УДК 511.364

Я.М.Холявка

НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ ЧИСЕЛ, ЗВ'ЯЗАНИХ З $sn\,z$

Нехай $sn\,z$ – еліптична функція Якобі. У подальшому будемо дотримуватись таких позначень [1]: $\varkappa$ – модуль; 4ω, $2\omega'$ – довільна фіксована пара періодів $sn\,z$. З теореми Шнайдера [2] та властивостей $sn\,z$ [1, с. 235] отримаємо, що при $\varkappa \in \mathbb{A}$ числа ω та ω' трансцендентні. Позначимо $\xi_1, \ldots, \xi_4$ наближаючі алгебраїчні числа: n_i, L_i – їх степені та довжини. Доведемо таку теорему.

<u>Теорема</u>. Нехай $\varkappa \in \mathbb{A}$; β – число, відмінне від полюсів. Тоді

$$|\omega-\xi_1|+|\omega'-\xi_2|+|\beta-\xi_3|+|sn\beta-\xi_4|>\exp(-\Lambda n^4 M^4 \ln^4(nM)), \quad (1)$$

де Λ – деяка ефективна стала; $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \ldots, \xi_4)$; $M = 1 + \sum_{i=1}^{4} n_i^{-1} \ln L_i$.

Сформулюємо деякі властивості $sn\,z$.

<u>Лема 1</u>. Нехай $s, \ell \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(sn^{\ell} z)^{(s)} = \mathcal{D}_{s,\ell}(\varkappa, sn\,z, sn'z),$$

де $\mathcal{D}_{s,\ell} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$, $\deg_{x_1} \mathcal{D}_{s,\ell} \le s$, $\deg_{x_2} \mathcal{D}_{s,\ell} \le s+\ell$, $\deg_{x_3} \mathcal{D}_{s,\ell} \le 1$, $L(\mathcal{D}_{s,\ell}) \le 4^s 2^{\ell}(s+\ell)!$

<u>Лема 2</u>. Нехай $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, $P(x_1, x_2) \not\equiv 0$ – многочлен степеня, що перевищує $\mathcal{D}_1$ за x_1 і $\mathcal{D}_2$ – за x_2, $\mathcal{D}_2 \ge 1$, $a \in \mathbb{C}$. Тоді функція $F(z) = P(z, sn(z+a))$ має не більше $8\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 + 4\mathcal{D}_2 + 2$ нулів.

Доведення цих тверджень подібні до доведень відповідних властивостей еліптичної функції Вейєрштрасса [3; 4].

<u>Доведення</u>. Припустимо, що для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$

$$|\omega-\xi_1|+|\omega'-\xi_2|+|\beta-\xi_3|+|\operatorname{sn}\beta-\xi_4|<\exp(-\lambda^8 n^4 M^4 \ln^4(nM)). \quad /2/$$

Нехай $\wp(z)$ - еліптична функція Вейєрштрасса з основними періодами 2ω, $2\omega'$; $\sigma(z)$ - відповідна σ -функція,
$|f|_D = \sup_{z\in D}|f(z)|$, $L(P)$, $\deg_{x_k} P$ - довжина і степінь за змінною x_k многочлена P, $P\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_k]$; $(s,m,p)\in\Omega(A,B)$ означає, що $s,m,p\in\mathbb{Z}$, $0\le s\le A$, $|m|,|p|\le B$; $C_1,\dots$ - деякі ефективні сталі. Позначимо $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ твірні елементи поля $\mathbb{Q}(\xi_1,\dots,\xi_4)$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{\ell=0}^{L} C_{k,\ell}\, z^k \operatorname{sn}^\ell z; \quad /3/$$

$$C_{k,\ell} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,\ell,\tau}\,\zeta_\tau, \quad C_{k,\ell,\tau}\in\mathbb{Z};$$

$$F_{m,p}(z) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{\ell=0}^{L} C_{k,\ell}\, z^k \operatorname{sn}^\ell(z-\alpha(m,p)), \quad /4/$$

$$\alpha_{m,p} = 4m\xi_1 + 2p\xi_2 + \xi_3 - \theta, \quad \operatorname{sn}\theta = \xi_3.$$

Покладемо

$$T = 3[nM\ln(nM)], \quad K=\lambda^4T^3, \quad L=\lambda^2T;$$

$$S=\lambda^3T^2, \quad N=\lambda T, \quad N_1=\lambda^2T. \quad /5/$$

Використавши принцип Діріхле [4, с. 56], можна вибрати $C_{k,\ell,\tau}$ такими, що виконуються умови:

$$F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1+2p\xi_2+\xi_3)=0; \quad /6/$$

$$0<\max|C_{k,\ell,\tau}|<\exp(\lambda^3T^3(M+\ln T)). \quad /7/$$

Із /2/-/5/, /7/, лем I, 2 і оцінки, подібної [5, с. 93], отримаємо

$$|F^{(s)}(4m\omega+2p\omega'+\beta)-F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1+2p\xi_2+\xi_3)|<$$

$$<\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^8T^4\right),\quad (s,m,p)\in\Omega(S,N_1). \qquad /8/$$

Враховуючи /6/, /8/, отримуємо

$$|F^{(s)}(4m\omega+2p\omega'+\beta)|<\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^8T^4\right),\ (s,m,p)\in\Omega(S,N). \quad /9/$$

Лема 3. Якщо /9/ правильне для $(s,m,p)\in\Omega(S,N_q)$, то 9 вірне для $(s,m,p)\in\Omega(S,N_{q+1})$, де $N_q=2^qN,\ 2^q<\lambda$.

Доведення. Нехай $G(z)=F(z)\,G^L(z-\omega')$. Визначимо найменше можливе ціле τ так, щоб у колі радіуса τ містився паралелограм з вершинами $\pm4(N_{q+1}+1)\omega\pm2(N_{q+1}+1)\omega'$ і щоб виконувалась умова $\tau>|\beta|+|\theta|$. Позначимо $R=12\tau$. Тоді з /3/, /7/ і оцінки, подібної [5, с. 78], отримуємо

$$|G(z)|_{|z|\le R}<\exp\left(C_1 2^{2q}\lambda^4T^3\right). \qquad /10/$$

Використавши /3/, /7/, /9/ і аналог формули Ерміта [6, с. 115], отримаємо оцінку

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\le\tau}<\exp\left(-2^{2q}\lambda^5T^4\right). \qquad /11/$$

Виберемо достатньо мале ε. Тоді в ε-околах точок $4m\omega+2p\omega'+\beta,\ m,p\in\mathbb{Z}$ немає нулів $\sigma(z-\omega')$ і з [5, с. 78] для $|m|,|p|\le N_{q+1}$ отримаємо

$$|\sigma(z+\omega')|_{z\in V(\varepsilon,4m\omega+2p\omega'+\beta)}>\exp\left(-C_2 2^{2q}\lambda^4T^3\right). /12/$$

З /II/ та /I2/ для $z \in V(\varepsilon, 4m\omega + 2p\omega' + \beta)$ маємо

$$|P^{(s)}(4m\omega + 2p\omega' + \beta)| < \exp(-2^{2q-1}\lambda^5 T^4),\ (s,m,p) \in \Omega(S, N_{q+1}). \quad /I3/$$

З /I3/ та /8/ для $(s,m,p) \in \Omega(S, N_{q+1})$ отримаємо

$$|F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1 + 2p\xi_2 + \xi_3)| < \exp(-2^{2q-2}\lambda^6 T^4). \quad /I4/$$

Розглядаючи $F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1 + 2p\xi_2 + \xi_3)$, $(s,m,p) \in \Omega(S, N_1)$ як значення відповідних многочленів в алгебраїчних точках, з [3, с. 46] отримуємо для відмінних від нуля значень цих многочленів оцінку знизу:

$$|F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1 + 2p\xi_2 + \xi_3)| > \exp(-\lambda^3 T^3 n(\ln T + N)). \quad /I5/$$

З /5/, /I4/, /I5/ отримаємо

$$F^{(s)}_{m,p}(4m\xi_1 + 2p\xi_2 + \xi_3) = 0,\ (s,m,p) \in \Omega(S, N_{q+1}). \quad /I6/$$

З /8/ та /I6/ отримуємо /9/, що й доводить лему 3.

З /I6/ при $\frac{1}{2}\lambda \le 2^q < \lambda$ отримаємо, що многочлени $P_{m,p}(z) = F_{m,p}(z)$ мають не менше $\lambda^7 T^4$ нулів. З леми 2 випливає, що $P_{m,p}(z)$ може мати не більше $9\lambda^6 T^4$ нулів. Отримана суперечність доводить теорему.

Список літератури

I. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648 с.

2. Scheider T. Transzendenz periodischer Funktionen. 2 // J. reine und angew. Math., 1934 – 172. – N1. – S. 65–79.

3. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. – М.: Изд-во при МГУ, 1982. – 3II с.

4. Reyssat E. Approxim. algébrique de nombres liés aux fonct. ellipt. et exp.// Bull. Soc. math. France, 1980.-N1.-P. 47-79.

5. Masser D. Elliptic functions and transcendence// Lect. Notes Math., 1975. - 437. - P. 1-143.

6. Waldschmidt M. Nombres transcendants et groupes algébriques // Soc. Math. France. Astérisque, 1979. - 69-70. - P. - 1-218.