У п. 2 необхідність умови очевидна. Достатність випливає з п. 3.

Отже, теорему доведено.

Список літератури

1. Общая топология. Основные конструкции: Учеб.пособие / В.В.Федорчук, В.В.Филиппов. – М.: Изд-во при МГУ, 1988. – 252 с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 740 с.
3. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии // Успехи математ.наук, 1991. – Т. 46. – Вып. 1. – С. 41–80.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
5. Теоремы и задачи функционального анализа: Учеб.пособие для вузов / А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 400 с.

УДК 519.48

І.Я.Тушницький

КІЛЬЦЯ З ЛОКАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИМИ КРУЧЕННЯМИ

В [1] для комутативних областей було доведено, що коли кільце R є h-локальною областю, то воно є кільцем з локально визначеними крученнями; побудовано приклад кільця з локально визначеними крученнями, яке не є h-локальною областю.

Деякий поступ у дослідженні комутативних кілець з локально визначеними крученнями маємо в [9].

Мета даної роботи – узагальнити результати Брендала і Барбу та автора із зазначених робіт на праві дуокільця. Загалом безпосереднього перенесення досягти не вдалось. Проте виділено клас асоціативних правих дуокілець з $1 \neq 0$, який задовольняє умову

$$\forall m \in mspec_r(R)\, \forall r \in R\, \forall d \in R \setminus m\, \exists c \in R\, \exists d' \in R \setminus m : rd' = drc. \quad (*)$$

У цьому класі кілець вдається отримати результати про кільця з локально визначеними крученнями, аналогічні наведеним раніше: зазначено необхідну і достатню умову того, щоб вони були кільцями з локально визначеними крученнями, а також показано, що h-локальність є необхідною і достатньою умовою для більш вузького класу кілець, ніж кільця з локально визначеними крученнями, а саме для кілець з локально визначеними передкрученнями.

Для повноти викладу нагадаємо деякі необхідні поняття, які використовуватимемо в подальшому. Кільце R називається правим дуокільцем, якщо кожний правий ідеал цього кільця двобічний. У подальшому розглядатимемо тільки праві дуокільця з $1 \neq 0$, які задовольняють умову /ж/. Зауважимо, що умову /ж/ задовольняють усі комутативні кільця.

Множину всіх правих максимальних ідеалів кільця R позначатимемо $mspec_r(R)$.

Нехай D - підмножина кільця R. Тоді D називається мультиплікативно замкненою множиною кільця R, якщо вона задовольняє такі умови:

/1/ $\forall a, b \in D: ab \in D$;

/2/ $1 \in D$, $0 \notin D$.

Мультиплікативно замкнена множина D кільця R називається правою множиною Оре, якщо вона задовольняє умову

$$\forall r \in R\ \forall d \in D\ \exists r_1 \in R\ \exists d_1 \in D: rd_1 = dr_1.$$

Мультиплікативно замкнена множина D називається переставною справа, якщо вона задовольняє умову

$$\forall r \in R\ \forall d \in D: dr = 0 \Rightarrow \exists d' \in D\ rd' = 0.$$

Нехай D - мультиплікативно замкнена множина кільця R; S - деяке кільце; f - гомоморфізм кільця R у кільце S. Тоді пара (S, f) називається правим кільцем дробів кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D, якщо виконуються умови

/1/ $\forall d \in D$: $f(d)$ - обернений елемент кільця S;

/2/ $\forall s \in S\ \exists r \in R\ \exists d \in D: s = f(r)f(d)^{-1}$;

/3/ $Ker f = \{r \in R \mid \exists d \in D\ rd = 0\}$.

Має місце таке твердження:

Твердження I. Нехай D - мультиплікативно замкнена множина кільця R. Тоді праве кільце дробів (S, f) кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D існує тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

/1/ D - права множина Оре;

/2/ D - переставна справа,

тобто коли D - множина правих знаменників.

Лема 1. Нехай R - праве дуокільце, яке задовольняє умову /*/; m - довільний правий максимальний ідеал кільця R. Тоді множина $D = R \setminus m$ є мультиплікативно замкненою множиною кільця R і кільце дробів (S, f) кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D існує.

Доведення. Доведемо спочатку, що множина D - мультиплікативно замкнена. Нехай $x \notin m$ і $y \notin m$. Покажемо, що $xy \notin m$. Припустимо, що $xy \in m$. Тоді $xyR \subset m$. Оскільки R - праве дуокільце, то $yR = RyR$. Отже, $xRyR \subset m$, а тому $xRy \subset m$. Оскільки ідеал первинний, то $x \in m$ або $y \in m$, а це суперечить умові. Отже, $xy \notin m$. Очевидно, що $0 \notin D = R \setminus m$; $1 \in D$. Таким чином, множина D мультиплікативно замкнена.

Тепер покажемо, що множина D - права множина Оре. Нехай $r \in R$ і $d \in D$. Тоді, оскільки R - праве дуокільце, то $RdcdR = RdR$. Тому існує $r_1 \in R$ таке, що $rd = dr_1$. Легко побачити, що умова Оре є також наслідком умови /*/.

Доведемо, що множина D переставна справа. Нехай $r \in R$ і $d \in D$. За умови /*/ існують $c \in R$, $d' \in D$ такі, що $rd' = drc$. Якщо $dr = 0$, то $rd' = 0$. Отже, D переставна справа.

Таким чином, згідно з твердженням I існує праве кільце дробів (S, f) кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D. Оскільки $D = R \setminus m$, то це кільце дробів позначатимемо (R_m, f_m), або коротко R_m і називатимемо локалізацією кільця R відносно максимального ідеалу m.

Лема 2. Праве дуокільце R задовольняє умову /ж/ тоді і тільки тоді, коли воно задовольняє таку умову:

$$\forall \mathfrak{M} \in mspec_r(R)\ \forall J\text{- правий ідеал кільця } \forall i \in J\ \forall d \in D = R \setminus \mathfrak{M}\ \exists i' \in J\ \exists d' \in D:\ id' = di'. \qquad \text{/жж/}$$

Доведення. Нехай кільце R задовольняє умову /ж/, $\mathfrak{M}$ - довільний правий максимальний ідеал кільця R; J - довільний правий ідеал кільця R. Виберемо $i \in J$ і $d \in D$. Тоді за умови /ж/ існують елементи $d' \in D$ і $c \in R$ такі, що $id' = dic$. Оскільки J - правий ідеал, то $i' = ic \in J$. Таким чином, $id' = di'$, де $i' \in J$, $d' \in D$.

Навпаки, нехай кільце R задовольняє умову /жж/ і $r \in R$, $d \in D$. Розглянемо правий ідеал $J = rR$. Оскільки $r \in rR$ і $d \in D$, то існують $i' \in rR$ і $d' \in D$ такі, що $rd' = di'$. Оскільки $i' \in rR$, то існує $c \in R$ таке, що $i' = rc$. Таким чином, $rd' = drc$, що й треба було довести.

Якщо J - правий ідеал кільця R, то $J_{\mathfrak{M}}$ позначатимемо множину $\{f_m(i) f_m(d)^{-1} \mid i \in J, d \in D = R \setminus \mathfrak{M}\}$. Покажемо, що $J_{\mathfrak{M}}$ - ідеал у кільці R_m. Нехай $x_1, x_2 \in J_{\mathfrak{M}}$. Покажемо, що $x_1 + x_2 \in J_m$. Оскільки $x_1, x_2 \in J_m$, то $x_1 = f(i_1) f(d_1)^{-1}$ і $x_2 = f(i_2) f(d_2)^{-1}$, де $i_1, i_2 \in J$; $d_1, d_2 \in D$. Оскільки $d_2 \in R$, $d_1 \in D$ і D - права множина Оре, то існують $d_1' \in D$ і $d_2' \in R$ такі, що $d_2 d_1' = d_1 d_2'$. Тоді $f(d_2) f(d_1') = f(d_1) f(d_2')$. Домножуючи дану рівність справа на $f(d_1')^{-1}$ і зліва на $f(d_1)^{-1}$, отримуємо $f(d_1)^{-1} f(d_2) = f(d_2') f(d_1')^{-1}$. Тепер $x_1 + x_2 = f(i_1) f(d_1)^{-1} + f(i_2) f(d_2)^{-1} = f(i_1) f(d_1)^{-1} f(d_2) f(d_2)^{-1} + f(i_2) f(d_2)^{-1} = f(i_1) f(d_2') f(d_1')^{-1} f(d_2)^{-1} + f(i_2) f(d_1') f(d_1')^{-1} f(d_2)^{-1} = f(i_1 d_2' + i_2 d_1') f(d_2 d_1')^{-1}$. Оскільки $i_1 d_2' + i_2 d_1' \in J$ і $d_2 d_1' \in D$, то $x_1 + x_2 \in J_m$.

Тепер покажемо, що коли $x \in J_m$ і $\lambda \in R_m$, то $x\lambda \in J_m$. Нехай $x = f(i)f(d_1)^{-1}$ і $\lambda = f(r)f(d_2)^{-1}$, де $i \in J$; $r \in R$; $d_1, d_2 \in D$. Оскільки D - права множина Оре, то існують $r' \in R$, $d_1' \in D$ такі, що $f(d_1)^{-1}f(r) = f(r')f(d_1')^{-1}$. Ураховуючи це, дістаємо $x\lambda = f(i)f(d_1)^{-1}f(r)f(d_2)^{-1} = f(i)f(r')f(d_1')^{-1} \times f(d_2)^{-1} = f(ir')f(d_2 d_1')^{-1}$. Оскільки $ir' \in J$ і $d_2 d_1' \in D$, то $x\lambda \in J_m$.

Залишилось довести, що коли $x \in J_m$ і $\lambda \in R_m$, то $\lambda x \in J_m$. Нехай $x = f(i)f(d_1)^{-1}$ і $\lambda = f(r)f(d_2)^{-1}$, де $i \in J$; $r \in R$; $d_1, d_2 \in D$. Тепер $\lambda x = f(r)f(d_2)^{-1}f(i) \times f(d_1)^{-1}$. Оскільки кільце R задовольняє умову /ж/, то згідно з лемою 2 існують $i' \in J$ і $d_2' \in D$ такі, що $f(d_2)^{-1}f(i) = f(i')f(d_2')^{-1}$. Отже, $\lambda x = f(r)f(i')f(d_2')^{-1}f(d_1)^{-1} = f(ri')f(d_1 d_2')^{-1}$. Оскільки $ri' \in J$ і $d_1 d_2' \in D$, то $\lambda x \in J$.

Нехай (S, f) - кільце дробів кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D. Якщо $\mathcal{J}$ - ідеал кільця S, то $f^{-1}(\mathcal{J})$ позначимо множину $\{x \in R \mid f(x) \in \mathcal{J}\}$. Зрозуміло, що $f^{-1}(\mathcal{J})$ - ідеал кільця R.

Наведений далі результат є аналогом твердження I.I з [I] для правих дуокілець.

Лема 3. Нехай J - правий ідеал кільця R; $\mathcal{J}$ - ідеал кільця R_m. Тоді

/I/ $(f_m^{-1}(\mathcal{J}))_m = \mathcal{J}$;

/2/ $f_m^{-1}(J_m) \supset J$;

/3/ $J_m : f(r) \supset (J : r)_m$;

/4/ якщо $J_m = \mathcal{J}$, то $J \subset f_m^{-1}(\mathcal{J})$;

/5/ $f_m^{-1}(\mathcal{J}) : r = f^{-1}(\mathcal{J} : f_m(r))$;

/6/ існує ін'єктивне відображення гратки всіх ідеалів кільця R_m в гратку ідеалів кільця R, яке діє так:

$$J \to f_m^{-1}(J).$$

Доведення. /1/. Включення $(f_m^{-1}(J))_m \subset J$ очевидне. Покажемо, що $J \subset (f_m^{-1}(J))_m$. Нехай $j \in J$. Тоді $j = f_m(x) f_m(d)^{-1}$. Оскільки J - ідеал, то, домножуючи j на $f_m(d)$ справа, отримуємо $f_m(x) \in J$. Звідси $x \in f_m^{-1}(J)$. Отже,

$j = f_m(x) f_m(d)^{-1} \in (f_m^{-1}(J))_m$.

/2/ Нехай $i \in J$. Тоді $f_m(i) \in J_m$ і, отже, $i \in f_m^{-1}(J_m)$.

/3/ Нехай $f_m(x) f_m(d)^{-1} \in (J:r)_m$. Тоді $x \in J:r$, тобто $rx \in J$. Отже, $f_m(rx) = f_m(r) f_m(x) \in J_m$. Оскільки J_m - ідеал кільця R_m, то $f_m(r) f_m(x) f_m(d)^{-1} \in J_m$. Звідси $f_m(x) f_m(d)^{-1} \in$ $\in J_m : f_m(r)$.

/4/. Випливає з /2/.

/5/. Покажемо включення $f_m^{-1}(J):r \subset f_m^{-1}(J:f_m(r))$. Нехай $x \in f_m^{-1}(J):r$. Тоді $rx \in f_m^{-1}(J)$ і, отже, $f_m(rx) \in$ $\in J$. Звідси $f_m(r) f_m(x) \in J$ і тому $f_m(x) \in J : f_m(r)$. Отже, $x \in f_m^{-1}(J:f_m(r))$. Обернене включення перевіряється аналогічно.

/6/. Нехай J_1, J_2 - ідеали кільця R_m і $f_m^{-1}(J_1) = f_m^{-1}(J_2)$. Тоді $(f_m^{-1}(J_1))_m = (f_m^{-1}(J_2))_m$. Згідно з /1/ $(f_m^{-1}(J_1))_m = J_1$ і $(f_m^{-1}(J_2))_m = J_2$ і, отже, $J_1 = J_2$.

Передрадикальним фільтром кільця R називається непорожня сім'я $\mathcal{F}$ ідеалів кільця R, що задовольняє такі умови:

T1. Якщо $I \in \mathcal{F}$ і $I \subset J$, де J - ідеал в R, то $J \in \mathcal{F}$.

T2. Якщо $I \in \mathcal{F}$ і $J \in \mathcal{F}$, то $I \cap J \in \mathcal{F}$.

T3. Якщо $I \in \mathcal{F}$ і $r \in R$, то $(I:r) \in \mathcal{F}$.

Якщо крім цих умов виконується умова

Т4. Якщо $\mathcal{J}$ - ідеал кільця R і $\mathcal{J} \in \mathcal{F}$, причому $(\mathcal{J}:r) \in \mathcal{F}$ для будь-якого $r \in \mathcal{J}$, то $\mathcal{J} \in \mathcal{F}$ і $\mathcal{F}$ називається радикальним фільтром кільця R [5].

Для кільця R множину, що складається з усіх ненульових правих ідеалів кільця і їх скінченних добутків, позначатимемо $\mathcal{R}_o(R)$. Для первинних кілець $\mathcal{R}_o(R)$ - це множина всіх ненульвих ідеалів кільця R, для непервинних кілець $\mathcal{R}_o(R)$ - це множина всіх /включаючи нульовий/ ідеалів кільця R. Якщо R - праве дуокільце, то множина $\mathcal{R}(R)$ утворює радикальний фільтр кільця R.

<u>Означення</u>. Нехай $m \in mspec_r(R)$ і $\mathcal{F}$ - радикальний /передрадикальний/ фільтр кільця R. Тоді локалізацією радикального /передрадикального/ фільтра $\mathcal{F}$ відносно правого максимального ідеалу m називається сім'я $\mathcal{F}_m = \{\mathcal{J}_m \mid \mathcal{J} \in \mathcal{F}\}$.

Виникає питання: чи буде сім'я $\mathcal{F}_m$ радикальним /передрадикальним/ фільтром кільця R_m? Відповідь на це питання дає лема, наведена далі.

<u>Лема 4</u>. Нехай m - довільний правий максимальний ідеал кільця R і кільце R задовольняє умову /*/. Тоді має місце таке твердження: якщо $\mathcal{F}$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R, то $\mathcal{F}_m$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R_m.

<u>Доведення</u>. Покажемо спочатку, що коли $\mathcal{F}$ - передрадикальний фільтр кільця R, то $\mathcal{F}_m$ - передрадикальний фільтр кільця R_m. Нехай $\mathcal{F}$ - передрадикальний фільтр кільця R. Доведемо, що $\mathcal{F}_m$ - передрадикальний фільтр кільця R_m. Перевіримо Т1. Нехай $J \in \mathcal{F}_m$ і J' - ідеал кільця R_m такий, що $J \subset J'$. Тоді $J = \mathcal{J}_m$ для деякого ідеалу $\mathcal{J} \in \mathcal{F}$. Згідно з /2/ леми 3 $f_m^{-1}(J') \supset f_m^{-1}(J) = f_m^{-1}(\mathcal{J}_m) \supset \mathcal{J}$. За Т1 для передрадикального фільтра $\mathcal{F}$ $f_m^{-1}(J') \in \mathcal{F}$. Згідно з /1/ леми 3 $J' = (f_m^{-1}(J'))_m$ і, отже, $J' \in \mathcal{F}_m$. Тепер перевіримо Т2. Нехай $J_1, J_2 \in \mathcal{F}_m$. Тоді $J_1 = (\mathcal{J}_1)_m$ і $J_2 = (\mathcal{J}_2)_m$, де $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \in \mathcal{F}$. За Т2 для $\mathcal{F}$ маємо $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 \in \mathcal{F}$. Звідси $J_1 \cap J_2 = (\mathcal{J}_1)_m \cap (\mathcal{J}_2)_m = (\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2)_m \in \mathcal{F}_m$. Перевіримо Т3. Нехай $J \in \mathcal{F}_m$ і $x \in R$. Тоді $J = \mathcal{J}_m$,

де $J \in \mathcal{F}$; $x = f_m(r) f_m(d)^{-1}$. Оскільки $J : (f_m(r) f_m(d)^{-1}) = (J : f_m(r)) : f_m(d)^{-1}$, то достатньо показати, що $J : f_m(r) \in \mathcal{F}_m$ і $J : f_m(d)^{-1} \in \mathcal{F}_m$. Згідно з /3/ леми 3 і Т3 для $\mathcal{F}$ маємо $J : f_m(r) = J_m : f_m(r) \supset (J:r)_m \in \mathcal{F}_m$ і, отже, за Т1 для $\mathcal{F}_m$ маємо $J : f_m(r) \in \mathcal{F}_m$. Тепер покажемо, що $J : f_m(d)^{-1} \in \mathcal{F}_m$. Розглянемо множину $K = \{x \in R \mid f_m(d)^{-1} \times f_m(x) \subset J\}$. Легко побачити, що K утворює правий ідеал кільця R. Оскільки $J : f_m(d)^{-1} = \{f_m(x) f_m(d_1)^{-1} \mid f_m(d)^{-1} \times f_m(x) f_m(d_1)^{-1} \in J\} = \{f_m(x) f_m(d)^{-1} \mid f_m(d)^{-1} f_m(x) \in J\}$, то $K_m \supseteq J : f_m(d)^{-1}$. З $J \in \mathcal{F}_m$ випливає, що $J = J_m$, де $J \in \mathcal{F}$. Покажемо, що $J \subset K$, звідки за Т1 для $\mathcal{F}$ отримаємо, що $K \in \mathcal{F}$, а отже, $J : f_m(d)^{-1} \in \mathcal{F}_m$. Нехай $i \in J$. Тоді згідно з умовою /ж/ і лемою 2 існують $d' \in D$ і $i' \in J$ такі, що $id' = di'$. Тоді $f_m(id') = f_m(di')$. Звідси $f_m(d)^{-1} f_m(i) = f_m(i') f_m(d')^{-1} \in J_s = J$. Отже, $i \in K$. Тепер покажемо, що коли $\mathcal{F}$ – радикальний фільтр кільця R, то $\mathcal{F}_m$ – радикальний фільтр кільця R_m. Умови Т1–Т3 для $\mathcal{F}_m$ перевіряються так само, як для передрадикального фільтра. Перевіримо умову Т4. Нехай J – ідеал кільця R_m; $L \in \mathcal{F}_m$ і $(J : l) \in \mathcal{F}_m$ для всіх $l \in L$. Тоді $L = J_m$ для деякого $J \in \mathcal{F}$. Оскільки $f_m(J) \subset J_m = L$, то $J : f_m(i) \in \mathcal{F}_m$ для всіх $i \in J$. Таким чином, для кожного $i \in J$ існує правий ідеал K_i такий, що $(K_i)_m = J : f_m(i)$. Згідно з /5/ і /3/ леми 3 $(f_m^{-1}(J) : i) = f_m^{-1}(J : f_m(i)) = f_m^{-1}((K_i)_m) \supset K_i \in \mathcal{F}$ і, отже, $f_m^{-1}(J) : i \in \mathcal{F}$ за Т1 для $\mathcal{F}$. Використовуючи Т4 для $\mathcal{F}$, отримуємо $f_m^{-1}(J) \in \mathcal{F}$ і, отже, $J = (f_m^{-1}(J))_m \in \mathcal{F}_m$.

Тепер покажемо, що умову /ж/ в лемі 4 не можна послабити, тобто що вона є не тільки достатньою, а й необхідною.

<u>Лема 5</u>. Нехай $\mathfrak{M}$ - довільний правий максимальний ідеал кільця R і в кільці R вірне таке твердження: якщо $\mathcal{F}$ - передрадикальний фільтр кільця R, то $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ - передрадикальний фільтр кільця $R_{\mathfrak{M}}$. Тоді кільце R задовольняє умову /ж/.

<u>Доведення</u>. Нехай $\mathcal{I}$ - довільний правий ідеал кільця R; $\mathcal{F}$ - найменший передрадикальний фільтр кільця R, що містить правий ідеал $\mathcal{I}$. Тоді легко побачити, що $\mathcal{F} = \{ \mathcal{J}$ - ідеал кільця $R / \mathcal{J} \supset \mathcal{I}\}$. За умови леми $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ - передрадикальний фільтр кільця $R_{\mathfrak{M}}$. Оскільки $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ - передрадикальний фільтр, то $\mathcal{I}_{\mathfrak{M}} : f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$, де d - довільний елемент множини $D = R \setminus \mathfrak{M}$. Нехай $K = \{x \in R | \, f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} f_{\mathfrak{M}}(x) \in \mathcal{I}_{\mathfrak{M}}\}$. Очевидно, що K найбільше серед ідеалів $\mathcal{J}$ кільця R таких, що $\mathcal{J}_{\mathfrak{M}} = \mathcal{I}_{\mathfrak{M}} : f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1}$. Оскільки $\mathcal{I}_{\mathfrak{M}} : f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} \in \mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$, то серед цих ідеалів $\mathcal{J}$ хоча б один належить радикальному фільтру $\mathcal{F}$, а за умови TI для $\mathcal{F}$ і включення $\mathcal{J} \subset K$ отримуємо $K \in \mathcal{F}$. Звідси $\mathcal{I} \subset K$. Отже, для будь-якого $i \in \mathcal{I}$ маємо $f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} f_{\mathfrak{M}}(i) \in \mathcal{I}_{\mathfrak{M}}$, тобто існують $j \in \mathcal{I}$, $d_1 \in D$ такі, що $f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1} f_{\mathfrak{M}}(i) = f_{\mathfrak{M}}(j) f_{\mathfrak{M}}(d_1)^{-1}$. Тоді $f_{\mathfrak{M}}(id_1 - dj) = 0$, тобто $id_1 - dj \in \operatorname{Ker} f_{\mathfrak{M}}$. Згідно з умовою /3/ означення правого кільця дробів $R_{\mathfrak{M}}$ існує $d_2 \in D$ таке, що $(id_1 - dj) d_2 = 0$, тобто $id_1 d_2 - dj d_2 = 0$. Оскільки $\mathcal{I}$ - правий ідеал кільця R, то $i' = j d_2 \in \mathcal{I}$. З того, що D - мультиплікативно замкнена множина, випливає $d' = d_1 d_2 \in D$. Отже, виконується умова $\forall i \in \mathcal{I} \; \forall d \in D \; \exists i' \in \mathcal{I} \; \exists d' \in D : id' - di' = 0$. Згідно з лемою 2 ця умова еквівалентна умові /ж/.

<u>Твердження 2</u>. Нехай $\mathfrak{M}$ - довільний правий максимальний ідеал кільця R. Тоді в кільці R умова /ж/ виконується тоді і тільки тоді, коли в кільці R справджується таке твердження. З того, що $\mathcal{F}$ -

передрадикальний фільтр кільця R, випливає: $\mathcal{F}_m$ – передрадикальний фільтр кільця R_m.

Доведення. Випливає як наслідок лем 4 і 5.

Нехай $\mathcal{Y}$ – радикальний /передрадикальний/ фільтр кільця R_m. Позначимо $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ сім'ю $\{ J$ – правий ідеал кільця $R / J_m \in \mathcal{Y} \}$.

Твердження 3. Нехай m – правий максимальний ідеал кільця R; $\mathcal{Y}$ – передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R_m. Тоді $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ – передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R.

Доведення. Нехай $\mathcal{Y}$ – передрадикальний фільтр кільця R_m. Покажемо, що $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ – передрадикальний фільтр кільця R. Перевіримо спочатку T1. Нехай $J \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ і $\mathcal{J} \supset J$, де $\mathcal{J}$ – ідеал кільця R. Тоді $J_m \subset \mathcal{J}_m$. Оскільки $J_m \in \mathcal{Y}$, то згідно з T1 для $\mathcal{Y}$ маємо $\mathcal{J}_m \in \mathcal{Y}$. Отже, $\mathcal{J} \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$. Перевіримо T2. Нехай $J \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ і $\mathcal{J} \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$. Тоді $J_m \in \mathcal{Y}$ і $\mathcal{J}_m \in \mathcal{Y}$. Згідно з T2 для $\mathcal{Y}$ маємо $(J \cap \mathcal{J})_m = J_m \cap \cap \mathcal{J}_m \in \mathcal{Y}$. Звідси $J \cap \mathcal{J} \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$. Тепер перевіримо T3. Нехай $J \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ і $r \in R$. Оскільки R – праве дуокільце, то $(J : r) \supset J$. Згідно з T1 для $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ маємо $J : r \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$.

Тепер покажемо, що коли $\mathcal{Y}$ – радикальний фільтр кільця R_m, то $f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ – радикальний фільтр кільця R. Умови T1–T3 перевіряються так само, як у випадку передрадикального фільтра. Перевіримо T4. Нехай J – правий ідеал кільця R, $\mathcal{J} \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ і $(J : j) \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$ для всіх $j \in \mathcal{J}$. Згідно з /3/ леми 3 $J_m : f_m(j) \supset (J : j)_m \in \mathcal{Y}$ і, отже, $J_m : f_m(j) \in \mathcal{Y}$. Згідно з T3 для $\mathcal{Y}$ маємо $J_m : f_m(j) f_m(d)^{-1} = (J_m : f_m(j)) : f_m(d)^{-1} \in \mathcal{Y}$ для будь-якого $d \in R \setminus m$. Таким чином, $(J_m : x) \in \mathcal{Y}$ для всіх $x \in \mathcal{J}_m$. Згідно з T4 для $\mathcal{Y}$ маємо $J_m \in \mathcal{Y}$ і, отже, $J \in f_m^{-1}(\mathcal{Y})$.

Передрадикальний /радикальний/ фільтр назвемо ненульовим, якщо він складається лише з ідеалів, які належать $\mathcal{R}_0(R)$. Для первинних кілець це означає, що передрадикальний /радикальний/ фільтр не містить нульового ідеалу.

Позначимо $\mathcal{U}'_0(R)$ сім'ю всіх ненульових передрадикальних фільтрів кільця R, а $\mathcal{U}_0(R)$ - сім'ю всіх ненульових радикальних фільтрів кільця R. Нехай $m \in mspec_z(R)$. Тоді $\mathcal{U}'_0(R_m)$- сім'я всіх ненульових передрадикальних фільтрів кільця R_m, а $\mathcal{U}_0(R_m)$- сім'я всіх ненульових радикальних фільтрів кільця R_m.

Функцію $\Phi' : \mathcal{U}'_0(R) \to \prod\limits_{m \in mspec_z(R)} \mathcal{U}'_0(R_m)$ визначимо так: $\Phi'(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{F}_m \rangle_{m \in mspec_z(R)}$ для кожного $\mathcal{F} \in \mathcal{U}'_0(R)$.

Якщо визначене раніше відображення Φ' бієктивне, то кільце R називається кільцем з локально визначеними передкрученнями [3; 9].

Розглянемо тепер відображення

$$\Phi : \mathcal{U}_0(R) \to \prod_{m \in mspec_z(R)} \mathcal{U}_0(R_m),$$

визначене так: $\Phi(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{F}_m \rangle_{m \in mspec_z(R)}$ для кожного $\mathcal{F} \in \mathcal{U}_0(R)$.

Зазначимо, що Φ було визначене в [1] для комутативних областей цілісності. Якщо відображення Φ бієктивне, то кільце R називається кільцем з локально визначеними крученнями.

Кільце R називається h-локальним, якщо воно задовольняє такі умови:

/i/ кожний ненульовий правий первинний ідеал кільця R міститься в єдиному правому максимальному ідеалі;

/ii/ кожний ненульовий елемент з R міститься лише в скінченній кількості правих максимальних ідеалів [6].

Легко побачити, що коли в R є дільники нуля, то умова /ii/ еквівалентна умові, що в R існує лише скінченне число правих максимальних ідеалів.

Позначимо $\mathcal{B}$ множину всіх правих ідеалів кільця R, що містяться лише в скінченній кількості правих максимальних ідеалів кільця R. Легко побачити, що $\mathcal{B}$ - передрадикальний фільтр кільця R.

Визначимо на множині всіх правих ідеалів кільця R відображення λ, що ставить у відповідність кожному правому ідеалу $\mathcal{J}$ кільця R правий ідеал $K(\mathcal{I}) = \{x \in R \mid (\mathcal{I}:x) \in \mathcal{B}\}$. Покажемо, що $K(\mathcal{I})$ дійсно є правим ідеалом кільця R для кожного правого ідеалу $\mathcal{I}$ кільця R. Нехай x і y належать $K(\mathcal{I})$. Тоді $(\mathcal{I}:x) \in \mathcal{B}$ і $(\mathcal{I}:y) \in \mathcal{B}$. Оскільки $\mathcal{I}:(x+y) \supset (\mathcal{I}:x) \cap (\mathcal{I}:y)$, то $\mathcal{I}:(x+y) \in \mathcal{B}$. Таким чином, $x+y \in K(\mathcal{I})$. Тепер покажемо, що коли $x \in K(\mathcal{I})$ і z - будь-який елемент кільця R, то $x \cdot z \in K(\mathcal{I})$. Це випливає з включення $(\mathcal{I}:xz) = (\mathcal{I}:x):z \supset \mathcal{I}:x$. Оскільки $(\mathcal{I}:x) \in \mathcal{B}$, то $(\mathcal{I}:xz) \in \mathcal{B}$. Отже, $xz \in K(\mathcal{I})$.

Для будь-якого правого ідеалу $\mathcal{I}$ кільця R множину правих максимальних ідеалів кільця R, що містять $\mathcal{I}$, позначатимемо $V(\mathcal{I})$.

Має місце таке твердження.

<u>Лема 6</u>. Визначеному раніше відображенню K притаманні такі властивості:

/1/ Якщо $\mathcal{I}$ - правий ідеал кільця R, то $\mathcal{I} \subset K(\mathcal{I})$.

/2/ Якщо $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ - праві ідеали кільця R, то випливає таке:
/а/ якщо $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, то $K(\mathcal{I}) \subset K(\mathcal{J})$;

/б/ $K(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) = K(\mathcal{I}) \cap K(\mathcal{J})$;

/в/ $K(\mathcal{I})\,K(\mathcal{J}) \subset K(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J})$.

<u>Доведення</u>. Доведемо властивість 1. Нехай $i \in \mathcal{I}$. Тоді $(\mathcal{I}:i) = R$, оскільки $\mathcal{I}$ - правий ідеал кільця R. Отже, $i \in K(\mathcal{I})$. Тепер покажемо справджуваність 2а. Нехай $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ і $x \in K(\mathcal{I})$. Тоді $(\mathcal{I}:x) \subset (\mathcal{J}:x)$. Оскільки $x \in K(\mathcal{I})$, то $(\mathcal{I}:x) \in \mathcal{B}$, а отже, $(\mathcal{J}:x) \in \mathcal{B}$. Таким чином, $x \in K(\mathcal{J})$. Перевіримо властивість 2б. Нехай $x \in K(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$. Тоді $((\mathcal{I} \cap \mathcal{J}):x) \in \mathcal{B}$. Оскільки $((\mathcal{I} \cap \mathcal{J}):x) \subset (\mathcal{I}:x)$ і $((\mathcal{I} \cap \mathcal{J}):x) \subset (\mathcal{J}:x)$, то $(\mathcal{I}:x) \in \mathcal{B}$ і $(\mathcal{J}:x) \in \mathcal{B}$. Отже, $x \in K(\mathcal{I})$ і $x \in K(\mathcal{J})$, тобто $x \in K(\mathcal{I}) \cap K(\mathcal{J})$. Таким чином, $K(\mathcal{I} \cap \mathcal{J}) \subset K(\mathcal{I}) \cap K(\mathcal{J})$. Тепер покажемо обернене включення $K(\mathcal{I}) \cap K(\mathcal{J}) \subset K(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$. Легко побачити,

що має місце рівність $((\mathcal{I}\cap\mathcal{J}):x)=(\mathcal{I}:x)\cap(\mathcal{J}:x)$. Нехай $x\in K(\mathcal{I})\cap K(\mathcal{J})$. Тоді $(\mathcal{I}:x)\in\mathcal{B}$ і $(\mathcal{J}:x)\in\mathcal{B}$. Отже, $((\mathcal{I}\cap\mathcal{J}):x)=(\mathcal{I}:x)\cap(\mathcal{J}:x)\in\mathcal{B}$. Таким чином, $x\in K(\mathcal{I}\cap\mathcal{J})$. Тепер доведемо 2в. Нехай $z\in K(\mathcal{I})K(\mathcal{J})$. Тоді $z=xy$, де $x\in K(\mathcal{I})$; $y\in K(\mathcal{J})$. Покажемо, що $z\in K(\mathcal{I}\cdot\mathcal{J})$, тобто $((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}):z)\in\mathcal{B}$. Оскільки $x\in K(\mathcal{I})$, $y\in K(\mathcal{J})$, то $(\mathcal{I}:x)\in\in\mathcal{B}$ і $(\mathcal{J}:y)\in\mathcal{B}$. Виберемо $d_1\in(\mathcal{I}:x)$ і $d_2\in(\mathcal{J}:y)$ такі, що $d_1,d_2\notin m$, де $m\notin V(\mathcal{I}:x)\cup V(\mathcal{J}:y)$. Оскільки кільце R задовольняє умову /ж/, то для елементів $yd_2\in\mathcal{J}$ і $d_1\notin m$ існують елементи $j\in\mathcal{J}$ і $d_1'\notin m$ такі, що $yd_2d_1'=d_1j$. Покажемо, що $d_2d_1'\in((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}):z)$. Дійсно, $zd_2d_1'==xyd_2d_1'=xd_1j\in\mathcal{I}\mathcal{J}$. Отже, оскільки $d_2d_1'\notin m$, то $((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J})::z)\notin m$. Таким чином, $V((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}):z)\subset V(\mathcal{I}:x)\cup V(\mathcal{J}:y)$ і, отже, $((\mathcal{I}\cdot\mathcal{J}):z)\in\mathcal{B}$, тобто $z\in K(\mathcal{I}\cdot\mathcal{J})$.

Для кожного елемента a з R визначимо $K(a)=K(aR)$.

Означення. Кільце R називається h-квазілокальним, якщо воно задовольняє умову /і/ з означення h-локального кільця, а замість умови /іі/ має місце така умова:
/іі'/ для кожного ненульового елемента a з R маємо $K(a)\in\mathcal{B}$.

Зауваження. I. Якщо в R є дільники нуля і R задовольняє умову /іі'/, то існує скінченна множина правих максимальних ідеалів $\{m_1,m_2,\dots,m_n\}$ кільця R така, що для будь-якого ненульового елемента a з R: $V(K(a))\subset\{m_1,m_2,\dots,m_n\}$ /це випливає з того, що $K(0)\in\mathcal{B}$/.

2. Умова /іі'/ еквівалентна такій умові: для кожного ненульового правого ідеалу $\mathcal{I}$ кільця R маємо $K(\mathcal{I})\in\mathcal{B}$.

Очевидно, що кожне h-локальне кільце є h-квазілокальним. У [9] наведено приклад, який показує, що з h-квазілокальності не випливає h-локальність. За допомогою прикладу показано також, що з умови /і/ h-квазілокальності не випливає умова /іі'/.

Лема 7. Нехай m_1, m_2 - довільні праві максимальні ідеали кільця R і для будь-яких $t_1\notin m_1$ та $t_2\notin m_2$ маємо

$t_1t_2\neq 0$. Тоді множина $T=(R\setminus m_1)(R\setminus m_2)$ є мультиплікативно замкненою множиною кільця R.

Доведення. Елементи множини T можуть бути подані так:

а/ $d_1d_1'd_2d_2'\dots d_nd_n'$, де $d_1,d_2,\dots,d_n\notin m_1, d_1',d_2',\dots,d_n'\notin m_2$;

б/ $d_1'd_1d_2'd_2\dots d_k'd_k$, де $d_1,d_2,\dots,d_k\notin m_1, d_1',d_2',\dots,d_k'\notin m_2$,

в/ $d_1d_1'd_2d_2'\dots d_{\ell-1}d_{\ell-1}'d_\ell$, де $d_1,d_2,\dots,d_\ell\notin m_1, d_1',d_2',\dots,d_{\ell-1}'\notin m_2$;

г/ $d_1'd_2d_2'\dots d_m d_m'$, де $d_2,d_3,\dots,d_m\notin m_1, d_1',d_2',\dots,d_m'\notin m_2$.

Помножуючи попарно елементи вигляду а-г, отримуємо елементи вигляду а-г. Отже, множина T замкнена відносно множення. Очевидно, що $1\in T$. Тепер покажемо, що $0\notin T$. Припустимо супротивне. Нехай елемент вигляду а/ дорівнює нулю: $d_1d_1'd_2d_2'\dots d_id_i'\dots d_nd_n'=0$. Індукцією за i покажемо, що тоді існують елементи $t_1\notin m_1$ і $t_2\notin m_2$ такі, що $t_1t_2=0$. Нехай $i=1$. Тоді $d_1d_1'=0$, де $d_1\notin m_1$; $d_1'\notin m_2$, що й треба було довести. Тепер припустимо, що наше твердження справджується для $i=n-1$, і покажемо, що воно має місце при $i=n$. Нехай $d_1d_1'd_2d_2'\dots d_nd_n'=0$. Оскільки кільце R задовольняє умову /ж/, то для елементів $d_n'\in R$ і $d_n\notin m_1$ існують елементи $c_1\in R$ і $d_n''\notin m_1$ такі, що $d_n'd_n''=d_nd_n'c$. Оскільки $d_1d_1'd_2d_2'\dots d_nd_n'c=0$, то $d_1d_1'd_2d_2'\dots d_n'd_n''=0$. Використовуючи ще раз умову /ж/, отримуємо, що для елементів $d_1\notin m_1$ і $d_1'd_2d_2'\dots d_{n-1}'d_n'd_n''\in R$ існують елементи $c_2\in R$ і $d_1''\notin m_1$ такі, що

$$d_1'd_2d_2'\dots d_{n-1}'d_n'd_n''d_1''=d_1d_1'd_2d_2'\dots d_{n-1}'d_n'd_n''c_2.$$

Оскільки $d_1d_2'd_2d_2'\dots d_{n-1}'d_n'd_n''=0$, то $d_1'd_2d_2'\dots d_{n-1}'d_n'd_n''d_1''=0$. Аналогічно, скориставшись умовою /ж/, можна показати, що існує $d_1'''\in m_2$ таке, що

$d_2 d_2' \dots d_{n-1}' d_n' d_n'' d_1'' d''' = 0$. Отже, існують $S_1 = d_2, S_2 = d_3, \dots$
$\dots, S_{n-2} = d_{n-1}, S_{n-1} = d_n'' d_1'', S_1' = d_2', S_2' = d_3', \dots, S_{n-2}' = d_{n-1}' d_n'$,
$S_{n-1}' = d_1'''$ такі, що $S_1 S_1' S_2 S_2' \dots S_{n-1} S_{n-1}' = 0$, де $S_1, S_2, \dots$
$\dots, S_{n-1} \notin m_1$; $S_1', S_2', \dots, S_{n-1}' \in m_2$. Отже, за припущенням індукції існують $t_1 \notin m_1$ і $t_2 \notin m_2$ такі, що $t_1 t_2 = 0$, а це суперечить умові леми. Аналогічно можна показати, що елементи множини T вигляду б-г також не можуть дорівнювати нулю. Отже, $0 \notin T$ і множина T є мультиплікативно замкненою множиною кільця R.

Лема 8. Нехай R - кільце, в якому кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі. Тоді для довільного власного правого ідеалу J /$J \neq 0$, коли R - первинне кільце/ і будь-якого $m \in mspec_r(R)$ правий ідеал $f_m^{-1}(J_m)$ міститься в єдиному правому максимальному ідеалі m, якщо m містить J і $f_m^{-1}(J_m) = R$, якщо m не містить J.

Доведення. Якщо $J \not\subset m$ для деякого $m \in mspec_r(R)$, то $f_m^{-1}(J_m) = R$, оскільки в J_m існує обернений елемент і, отже, $J_m = R_m$. Тепер розглянемо такі $m \in mspec_r(R)$, які містять J. Покажемо, що $f_m^{-1}(J_m)$ для таких m міститься в єдиному правому максимальному ідеалі, а саме в m.

Розглянемо два випадки:

1/ R має дільники нуля;

2/ R не має дільників нуля.

Перший випадок. Нехай R має дільники нуля. Покажемо, що з того, що в R кожний правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі, випливає: для будь-яких правих максимальних ідеалів m_1 і m_2 існують елементи $z_1 \notin m_1$ і $z_2 \notin m_2$ такі, що $z_1 \cdot z_2 = 0$. Припустимо супротивне, тобто що для всіх $z_1 \notin m_1$ і $z_2 \notin m_2$ маємо $z_1 \cdot z_2 \neq 0$. Розглянемо множину $T = (R \setminus m_1) \times (R \setminus m_2)$. Згідно з лемою 7 множина T є мультиплікативно замкненою множиною кільця R. Тепер покажемо, що правий ідеал P, максимальний серед правих ідеалів J кільця R таких, що $J \cap T = \phi$, є первинним. Нехай $aRb \subset p$. Покажемо, що $a \in p$ або $b \in p$. Припустимо супротивне: $a \notin p$ і $b \notin p$. Тоді $p + aR \supsetneqq p$ і $p + bR \supsetneqq p$. Оскільки R – дуокільце, то p двобічний і $(p+aR) \times (p+bR) \subset p$. Оскільки p максимальний серед правих ідеалів J, що не перетинаються з T і $p+aR \supsetneqq p$, $p+bR \supsetneqq p$, то існують $t_1 \in (p+aR) \cap T$ і $t_2 \in (p+bR) \cap T$. Тоді $t_1 t_2 \in p$, оскільки $(p+aR)(p+bR) \subset p$, і $t_1 t_2 \in T$, оскільки T – мультиплікативно замкнена множина кільця R. Отримано $p \cap T \neq \emptyset$, що суперечить вибору p. Таким чином, $a \in p$ або $b \in p$ і, отже, правий ідеал p первинний. Оскільки в R є дільники нуля, то нульовий ідеал не первинний і, отже, $p \neq 0$. Але в такому випадку p ненульове і міститься в двох різних правих максимальних ідеалів m_1 і m_2. Це суперечить умові, що кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі. Таким чином, для будь-яких правих максимальних ідеалів m_1 і m_2 існують елементи $r_1 \notin m_1$ і $r_2 \notin m_2$ такі, що $r_1 \cdot r_2 = 0$. Нехай m – деякий правий максимальний ідеал кільця R. Тоді для будь-якого іншого правого максимального ідеалу m' існують елементи $r \notin m$ і $r' \notin m'$ такі, що $r'r = 0$. Нехай f_m – канонічний гомоморфізм з R у R_m. За означенням $Ker f_m = \{x \in R \mid \exists r \notin m \; xr = 0\}$. З викладеного випливає, що $Ker f_m \not\subset m'$ для будь-якого правого максимального ідеалу $m' \neq m$. Оскільки $f_m^{-1}(J_m) \supset Ker f_m$ і J – власний правий ідеал кільця R, що міститься в m, то $f_m^{-1}(J_m)$ міститься в єдиному правому максимальному ідеалі, а саме в m.

<u>Другий випадок</u>. Нехай R не має дільників нуля і J – будь-який власний правий ненульовий ідеал кільця R. Якщо J первинний, то за умови леми він лежить в єдиному правому максимальному ідеалі m. Оскільки $J \subset f_m^{-1}(J_m)$ /згідно з /2/ леми 3.,, то $f_m^{-1}(J_m)$ також міститься лише в одному правому максимальному ідеалі, а саме в m. Тому припустимо, що J – непервинний правий ідеал кільця R. Тоді кільце R/J містить дільники нуля. Максимальними правими ідеалами в R/J є ідеали вигляду m/J, де $m \in mspec_r(R)$

і $\mathfrak{m}$ містить J. Зазначимо, що R/J також притаманна така властивість, що кожний його ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі. Нехай $\mathfrak{m}$ - деякий правий максимальний ідеал кільця R, що містить J. Розглянемо канонічний гомоморфізм $f_{\mathfrak{m}/J}: R/J \to (R/J)_{\mathfrak{m}/J}$. Тоді, як і в першому випадку, доводимо, що $Ker f_{\mathfrak{m}/J} \not\subset \mathfrak{m}'/J$, де $\mathfrak{m}'$ - правий максимальний ідеал, що містить J, відмінний від $\mathfrak{m}$. Оскільки $Ker f_{\mathfrak{m}/J} = f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J_{\mathfrak{m}})/J$, то $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J_{\mathfrak{m}}) \not\subset \mathfrak{m}'$ для будь-якого правого максимального ідеалу $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$. Таким чином, лему доведено.

<u>Наслідок</u>. Для будь-якого власного ідеалу J кільця $R_{\mathfrak{m}}$ $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(J)$ міститься лише в одному правому максимальному ідеалі, а саме в $\mathfrak{m}$.

<u>Лема 9</u>. Нехай $\mathcal{U}[\mathfrak{m}]$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця $R_{\mathfrak{m}}$ для кожного $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$. Тоді $\mathcal{F} = \{J \mid J$ - правий ідеал кільця R і $J_{\mathfrak{m}} = \mathcal{U}[\mathfrak{m}]$ для всіх $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)\}$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R.

<u>Доведення</u>. Згідно з твердженням 3 $f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{U}[\mathfrak{m}])$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R для кожного $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)$. Очевидно, що $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in mspec_r(R)} f_{\mathfrak{m}}^{-1}(\mathcal{U}[\mathfrak{m}])$. Оскільки переріз будь-якого числа передрадикальних фільтрів /радикальних фільтрів/ є передрадикальним /радикальним/ фільтром, то $\mathcal{F}$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R.

<u>Лема 10</u>. Будь-який ненульовий правий первинний ідеал кільця R міститься лише в одному правому максимальному ідеалі кільця R тоді і тільки тоді, коли $\Phi(\Phi')$ сюр'єктивне.

<u>Доведення</u>. Припустимо, що кожний ненульовий правий первинний ідеал кільця R міститься в єдиному правому максимальному ідеалі кільця R. Нехай $\langle \mathcal{U}[\mathfrak{m}] \rangle \in \prod_{\mathfrak{m} \in mspec_r(R)} \mathcal{U}_o'(R_{\mathfrak{m}}) \left(\prod_{\mathfrak{m} \in mspec_r(R)} \mathcal{U}_o'(R_{\mathfrak{m}}) \right)$. Визначимо $\mathcal{F} = \{J \mid J$ - правий ідеал кільця R і $J_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{U}[\mathfrak{m}]$ для всіх $\mathfrak{m} \in mspec_r(R)\}$. Згідно з лемою 9 $\mathcal{F}$ - передрадикальний

/радикальний/ фільтр кільця R. Нехай $\mathfrak{m} \in mspec_2(R)$. Покажемо, що $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{W}[\mathfrak{m}]$. Включення $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{W}[\mathfrak{m}]$ очевидне. Перевіримо включення $\mathcal{W}[\mathfrak{m}] \subset \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$. Нехай $J \in \mathcal{W}[\mathfrak{m}]$. Тоді згідно з наслідком леми 8 $f_m^{-1}(J)$ міститься лише в одному правому максимальному ідеалі кільця R, а саме в m. Звідси випливає, що $(f_m^{-1}(J))_m = J$ і $(f_m^{-1}(J))_{m'} = R_{m'}$ для будь-якого $m' \in mspec_2(R) \setminus \{m\}$. Отже, $f_m^{-1}(J) \in \mathcal{F}$. Оскільки згідно з /I/ леми 3 $J = (f_m^{-1}(J))_m$, то $J \in F_m$.

Припустимо, навпаки, що R - кільце, в якому існує ненульовий правий первинний ідеал P такий, що $P \subset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$, де $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in mspec_2(R)$, $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$. Нехай $\mathcal{F} = \{J / J$ - правий ідеал кільця R і $P \not\supset J\}$. Тоді легко побачити, що $\mathcal{F}$ - передрадикальний /радикальний/ фільтр кільця R. Для всіх $\mathfrak{m} \in mspec_2(R) \setminus \{\mathfrak{m}_2\}$ розглянемо передрадикальні /радикальні/ фільтри $\mathcal{W}[\mathfrak{m}] = \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$. Для $\mathfrak{m}_2$ розглянемо передрадикальний /радикальний/ фільтр $\mathcal{W}[\mathfrak{m}_2] = \mathcal{R}_o(R_{\mathfrak{m}})$. Покажемо, що $\langle \mathcal{W}[\mathfrak{m}] \rangle \in \prod_{\mathfrak{m} \in mspec_2(R)} \mathcal{W}_o(R_{\mathfrak{m}})$ не є образом жодного радикального фільтра в разі відображення $\Phi(\Phi')$. Припустимо протилежне, тобто що існує $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{W}_o(R)$ такий, коли $\Phi(\mathcal{F}_1) = \langle \mathcal{W}[\mathfrak{m}] \rangle$ $(\Phi'(\mathcal{F}) = \langle \mathcal{W}[\mathfrak{m}] \rangle)$. Тоді $(\mathcal{F}_1)_{\mathfrak{m}} = \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$ для всіх $\mathfrak{m} \in mspec_2(R) \setminus \{\mathfrak{m}_2\}$ $(\mathcal{F}_1)_{\mathfrak{m}_2} = \mathcal{W}[\mathfrak{m}_2]$. Оскільки $\mathcal{W}[\mathfrak{m}_2] = \mathcal{R}_o(R)$, то $P_{\mathfrak{m}_2} \in \mathcal{W}[\mathfrak{m}_2]$ і, отже, $P = f_{\mathfrak{m}_2}^{-1}(P_{\mathfrak{m}_2}) \in \mathcal{F}_1$. Отже, $P_{\mathfrak{m}_1} \in (\mathcal{F}_1)_{\mathfrak{m}_1} = \mathcal{W}[\mathfrak{m}_1]$ і $P = f_{\mathfrak{m}_1}^{-1}(P_{\mathfrak{m}_1}) \in \mathcal{F}$. Отримуємо $P \not\supset P$. Ця суперечність показує, що $\Phi(\Phi')$ не є сюр'єктивним.

Лема 11. Нехай R - кільце, в якому кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі. Тоді для будь-якого ненульового передрадикального фільтра $\mathcal{F}$ існує передрадикальний фільтр $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{B}$ такий, що $\Phi'(\mathcal{F}) = \Phi'(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$, тобто $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}} = (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_{\mathfrak{m}}$ для кожного $\mathfrak{m} \in mspec_2(R)$.

Доведення. Зауважимо, що згідно з /2/ леми 3 для будь-якого правого ідеалу $\mathcal{J}$ кільця R і для будь-якого $\mathcal{M} \in mspec_r(R)$ маємо $\mathcal{J} \subset f_m^{-1}(\mathcal{J}_m)$. Нехай $\mathcal{J} \in \mathcal{F}$. Тоді $f_m^{-1}(\mathcal{J}_m) \in \mathcal{F}$ згідно з TI для $\mathcal{F}$ /для всіх $\mathcal{M} \in mspec_r(R)$/. Оскільки в R кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі, то згідно з лемою 8 $f_m^{-1}(\mathcal{J}_m)$ міститься не більше ніж в одному максимальному ідеалі, тобто $f_m^{-1}(\mathcal{J}_m) \in \mathcal{B}$. Візьмемо як $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ передрадикальний фільтр $\mathcal{F} \cap \mathcal{B}$. Тоді $f_m^{-1}(\mathcal{J}_m) \in \mathcal{B}_\mathcal{F}$ для будь-якого правого максимального ідеалу $\mathcal{M}$ кільця R. Оскільки $\mathcal{J}_m = (f_m^{-1}(\mathcal{J}_m))_m$, то $\mathcal{J}_m \in (\mathcal{B}_\mathcal{F})_m$ для будь-якого $\mathcal{M} \in mspec_r(R)$. Таким чином, $\mathcal{F}_m \subset (\mathcal{B}_\mathcal{F})_m$ для кожного $\mathcal{M} \in mspec_r(R)$. Включення $(\mathcal{B}_\mathcal{F})_m \subset \mathcal{F}_m$ для кожного $\mathcal{M} \in mspec_r(R)$ очевидне, оскільки $\mathcal{B}_\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$. Отже, $\mathcal{F}_m = (\mathcal{B}_\mathcal{F})_m$ для будь-якого правого максимального ідеалу $\mathcal{M}$, що й треба було довести.

Лема I2. $\bigcap\limits_{\mathcal{M} \in mspec_r(R)} \ker f_m = 0.$

Доведення. Нехай $r \in \bigcap\limits_{\mathcal{M} \in mspec_r(R)} \ker f_m$. Тоді для кожного $\mathcal{M} \in mspec_r(R)$ існує $\alpha \notin \mathcal{M}$ таке, що $r\alpha = 0$. Звідси випливає, що $Ann_r(r) \not\subset \mathcal{M}$ для будь-якого $\mathcal{M} \in mspec_r(R)$. Отже, $Ann_r(r) = R$. Оскільки R - кільце з $1 \neq 0$, то $r = 0$.

Теорема I. Кільце R є кільцем з локально визначеними передкрученнями тоді і тільки тоді, коли воно h-локальне.

Доведення. $(\Rightarrow)$. Із сюр'єктивності φ' згідно з лемою I0 випливає, що в R кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі. Тепер покажемо, що в R кожний ненульовий елемент x міститься лише в скінченному числі правих максимальних ідеалів. Розглянемо передрадикальний фільтр $\mathcal{F} = \{ \mathcal{J}$ - правий ідеал в $R \mid \mathcal{J} \supset xR\}$. Згідно з лемою II існує передрадикальний фільтр $\mathcal{B}_\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ такий, що $(\mathcal{B}_\mathcal{F})_m = \mathcal{F}_m$ для будь-якого $\mathcal{M} \in mspec_r(R)$. Оскільки φ' ін'єктивне, то $\mathcal{B}_\mathcal{F} = \mathcal{F}$. Отже, $xR \in \mathcal{B}$.

$(\Longleftarrow)$. Нехай кожний ненульовий правий ідеал кільця R міститься лише в скінченному числі правих максимальних ідеалів і $(\mathcal{B}_1)_m = (\mathcal{B}_2)_m$ для всіх $m \in mspec_2(R)$, де $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ - передрадикальні фільтри в кільці R. Покажемо, що $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. Спочатку доведемо, що $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Нехай $J \in \mathcal{B}_1$. Тоді для кожного $m \in mspec_2(R)$ існує $J \in \mathcal{B}_2$ такий, що $J_m = J_m$. Оскільки згідно з /2/ і /6/ леми 3 $J \subset f_m^{-1}(J_m) = f_m^{-1}(J_m)$, то $f_m^{-1}(J_m) \in \mathcal{B}_2$ за Т1 для $\mathcal{B}_2$ для довільного $m \in mspec_2(R)$. Зазначимо, що $J = \bigcap\limits_{m \in mspec_2(R)} f_m^{-1}(J_m)$. Справді, $f_m^{-1}(J_m) = J + Ker f_m$. Отже, згідно з лемою 12

$$\bigcap_{m \in mspec_2(R)} f_m^{-1}(J_m) = \bigcap_{m \in mspec_2(R)} (J + Ker f_m) =$$
$$= J + \bigcap_{m \in mspec_2(R)} Ker f_m = J.$$

Оскільки J міститься лише в скінченному числі максимальних ідеалів $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то $J = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_{m_i}^{-1}(J_{m_i})$. Згідно з Т2 для $\mathcal{B}_2$ маємо $J \in \mathcal{B}_2$. Аналогічно доводиться, що $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$. Таким чином, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. Сюр'єктивність Φ' випливає з умови, що кожний ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі /згідно з лемою 10/.

Кільця з локально визначеними передкрученнями є лише підкласом класу кілець з локально визначеними крученнями. Тому більший інтерес становлять кільця з локально визначеними крученнями.

Лема 13. Кільце R є кільцем з локально визначеними крученнями тоді і тільки тоді, коли R задовольняє умову, що кожний його ненульовий правий первинний ідеал міститься в єдиному правому максимальному ідеалі, а також коли для будь-якого ненульового радикального фільтра $\mathcal{F}$ кільця R маємо $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_\mathcal{F})$, де $\mathcal{B}_\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$; $\mathcal{J}(\mathcal{B}_\mathcal{F})$ - мінімальний радикальний фільтр кільця R, що містить $\mathcal{B}_\mathcal{F}$.

Доведення. $(\Longrightarrow)$. Із сюр'єктивності Φ згідно з лемою 10 випливає, що в R кожний ненульовий правий первинний ідеал міститьсяся в єдиному правому максимальному ідеалі. Нехай $\mathcal{F}$ - деякий радикальний фільтр кільця R. Тоді згідно з лемою II існує $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$ такий, що $\mathcal{F}_m = (\mathcal{B}_{\mathcal{F}})_m$ для будь-якого $m \in mspec_r(R)$. Оскільки $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) \subset \mathcal{F}$, то $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}_m$ для будь-якого $m \in mspec_r(R)$. З ін'єктивності Φ випливає, що $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$.

Нехай $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ - деякі ненульові радикальні фільтри кільця R такі, що $(\mathcal{F}_1)_m = (\mathcal{F}_2)_m$ для будь-якого $m \in mspec_r(R)$. Тоді згідно з лемою II $(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1})_m = (\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2})_m$ для кожного $m \in mspec_r(R)$. Оскільки кожний правий ідеал з $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1}$ і $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2}$ міститься лише в скінченному числі правих максимальних ідеалів кільця R, то як і в разі доведення теореми I отримуємо $\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}_2}$. Звідси випливає, що $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_1}) = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}_2})$. Отже, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. Сюр'єктивність випливає з леми I0.

Лема I4. У кільці R для будь-якого ненульового радикального фільтра $\mathcal{F}$ маємо $\mathcal{F} = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого ненульового ідеалу J кільця R $K(J) \in \mathcal{B}$.

Доведення. $(\Rightarrow)$. Нехай $\mathcal{R}_o(R)$ - радикальний фільтр усіх ідеалів кільця R /ненульових, якщо R первинне/. Тоді $\mathcal{R}_o(R) = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{R}_o(R)})$. Відомо, що коли $\mathcal{F}$ - передрадикальний фільтр, то мінімальний радикальний фільтр, який його містить, має вигляд
$\mathcal{J}(\mathcal{F}) = \{ J$ - правий ідеал у $R \mid \exists\, \mathcal{J} \in \mathcal{F}\ J \subset \mathcal{J}$ і $J:j \in \mathcal{F}\ \forall j \in \mathcal{J}\}$ [5]. Оскільки $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_o(R)} = \mathcal{B}$, то $\mathcal{R}_o(R) = \{ J$ - правий ідеал у $R \mid \exists\, \mathcal{J} \in \mathcal{B}\ J \subset \mathcal{J}$ і $J:j \in \mathcal{B}\ \forall j \in \mathcal{J}\}$. Оскільки $\mathcal{J} \subset K(J)$, то $\mathcal{R}_o(R) = \{ J$ - правий ідеал у $R \mid K(J) \in \mathcal{B}\}$. Отже, для будь-якого ненульового ідеалу J кільця R $K(J) \in \mathcal{B}$.

$(\Leftarrow)$. Нехай для будь-якого ненульового ідеалу J кільця R маємо $K(J) \in \mathcal{B}$. Якщо R має дільники нуля, то $K(0) \in \mathcal{B}$. У такому разі $\mathcal{R}_o(R) = \{ J$ - правий ідеал у $R \mid K(J) \in \mathcal{B}\}$. Отже, $\mathcal{R}_0(R) = \mathcal{J}(\mathcal{B})$. Нехай $\mathcal{F}$ - довільний ненульовий радикальний фільтр у R. Тоді $\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap \mathcal{R}_0(R) = \mathcal{F} \cap \mathcal{J}(\mathcal{B}) = \mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$. Таким чином, лему доведено.

З лем I3 і I4 випливає справджуваність такого твердження:

Теорема 2. Кільце R є кільцем з локально визначеними крученнями тоді і тільки тоді, коли воно h-квазілокальне.

Список літератури

1. Brandal W., Barbut E. Localizations of torsion theoris // Pacific J. Math., 1983.-107.-N1.-P. 27-37.

2. Larsen M., Mccarthy P. Multiplicative theory of ideals // Acad. press.- N. Y. - London, 1971.- P. 61-74.

3. Тушницкий И.Я. Кольца с локально определенными кручениями // Международ.конф. по алгебре. Тез.докладов по теории колец, алгебр и модулей. - Новосибирск, 1989. - С. I35.

4. Brandal W. Constructing Bezout domains, Rocky Mountain // Math. J., 1976.- 6.- P. 383-399.

5. Stenström B. Rings and modules of quotients. - Springer - Verlag. - Berlin - N. Y., 1975.

6. Matlis E. Decomposable modules // Trans. Amer. Math. Soc., 1966. - 125.- P. 147-179.

7. Henriksen H. On the prime ideals of the ring of entire functions // Pacific J. Math., 1953. - 3.- P. 711-720.

8. Heinzer W., Ohm. Locally Noetherian commutative rings // Trans. Amer. Math. Soc., 1971.- 158.- P. 273-284.

9. Тушницкий И.Я. Кольца с локально определенными кручениями // Алгебра и логика, I99I. - 30. - № 3. - С. 369-377.

I5 - 207