset F_{cp'_\infty}$.

§ 4. Відображення c_n, cp_n, cp_ω, c_∞, cp_∞, c'_n, cp'_ω, c'_∞, cp'_∞, b як природні перетворення

Нехай X, Y - опуклі компакти; $f: X \to Y$ - афінне неперервне відображення; $m_1, m_2, \ldots, m_n \in P_f X$, $\vec{\lambda} \in \Delta_{n-1}$. Легко побачити, що $c_n((Pf(m_1), \ldots, Pf(m_n)), \vec{\lambda}) = Pf(c_n((m_1, \ldots, m_n), \vec{\lambda}))$. За неперервністю цю рівність можна перенести на довільні міри $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n \in PX$.

<u>Теорема 4.I</u>. Відображення c'_n, cp'_n, cp'_ω, c'_∞, cp'_∞ у разі фіксованих других аргументів є природними перетвореннями з P_{Conv} у себе, тобто при $X, Y \in Ob\, Conv$, $f \in Mor(X,Y)\, Conv$ маємо

$$Pf(c'_n(m, \vec{\lambda})) = c'_n(Pf(m), \vec{\lambda}), \quad m \in PX, \ \vec{\lambda} \in \Delta_{n-1};$$
$$Pf(cp'_n(m, M)) = cp'_n(Pf(m), M), \quad m \in PX, \ M \in P\Delta_{n-1};$$
$$Pf(cp'_\omega(m, M)) = cp'_\omega(Pf(m), M), \quad m \in PX,$$
$$M \in \underleftarrow{\lim}\{(P\Delta_n, Pi_n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\};$$
$$Pf(c'_\infty(m, \vec{\lambda})) = c'_\infty(Pf(m), \vec{\lambda}), \quad m \in PX, \ \vec{\lambda} \in \Delta_\infty;$$
$$Pf(cp'_\infty(m, M)) = cp'_\infty(Pf(m), M), \quad m \in PX, \ M \in P\Delta_\infty.$$

Доведення очевидне.

4.2. Під $(P_{Conv})^n$ $((P_{Conv})^\omega)$ розумітимемо функтор з $Conv$ у $Comp$, який ставить у відповідність опуклому компакту X компакт $(PX)^n$ $((PX)^\omega)$, а афінному неперервному відображенню $f: X \to Y$ - відображення $(PX)^n \to (PY)^n$ $((PX)^\omega \to (PY)^\omega)$, яке вектору $(m_1,\dots,m_n)$ $((m_1,m_2,\dots))$ ставить у відповідність $(Pf(m_1),\dots,Pf(m_n))$ $((Pf(m_1),Pf(m_2),\dots))$.

Теорема. Відображення c_n і cp_n в разі фіксованих других аргументів є природними перетвореннями з $(P_{Conv})^n$ у P_{Conv}, а cp_ω, c_∞ і cp_∞ /у випадку, зазначеному в теоремі 3.3/ є природними перетвореннями з $(P_{Conv})^\omega$ в P_{Conv}.

Запис виконується аналогічно 4.І. Доведення очевидне.

Цим одночасно розв'язано питання про нетривіальні природні перетворення з P^2 у себе.

Теорема 4.3. Довільне природне перетворення $\theta : P_{Conv} \to P_{Conv}$ однозначно визначається своїм значенням на I.

Доведення. Нехай X - опуклий компакт; $\mathcal{T}$ - множина всіх афінних неперервних функціоналів на X із значеннями в I. Згідно з І.6 відображення $\theta_X : PX \to PX$ однозначно визначається сукупністю відображень $(Pl \circ \theta_X \mid l \in \mathcal{T})$. Але $Pl \circ \theta_X = \theta_I \circ Pl$ відоме. Цим теорему доведено.

Теорема 4.4. Відображення $b_X : PX \to X$ /див. § 3/ є компонентою природного перетворення з P_{Conv} у I_{Conv}.

Доведення очевидне.

§ 5. c-опуклі відображення

Означення 5.І. Нехай X - опуклий компакт; Y вкладається як опукла множина в локально опуклий лінійний топологічний простір. Відображення $f : PX \to Y$ назвемо c-опуклим, якщо для довільних $m_1, m_2 \in PX$, $\lambda \in I$ маємо $f(c(m_1, m_2, \lambda)) = \lambda f(m_1) + (1-\lambda) f(m_2)$.

Зауваження. c-опуклим є відображення $b_X : PX \to X$ /див. § 3/, а отже, і $\psi_X : P^2X \to PX$.

Теорема 5.І. Нехай X, Y такі самі, як у 5.І; f - неперервне відображення з PX у Y. Тоді наведемо таке:

І. Кожне c-опукле відображення f афінне.

2. Для c-опуклості афінного відображення f необхідно і достатньо, щоб для деякого $\lambda \in]0;1[$ і всіх $m \in PX$ виконувалась рівність $f(c(m, m, \lambda)) = f(m)$.

3. Для довільного f існує $\lambda \in]0;1[$ таке, що $f(c(m,m,\lambda)) = f(m)$ для всіх $m \in PX$ тоді і тільки тоді, коли $f = f \circ \eta_X \circ \sigma_X$.

4. Відображення f є c-опуклим тоді і тільки тоді, коли $f = f' \circ \sigma_X$, де f' - афінне відображення з X у Y, яке цими умовами визначається однозначно.

5. Якщо природне перетворення $\theta : P_{Conv} \to F$, де F- функтор з $Conv$ у $Comp$ такий, що для кожного $X \in Ob\, Conv$ простір FX є опуклим компактом, має c-опуклі компоненти, то $\theta = \theta' \circ \sigma$, де $\theta' = \theta \circ \eta$ - природне перетворення з Id_{Conv} у F, яке має афінні компоненти, а σ- природне перетворення "центра маси" /див. теорему 4.4/.

Доведення. У п. 3 достатність очевидна. Доведемо необхідність. Нехай таке $\lambda \in]0;1[$ існує. Тоді відображенню $h:$ $PX \to PX$, $h(m) = c(m,m,\lambda)$ притаманна властивість $f = f \circ h$. Звідси випливає, що $f = f \circ h^n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Але легко побачити, що $h^n(m) = c^1_{2^n}(m, \vec{\lambda}')$ для деякого вектора $\vec{\lambda}' \in \Delta_{2^n-1}$, причому всі координати $\vec{\lambda}'$ мають вигляд $\lambda^i(1-\lambda)^{2^n-i}$ для деякого i, $0 \le i \le 2^n$. Отже, маємо оцінку $\|\vec{\lambda}'\| \le (max\{\lambda, 1-\lambda\})^{2^n}$. Звідси випливає, що при $n \to \infty$ послідовність відображень h^n збігається до $\eta_X \circ \sigma_X$. За неперервністю f звідси випливає, що $f = f \circ \eta_X \circ \sigma_X$.

У п. 4 достатність випливає із c-опуклості відображення σ_X. Доведемо необхідність. Нехай f є c-опуклим. Тоді $f = f \circ \eta_X \circ \sigma_X$. Покладемо $f' = f \circ \eta_X$. Тоді $\lambda f'(m_1) + (1-\lambda) f'(m_2) = \lambda f(\delta_{m_1}) + (1-\lambda) f(\delta_{m_2}) = f(\delta_{\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2}) = f'(\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2)$, тобто f' афінне. Звідси, зокрема, випливає афінність f, тобто п. I.

Доведення п.5 очовидно випливає з п. 4.

У п. 2 необхідність умови очевидна. Достатність випливає з п. 3.

Отже, теорему доведено.

Список літератури

1. Общая топология. Основные конструкции: Учеб.пособие / В.В.Федорчук, В.В.Филиппов. – М.: Изд-во при МГУ, 1988. – 252 с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 740 с.
3. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии // Успехи математ.наук, 1991. – Т. 46. – Вып. 1. – С. 41–80.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
5. Теоремы и задачи функционального анализа: Учеб.пособие для вузов / А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 400 с.

УДК 519.48

І.Я.Тушницький

КІЛЬЦЯ З ЛОКАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИМИ КРУЧЕННЯМИ

В [1] для комутативних областей було доведено, що коли кільце R є h-локальною областю, то воно є кільцем з локально визначеними крученнями; побудовано приклад кільця з локально визначеними крученнями, яке не є h-локальною областю.

Деякий поступ у дослідженні комутативних кілець з локально визначеними крученнями маємо в [9].

Мета даної роботи – узагальнити результати Брендала і Барбу та автора із зазначених робіт на праві дуокільця. Загалом безпосереднього перенесення досягти не вдалось. Проте виділено клас асоціативних правих дуокілець з $1 \neq 0$, який задовольняє умову

$$\forall m \in mspec_r(R)\, \forall r \in R\, \forall d \in R \setminus m\, \exists c \in R\, \exists d' \in R \setminus m : rd' = drc. \quad (*)$$

У цьому класі кілець вдається отримати результати про кільця з локально визначеними крученнями, аналогічні наведеним раніше: зазначено необхідну і достатню умову того, щоб вони були кільцями з локально визначеними крученнями, а також показано, що h-локальність є