МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. І.ФРАНКА

АЛГЕБРА І ТОПОЛОГІЯ

Львів ЛДУ 1996

УДК 512. + 515.12

Алгебра і топологія: Тематичний збірник наукових праць / За ред. М.М.Зарічного, М.Я.Комарницького – Львів.: 1996.– 150с.

Статті збірника присвячені проблемам теорії кілець, теорії топологічних напівгруп, категорної топології. Для спеціалістів у галузі алгебри і топології, студентів, аспірантів.

УДК 512.74

В.І.Андрійчук

ПРО КОГОМОЛОГІЇ ГАЛУА АЛГЕБРАЇЧНИХ ТОРІВ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Нехай x псевдоскінченне [1] поле, тобто поле, що має такі властивості:

а) x - досконале;

б) x - псевдо алгебраїчно замкнуте, тобто кожний абсолютно незвідний алгебраїчний многовид, визначений над полем x, має x-раціональну точку;

в) поле x має точно одне розширення степеня n для кожного натурального n.

Псевдоскінченні поля є нескінченними моделями скінченних полів: кожна властивість, що формулюється мовою першого порядку і справедлива для всіх скінченних полів справедлива і для псевдоскінченних полів.

Нехай K -поле алгебраїчних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним полем констант x. Виявляється [2], що для поля K справедливий аналог глобальної теорії полів класів. Це означає, що поле K дуже подібне на звичайні глобальні поля. Назвемо поле K псевдоглобальним полем. Можна сподіватися, що значна частина результатів арифметичної теорії алгебраїчних груп, визначених над глобальним полем, залишається справедливою і для алгебраїчних груп, визначених над псевдоглобальним полем. Мета цієї статті - довести деякі з таких результатів для випадку алгебраїчних торів.

Наведені в роботі результати суттєво використовують аналог теорії полів класів для псевдоглобальних полів.

1. Для G-модуля M через $H^n(G,M)$ $(n \in \mathbb{Z})$ будемо позначати Тейтівські когомології групи G з коефіцієнтами в M. Нехай K - поле, K_s - сепарабельне замикання поля K, $\mathfrak{G} = Gal(K_s/K)$ - відповідна група Галуа, M - $\mathfrak{G}$-модуль. Тоді $H^n(K,M)$ означає $H^n(\mathfrak{G},M)$. Якщо L - розширення Галуа поля K, то $H^n(Gal(L/K),M)$ позначаємо через $H^n(L/K,M)$.

Далі K означає псевдоглобальне поле, L/K - його скінченне розширення Галуа, V - множина всіх нормувань поля K. Для $v \in V$ через K_v позначаємо поповнення поля K за номуванням v. C_L - група класів іделів поля L. BrK - група Брауера поля K, BrK_v - група Брауера відповідного загального локального поля K_v.

У роботі [2] доведені такі теореми 1 і 2.

<u>Теорема 1</u>. а) $H^1(L/K,C_L)=0$,

б) $H^2(L/K,C_L)$ - циклічна група порядку $|Gal(L/K)|$ з канонічною твірною $u_{L/K}$. Якщо H - підгрупа групи $Gal(L/K)$, то $H^2(H,C_L)$ - циклічна група порядку $|H|$, породжена обмеженням твірної $u_{L/K}$ на підгрупу H.

<u>Теорема 2</u>. Існує точна послідовність

$$0 \longrightarrow BrK \longrightarrow \sum_{v \in V} BrK_v \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

З теореми 2 випливає, що для скінченного розширення Галуа L/K відображення

$$Br(L/K)=H^2(L/K,L^*) \longrightarrow \sum_{v \in V} Br(L_w/K_v)=H^2(L/K,J_L)$$

(тут w - продовження на поле L нормування v, J_L - група іделів поля L) є ін'єктивним. Це означає, що для псевдоглобального поля K

справедливе твердження Хассе-Брауера-Нетер про норми.

2. Теорема 1 дає змогу довести теорему Тейта-Накаями для алгебраїчних торів, визначених над псевдоглобальним полем K.

Сформулюємо локальний і глобальний варіанти теореми Тейта-Накаями.

<u>Теорема 3</u>. а) Нехай k - загальне локальне поле, T - тор, визначений над k, який розщеплюється над скінченним розширенням Галуа l/k, $X(T)$ - група характерів тору T. Тоді для всіх цілих чисел n існують ізоморфізми

$$H^n(l/k,T) \cong H^{2-n}(l/k,X(T)).$$

б) Нехай K - псевдоглобальне поле, T - тор, визначений над K, який розщеплюється над скінченним розширенням Галуа L/K, $C_L(T)$ - група класів іделів тора T над полем L і $X(T)$ - група характерів тора T. Тоді для всіх цілих чисел n існують ізоморфізми

$$H^n(L/K,C_L(T)) \cong H^{2-n}(L/K,X(T)).$$

<u>Доведення</u>. Обмежимося доведенням глобального варіанту теореми. Доведення локального варіанту нічим не відрізняється від наведеного в [3] доведення для торів, визначених над локальним полем. Потрібно тільки врахувати, що локальна теорія полів класів поширюється на загальні локальні поля [4]. Зауважимо також, що доведення глобального варіанту теореми теж стандартне. Проведемо його, використовуючи міркування з [3], де розглянуто випадок алгебраїчних торів, визначених над глобальним полем.

Нехай T_L і $T_{\mathbb{A}_L}$ - відповідно групи L - раціональних точок і аделів тору T. $C_L(T)=T_{\mathbb{A}_L}/T_L$, $X_*(T)$ - модуль кохарактерів тора T. Як і у [3] переконуємося, що $Gal(L/K)$-модулі $X_*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}C_L$ і $C_L(T)$

ізоморфні. За теоремою 1 і теоремою Тейта [5,p.4] множення на $u_{L/K}$ індукує ізоморфізм

$$H^n(L/K,X_*(T)) \cong H^{n+2}(L/K,X_*(T)\otimes_Z C_L) \cong H^{n+2}(L/K,C_L(T)).$$

Використовуючи дуальність скінченних груп $H^n(L/K,X_*(T))$ і $H^{-n}(L/K,X(T))$ [6], одержуємо потрібні ізоморфізми.

$$H^n(L/K,C_L(T)) \cong H^{2-n}(L/K,X(T)).$$

Виведемо деякі наслідки з теореми Тейта-Накаями для торів над псевдоглобальними полями, тобто, по суті, наслідки з аналогу глобальної теорії полів класів для псевдоглобальних полів.

<u>Теорема 4</u>. Нехай T - алгебраїчний тор, визначений над полем K і розкладний над його скінченним розширенням Галуа. Тоді

1) групи $H^n(L/K,T)$ скінченні, якщо K - загальне локальне поле;

2) групи $P^n(L/K,T)=Ker(H^n(L/K,T) \longrightarrow \prod_{v\in V} H(L^n_w/K_v,T))$ скінченні, якщо K - псевдоглобальне поле.

<u>Доведення</u>. Група $X(T)$ характерів тору T є скінченно породженим $Gal(L/K)$-модулем. Тому всі групи $H^n(L/K,X(T))$ скінченні для всіх цілих n. З твердження а) теореми 3 випливає тоді скінченність груп $H^n(L/K,T)$, що і стверджує перша частина теореми.

Друга частина теореми випливає з точної послідовності когомологій

$$H^{n-1}(L/K,T_{A_L}) \longrightarrow H^{n-1}(L/K,C_L(T)) \longrightarrow H^n(L/K,T) \longrightarrow H^n(L/K,T_{A_L})$$

відповідної точній послідовності $Gal(L/K)$-модулів (у позначеннях попереднього пункту).

$$1 \longrightarrow T_L \longrightarrow T_{A_L} \longrightarrow C_L(T) \longrightarrow 1.$$

Ця точна послідовність когомологій показує, що $P^n(L/K,T)$ є факторгрупою групи $H^{n-1}(L/K,C_L(T))$, яка за теоремою 3 ізоморфна скінченній групі $H^{3-n}(L/K,X(T))$ і, отже, скінченна.

Наслідок. Група Шафаревича-Тейта
$Ш(T)=Ker(H^1(K,T)) \longrightarrow \prod_{v\in V} H^1(K_v,T))$ скінченна для тора T, визначеного над псевдоглобальним полем K.

Для доведення наслідку досить використати той факт, що для тора T, визначеного над полем K і розкладного над розширенням Галуа L існує ізоморфізм $H^1(K,T) \cong H^1(L/K,T)$ і застосувати теорему 4.

Сформулюємо ще декілька теорем про когомології алгебраїчних торів над псевдоглобальними полями, які є аналогами відомих фактів [3] про алгебраїчні тори, визначені над глобальними полями.

Теорема 5. У позначеннях попередньої теореми 4 для тору, визначеного над псевдоглобальним полем K, існують ізоморфізми

$$P^n(L/K,T) \cong Ker(H^{3-n}(L/K,X(T)) \longrightarrow \prod_{v\in V} H^{3-n}(L_v/K_v,X(T)).$$

Теорема 6. Нехай $T=R^1_{L/K}(\mathbb{G}_m)$ нормений тор, відповідний розширенню Галуа L/K псевдоглобального поля K, $G=Gal(L/K)$. Тоді група Шафаревича-Тейта тора T ізоморфна ядру канонічного гомоморфізму

$$H^3(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow \prod_{v\in V} H^3(G_v,\mathbb{Z}),$$

де G_v - група розкладу нормування v.

Теорема 7. Нехай L - будь-яке розширення простого степеня псевдоглобального поля K, $T=R^1_{L/K}(\mathbb{G}_m)$ - нормений тор. Тоді група Шафаревича-Тейта тора T тривіальна.

Доведення теорем 5, 6 і 7 майже не відрізняються від доведень відповідних фактів для торів над глобальним полем. Зауважимо лише, що у доведенні теореми 5 потрібно використати тривіальність групи $H^1(\lambda,T)$ для псевдоскінченного поля λ, а це випливає з означення псевдоскінченного поля. (У випадку скінченного поля λ тривіальність $H^1(\lambda,A)$ для зв'язної алгебраїчної групи A є твердженням відомої теореми Ленга.) Теорема 6 стандартно виводиться з теореми 5. Це можна зробити, наслідуючи, наприклад, міркування з розділу 6 книги [3], де вивчаються тори над глобальним полем. Для доведення теореми 7 потрібно застосувати міркування, наведені в [7] і використати теорему Хассе про норми, яка є наслідком теореми 2.

Список літератури

1. Ax J., The elementary theory of finite fields // Ann. Math. 1968. Vol.88. N2. P. 239-271.
2. Андрійчук В.І. Псевдоскінченні поля і закон взаємності // Математичні студії. 1993. Вип.2. С.14-20.
3. Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел. М., 1991.
4. Serre J.-P. Corps locaux // Act.Sci.Ind. N1296. Paris, 1962
5. Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж.Касселя и А.Фрелиха. М., 1969.
6. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М., 1960.
7. Платонов В.П. Арифметическая теория алгебраических групп // Успехи мат. наук, 1982. Т.37, N3. С.3-54.

УДК 512.55

О.Д.Артемович

НЕПЕРІОДИЧНІ ПРАВІ ГАМІЛЬТОНОВІ КІЛЬЦЯ

У цій праці охарактеризовані праві гамільтонові кільця з неперіодичною адитивною групою, а також праві гамільтонові ніль-p-кільця характеристики 0 та періодичні праві гамільтонові неніль-кільця. Згідно з [1, задача 1.147] кільце називається правим гамільтоновим, якщо всі його підкільця є праві ідеали.

Багато авторів [2-14] описали кільця, усі підкільця яких – двосторонні ідеали. Такі кільця за аналогією з гамільтоновими групами, тобто групами з нормальними власними підгрупами /див., наприклад, [15]/, отримали назву гамільтонових.

У роботі розглядаються тільки асоціативні кільця, і, як правило, вони не містять одиниці. Підкільце – це непорожня множина кільця, замкнена стосовно двох кільцевих операцій.

Якщо R – кільце, x /відповідно M_α, M та N/ – його елемент /відповідно його підкільця/, то

R^+ – адитивна група кільця R;

$\langle x\rangle = gr(x)$ – циклічна підгрупа групи R^+, породжена елементом x;

$\{x\}$ – підкільце кільця R, породжене елементом x;

$\{X, Y\}$ – підкільце кільця R, породжене підмножинами X, та Y;

MN – множина скінченних сум вигляду $\sum x_i y_i$, де $x_i \in M$, $y_i \in N$;

$XR = \{xr|\ x \in X, r \in R\}$ для підмножини X кільця R;

$|x|$ – порядок елемента x у групі R^+;

$\exp(M^+)$ – максимальний порядок елементів адитивної групи M^+;

$\mathbf{Z}$ – кільце цілих чисел;

$\mathbf{Z}^*$ – множина ненульових цілих чисел;

$\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ – кільце класів лишків кільця цілих чисел $\mathbf{Z}$ за модулем числа n;

$\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathrm{Ann}\, R = \{x \in R|\ xR = Rx = 0\}$ – анулятор кільця R; $\mathrm{Ann}_l(R) = \{x \in R|xR = 0\}$ – лівий анулятор кільця R;

$Z(R) = \{x \in R|\ xy = yx$ для всіх елементів $y \in R\}$ – центр кільця R;

$\mathcal{L}(R)$ - радикал Левицького кільця R;

$\mathcal{F}(R)$ – періодична частина кільця R;

$\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_p(R)$ – p-частина кільця R, тобто $\mathcal{F}_p^+$ – силовська p-підгрупа адитивної групи $\mathcal{F}(R)^+$;

$\mathcal{L}_p = \mathcal{F}_p(\mathcal{L}(R)$ – p-частина радикала Левицького $\mathcal{L}(R)$;

$M + N = \{m+n \mid m \in M, n \in N\}$ – сума адитивних груп M^+ та N^+ підкілець M та N;

$M \oplus N$ – пряма сума підкілець M та N, тобто $M \oplus N = M + N, MN = NM = 0, M \cap N = 0$;

$\sum_\alpha^\oplus M_\alpha$ – пряма сума підкілець M_α.

Надалі p, q завжди означають прості числа, а букви грецького алфавіту – цілі числа. Запис $\alpha|\beta$ означає, що число β ділиться на число α без остачі, а (α, β) – найбільший спільний дільник чисел α та β.

Кільце R називається періодичним /відповідно неперіодичним, p-кільцем, кільцем без скруту або змішаним/, якщо такою є його адитивна група R^+.

Решта позначень та термінів, що ми використовуємо, стандартні; їх можна знайти, наприклад, у [9 ,15 – 17]

Наша робота підсумовує цикл робіт автора [18 – 22].

1. Елементарні властивості правих гамільтонових кілець

Для зручності викладу спочатку наведемо теорему із [6].

Твердження 1.1. *Кільце K тоді і лише тоді буде гамільтоновим кільцем, породженим одним елементом, коли K ізоморфне одному із кілець таких десяти типів:*

1) кільця $K_1 \cong \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ /$n \in \mathbf{N}$/;

2) кільцю K_2, породженому елементом a порядку p^n /$n > 1$/, причому $a^2 - \alpha a = 0$ для деякого $\alpha \in \mathbf{Z}$ і α ділиться на p;

3) кільцю K_3, породженому елементом a порядку p^n /$n > 1$/, причому $a^3 - \alpha a^2 = 0$ для деякого $\alpha \in \mathbf{Z}$, $a^2 - \gamma a \neq 0$ для кожного $\gamma \in \mathbf{Z}$, $p(a^2 - \gamma a) = 0$ та α ділиться на p;

4) кільцю $K_4 = K_1 \oplus K_3$, яке є прямою сумою кілець K_1 та K_3, причому $K_1 \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ та K_4^+ – p-група;

5) кільцю $K_5 = K_1 \oplus K_3$, яке є прямою сумою кілець K_1 та K_3, причому $K_1 \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ та K_5^+ – p-група;

6) кільцю $K_6 = K^{(1)} \oplus K^{(2)} \oplus \ldots \oplus K^{(s)}$ / $s \geqslant 2$ /, яке є прямою сумою кілець $K^{(j)}$ $j = \overline{1,s}$, причому $K^{(j)}$ /$i = 1,2,3,4,5$/ і адитивні групи кілець $K^{(j)}$ є p-групи для попарно різних простих чисел p;

7) кільцю K_7, породженому елементом a нескінченного порядку, причому $a^2 - \alpha a = 0$ для деякого $\alpha \in \mathbf{Z}$;

8) кільцю K_8, породженому елементом a нескінченного порядку, причому $a^3 - \alpha a^2 = 0$, $|a^2 - \alpha a| = \pi$ для деяких $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\pi \in \mathbf{N}$, α ділиться на π та π, вільне від квадратів;

9) кільцю $K_9 \cong A \oplus K_7$, яке є прямою сумою кілець K_7 та $A \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, де $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$, α ділиться на m та m вільне від квадратів;

10) кільцю $K_{10} \cong A \oplus K_8$, яке є прямою сумою кілець K_8 та $A \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, де $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$, α ділиться на m та m вільне від квадратів.

Очевидно, що будь-яке підкільце і будь-який гомоморфний образ правого гамільтонового кільця також праве гамільтонове кільце. Крім того, праве гамільтонове кільце R є кільце з правою ідеалізаторною умовою /у розумінні [23]/, а тому його радикал Левицького R збігається з множиною всіх його нільпотентних елементів [23, наслідок 8]. Зрозуміло, що будь-яке підкільце правого гамільтонового кільця, породжене одним елементом, є комутативним гамільтоновим кільцем одного з наведених вище десяти типів K_1 — K_{10}. Щоб кільце R було правим гамільтоновим, необхідно і досить, щоб кожне підкільце із R, породжене одним елементом, було правим ідеалом в R.

ЛЕМА 1.2. *Нехай R – праве гамільтонове кільце. Тоді:*

1) $ara = a^2r$ для будь-яких елементів $a, r \in R$;

2) якщо R містить хоч би один ненульовий недільник нуля, то кільце R – комутативне.

Доведення. Нехай a – який-небудь ненульовий елемент кільця R, $C(a) = \{r \in R |\ ra = ar\}$ – централізатор елемента a у кільці R. Тоді для будь-якого елемента r кільця R добуток ar також належить централізатору, а отже,

$$a^2r = a(ar) = (ar)a\ .$$

Нехай $c \neq 0$ і c – недільник нуля у кільці R. Тоді із $c^2r - crc = 0$ отримуємо, що $cr - rc = o$ для будь-якого $r \in R$, а отже, $c \in Z(R)$. Але тоді добуток ct також буде центральним елементом для будь-якого елемента $t \in R$, отже

$$c(tr) = (ct)r = r(ct) = c(rt),$$

звідси $tr = rt$. Лема доведена.

Наслідок 1.3. *Якщо d – внутрішнє диференціювання правого гамільтонового кільця R, то $d(R) \subseteq \mathcal{L}(r)$; і, крім того, $(dr)^2 = 0$ для будь-якого елемента $r \in R$.*

Справді, для довільних $a, b \in R$

$$(ab - ba)^2 = abab - ab^2a - ba^2b + baba = 0.$$

Тепер, зважаючи на лему 1.2, наслідок 1.3 та результати із [23], легко отримати такі твердження.

Твердження 1.4. *Для кільця R з одиницею рівносильні такі умови:*
1) R – праве гамільтонове кільце;
2) R – гамільтонове кільце
3) $R \cong \mathbf{Z}$ або $R \cong \mathbf{Z}_n$ $/n \in \mathbf{N}/$.

Твердження 1.5. *[23, теорема 6]. Нехай R – кільце з нульовим радикалом Левицького. Тоді наступні твердження рівносильні:*
1) R – праве гамільтонове кільце;
2) R – гамільтонове кільце;
3) кільце R належить до одного із типів:
а) R ізоморфне підкільцю кільця цілих чисел $\mathbf{Z}$;
б) $R \cong A \oplus R_1$ де $A \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, $m > 1$, m вільне від квадратів, а R_1 – кільце, породжене цілим числом $z \neq 0$, причому m ділиться на z;
в) $R \cong \sum_i^{\oplus} \mathbf{Z}/p_i\mathbf{Z}$ – пряма сума полів $\mathbf{Z}/p_i\mathbf{Z}$ за різними простими p_i.

Наведемо також ряд допоміжних тверджень; їх доведення аналогічні [10 – 12].

Лема 1.6. *Якщо кільце R – пряма сума правих гамільтонових кілець R_α, тобто $R = \sum_\alpha^{\oplus} R_\alpha$, і для кожного підкільця Q із R*

$$Q = \sum_\alpha{}^{\oplus}(Q \cap R_\alpha),$$

то R – праве гамільтонове кільце.

Доведення. Досить довести, що кожне підкільце з одним твірним елементом є правим ідеалом. Для цього розглянемо яке-небудь підкільце $\{a\} \leqslant R$; тоді

$$R = (\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} R_i) \oplus (\sum_{\alpha'}{}^{\oplus} R_{\alpha'}) \ ,$$

де $R_{\alpha'} \cap \{a\} = 0$. Справді, оскільки $a \in \sum_{\alpha}{}^{\oplus} R_{\alpha}$, то

$$a = a_1 + ... + a_{\alpha} + ... \ , \text{ де } a_{\alpha} \in R_{\alpha},$$

і всі елементи a_{α}, крім, можливо, їх скінченної кількості, дорівнюють нулю. Для певності вважаємо, що $a_i \neq 0$ $/i = \overline{1,n}/$, $a_{\alpha'} = 0$ для всіх $\alpha' > n$. І тоді $\{a\} \subseteq \sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} R_i$, $\{a\} \cap R_{\alpha'} = 0$. Отже,

$$\{a\} = (\sum_{i=1}^{n} R_i) \cap \{a\} = \sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} \overline{R}_i,$$

де $\overline{R}_i = R_i \cap \{a\}$, і

$$\{a\}R = \sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} \overline{R}_i (\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} R_i \oplus \sum_{\alpha'}{}^{\oplus} R_{\alpha'}) =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} \overline{R}_i)(\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} R_i) \subseteq (\sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus} \overline{R}_i) = \{a\}.$$

Лема доведена.

Наслідок 1.7. *Якщо R – пряма сума правих гамільтонових p-кілець, тобто $R = \sum_p^{\oplus} R_p$, причому суму беруть за різними простими p, то R також є правим гамільтоновим кільцем.*

Доведення. Розглянемо підкільце $\{a\} \leqslant R$. Нехай $a = a_1 + ... + a_n$, де $a_i \in R_{p_i}$ $/i = \overline{1,n}/$. Тоді

$$\{a\} = \{a_1\} \oplus ... \oplus \{a_n\} = \sum_{i=1}^{n}{}^{\oplus}(\{a\} \cap R_{p_i})$$

і можна застосувати лему 1.6.

Лема 1.8. *Якщо $R = K \oplus R_0$ – пряма сума кілець, причому K – праве гамільтонове ніль-кільце, а $R_0 \cong \sum_{\alpha}^{\oplus} R_\alpha$, $R_\alpha \cong \mathbf{Z}/p_\alpha\mathbf{Z}$ і пряма сума береться за різними простими p_α, то R також праве гамільтонове кільце.*

Доведення. Нехай Q – власне підкільце кільця R. Покажемо, що $Q = (K \cap Q) \oplus (R_0 \cap Q)$. Включення $(K \cap Q) \oplus (R_0 \cap Q) \subseteq Q$ очевидне. Нехай

$$a = r + k_1 + ... + k_n \text{ —}$$

довільний елемент із Q, де $r \in R_0$, $k_i \in R_{p_i}$ $/i = \overline{1,n}/$. Оскільки підкільце R_0 локально нільпотентне [23], то для деякого натурального m маємо

$$(k_1 + ... + k_n)^m = k_1^m + ... + k_n^m \ ,$$

тобто $\sum_{i=1}^{n} k_i^m \in Q$. Звідси також випливає, що $k_i \in Q$ $/i = \overline{1,n}/$. Отже, $r \in Q$.

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \in (K \cap Q) \oplus (R_0 \cap Q) \text{ та } Q = (K \cap Q) \oplus (R_0 \cap Q) \ .$$

Отже, на основі леми 1.6 R – праве гамільтонове кільце. Лема доведена.

Звідси з урахуванням [24, лема 9] випливає

Наслідок 1.9. *Нехай R – періодичне ніль-кільце. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо $R = \sum_{p}^{\oplus} R_p$ – пряма сума нільпотентних правих гамільтонових p-кілець R_p, яка береться за різними простими p.*

2. Праві гамільтонові кільця без скруту

Теорема 2.1. *Нехай R – кільце без скруту. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо воно кільце із наступних типів:*

1) R – кільце з нульовим множенням;

2) R ізоморфне кільцю, породженому ненульовим цілим числом z, тобто $R \cong \{z\}$, $z^2 = \alpha z$ для деякого $\alpha \in \mathbf{Z}^*$;

3) $R = J + \{t\}, J^2 = 0, tJ = 0, J \cap \{t\} = 0, t^2 = \beta t$, β *– ненульове ціле число, причому* $it = \beta i$ *для кожного елемента* $i \in J$.

Доведення. Необхідність. Припустимо спочатку, що R – ніль-кільце. Нехай r – який-небудь елемент кільця R. Тоді $r^2 = 0$ внаслідок гамільтоновості підкільця $\{r\}$. Якщо t – довільний ніль-елемент кільця R, то $rt = \beta r$ для деякого цілого числа β та $\beta rt = rt^2 = 0$, звідси, як легко довести, $rt = 0$. Якщо R – праве гамільтонове ніль-кільце без скруту, то $R^2 = 0$.

Припустимо, що $R \neq \mathcal{L}(R) = 0$. Тоді внаслідок твердження 1.5 R – кільце типу 2 із умови теореми.

Нехай надалі $R \neq \mathcal{L}(R) \neq 0$. Тоді, зрозуміло, $\mathcal{L}(R)^2 = 0$ та $R/\mathcal{L}(R) = \{\overline{a}\}$, $\overline{a}^2 = \theta\overline{a}$ для деякого $\theta \in \mathbf{Z}^*$ та деякого $\overline{a} \in R/\mathcal{L}(R)$. Якщо a – прообраз елемента $\overline{a}$ у кільці R, то за твердженням 1.1 $a^2 = \mu a$ для деякого $\mu \in \mathbf{Z}^*$. Нехай j – довільний елемент із $\mathcal{L}(R)$. Якщо $k \in \{j\} \cap \{a\}$, то $k = \nu j = \xi a$ для деяких $\nu, \xi \in \mathbf{Z}$, а тому $\xi^2 a^2 = \nu^2 j^2 = 0$, звідки $a^2 = 0$, що неможливо. Отже, $\{j\} \cap \{a\} = 0$ та $aj = 0$.

Окрім того, усі елементи із $R \backslash \mathcal{L}(R)$ мають тип K_7 /див. твердження 1.1/. Тому для $j \in \mathcal{L}(R)$ маємо $(j + a)^2 = \delta(j + a)$ де $\delta \in \mathbf{Z}$. Звідси випливає, що $ja - \delta j = \delta a - a^2 \in \{a\} \cap \{j\}$, а отже, $ja = \delta j$, $\delta a = a^2 = \mu a$ та $\delta = \mu$. Тому $ja = \delta j$, $\delta a = a^2$ і R – кільце типу 3). Необхідність доведена.

Достатність. Кільце R типу 1 та 2 – гамільтонове. Нехай R – кільце типу 3, x – який-небудь його елемент. Тоді $x = i + \nu t$ для деяких $i \in J$, $\nu \in \mathbf{Z}$; і для довільного елемента $j + \rho t$, де $j \in J$, $\rho \in \mathbf{Z}$, маємо

$$x(j + \rho t) = \rho\beta(i + \nu t) = \rho\beta x \in \{x\},$$

тобто R – праве гамільтонове кільце. Теорема доведена.

3. Періодичні праві гамільтонові неніль-кільця

ТЕОРЕМА 3.1. *Нехай R – періодичне неніль-кільце. Тоді R – праве гамільтонове, якщо і тільки якщо воно належить до одного із типів:*

1) $R \cong \sum_\alpha^\oplus \mathbf{Z}/p_\alpha^{n_\alpha}\mathbf{Z}$ *– пряма сума кілець* $\mathbf{Z}/p_\alpha^{n_\alpha}\mathbf{Z}$ /$n_\alpha \in \mathbf{N}$/, *яку беруть за різними простими* p_α;

2) $R = T + \Phi$, $T = \sum^{\oplus}_{p\in I_1} \mathcal{L}_p$ – пряма сума правих гамільтонових ніль-p-кілець, $\Phi = \sum^{\oplus}_{p\in I_2} \{e_p\}$, $\{e_p\} \cong \mathbf{Z}/p^{n_p}\mathbf{Z}$ $/n_p \in \mathbf{N}/$, кожна із прямих сум береться за різними простими $p, T \cap \Phi = 0, \Phi T = 0$ причому для $q \in I_1 \cap I_2$ $n_q = 1$ і або $\mathcal{L}_q e_q = e_q \mathcal{L}_q = 0$ або $\mathcal{L}_q^2 = 0$ та $te_q = t$ для кожного елемента $t \in \mathcal{L}_q$.

Доведення. Необхідність. Нехай R – праве гамільтонове кільце. Якщо радикал Левицького $\mathcal{L}(R)$ кільця R є ненульовий, то R – кільце типу 1.

Тому надалі вважаємо, що $\mathcal{L}(R) \neq 0$. Припустимо спочатку також, що адитивна група R^+ є p-група для деякого простого p. Якщо r – ненільпотентний елемент із R, то підкільце $\{r\}$ – скінченне [25, лема 1]. Тоді внаслідок [25, наслідок 1] підкільце $\{r\}$ містить ідемпотент e. Крім того, знайдеться такий ідеал M [23, наслідок 3], що $R = M + \{e\}$, $M \cap \{e\} = 0$. Якщо в M міститься ненільпотентний елемент, то, міркуючи аналогічно, отримаємо, що M містить ідемпотент $e_1 \neq 0$. Але тоді сума $\{e\} + \{e_1\}$ – пряма. Справді, оскільки $eM \subseteq \{e\} \cap M$, то $eM = 0$ та $ee_1 = 0, e_1e = e_1^2e = e_1ee_1 = 0$. І тому $\{e\} \oplus \{e_1\}$ – комутативне гамільтонове кільце, а отже, U – кільце, що суперечить [25, лема 7]. Отже, M містить тільки нільпотентні елементи. Внаслідок [24, лема 9] M – нільпотентне кільце. Окрім того, $\{e\} \cong \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ $/n \in \mathbf{N}/$.

Уточнимо будову кільця $M + \{e\}$. Якщо $Me = 0$ та M – праве гамільтонове кільце, то $R = M \oplus \{e\}$ – праве гамільтонове кільце при $n = 1$. Тому припустимо, що $Me \neq 0$. Тоді для деякого елемента $m \in M$ індекса нільпотентності s $/s > 1/$ маємо $me = \gamma_1 m + \gamma_2 m^2$, де γ_1, γ_2 – деякі цілі числа. Оскільки $me \neq 0$ та $me = me^2 = \gamma_1 me$ то $(\gamma_1, p) = 1$. Припустимо, що $s > 2$. Тоді

$$0 = mem^{s-2} = \gamma_1 m^{s-1} + \gamma_2 m^s = \gamma_1 m^{s-1}.$$

звідки $m^{s-1} = 0$ всупереч припущенню. Отже, $s = 2$ і тоді для будь-якого $t \in M$ $\gamma_1 mt = met = 0$, звідки $mt = 0$ та $M^2 = 0$. Але тоді $m = me$. І якщо $de = 0$ для деякого $d \in M$, то $0 \neq me = (m + d)e$ і, як і вище, $(m + d)e = \kappa(m + d)$ для деякого $\kappa \in \mathbf{Z}^*$, а звідси $d = 0$. Крім того, легко бачити, що $n = 1$.

Нехай тепер R – довільне періодичне кільце. Тоді його адитивна група R^+ є прямою сумою силовських p_i-підгруп R_{p_i}. Очевидно, R_{p_i} – ідеал кільця R, причому $R_{p_i} = \mathcal{L}(R_{p_i})$, або $R_{p_i} = \{e_{p_i}\} \cong$

$\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$ /$n_i \in \mathbb{N}$/, або $R_{p_i} = \mathcal{L}(R_{p_i}) + \{e_{p_i}\}$ /і тоді $n_i = 1$/. В останньому випадку також на основі доведеного вище $\mathcal{L}(R_{p_i}) \cap \{e_{p_i}\} = 0, e_{p_i}\mathcal{L}(R_{p_i}) = 0, \{e_{p_i}\} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$, причому або $\mathcal{L}(R_{p_i})e_{p_i} = 0$, або $\mathcal{L}(R_{p_i})^2 = 0$ та $le_{p_i} = l$ для кожного елемента $l \in \mathcal{L}(R_{p_i})$. Покладемо $T = \sum_{p_i \in I_1}^{\oplus} \mathcal{L}_{p_i}$, $\Phi = \sum_{p_i \in I_2}^{\oplus} \{e_{p_i}\}$, де $I_1 \cup I_2$ – множина всіх тих простих чисел, для яких R^+ володіє ненульовою силовською p-підгрупою. Тоді, очевидно, $\Phi T = 0$, і оскільки $R \neq \mathcal{L}(R)$, то I_1 та I_2 – непорожні множини. Необхідність доведена.

Достатність. Легко бачити, що кільце типу 1 – гамільтонове. Тому нехай R – кільце типу 2 . Очевидно, $R = \mathcal{F}(R) = \sum_i^{\oplus} R_{p_i}$ – пряма сума p_i-кілець. Тому за наслідком 1.7 досить довести, що R_{p_i} – праве гамільтонове кільце.

Якщо $R_{p_i} = \mathcal{L}(R_{p_i})$, або $R_{p_i} \cong \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$ /$n_i \in \mathbb{N}$/, або $R_{p_i} = \mathcal{L}(R_{p_i}) \oplus \{e_{p_i}\}$ /$n_i = 1$/, то R_{p_i} – праве гамільтонове кільце. Тому нехай $R_{p_i} = \mathcal{Z}(R_{p_i}) + \{e_{p_i}\}$; і ця сума непряма, а отже, $\mathcal{L}(R_{p_i})^2 = 0$.

Якщо x – довільний елемент із R_{p_i}, то $x = l + f$ для деяких $l \in \mathcal{L}(R_{p_i})$, $f \in \{e_{p_i}\}$, а тому $xe_{p_i} = le_{p_i} + fe_{p_i} = l + f \in \{x\}, xl_1 = ll_1 + fl_1 = 0 \in \{x\}$, де $l_1 \in \mathcal{L}(R_{p_i})$. Це означає, що R_{p_i} – праве гамільтонове кільце. Теорема доведена.

4. Змішані праві гамільтонові ніль-кільця

Теорема 4.1. *Нехай R – змішане ніль-кільце. Тоді R - праве гамільтонове, якщо і тільки якщо $R^2 = \sum_p^{\oplus} R_p$, $R_p^2 = 0$, $pR_p = 0$, пряма сума береться за різними простими p,* $\mathrm{Ann}_l R = \{i \in R \mid i^2 = 0\}$.

Доведення. Необхідність. Нехай R – праве гамільтонове ніль-кільце зі змішаною адитивною групою R^+. Тоді фактор-кільце $R/\mathcal{F}(R)$ без скруту і внаслідок теореми 2.1 $R^2 \subseteq \mathcal{F}(R)$. Крім цього, $\mathcal{F}(R) = \sum_p^{\oplus} \mathcal{F}_p$ – пряма сума така, що $\mathcal{F}_p^+$ – силовська p-підгрупа групи $\mathcal{F}(R)^+$.

Нижче всюди в доведенні k, t – довільні p-елементи із R^+, b – довільний елемент нескінченного порядку, причому $b^2 = 0$. Тоді зі співвідношень $b \notin \mathcal{F}(R)$, $bt = \delta b$, де δ – деяке ціле число, отримуємо, що $bt = 0$. Тепер на підставі твердження 1.1 $(k + b)^3 = 0$ та $\theta(k + b)^2 = 0$ для деякого ненульового цілого θ, а тому $\theta(k + b)t = \theta\xi(k + b)$, $\theta kt + \theta bt - \theta\xi k = \theta\xi b$ для деякого $\xi \in \mathbb{Z}$. І оскільки ліва частина останньої рівності – це елемент скінченного порядку, то $\xi = 0$

Але тоді $\theta kt = 0$, і оскільки θ вільне від квадратів, а $k, t \in \mathcal{F}_p$, то

$$pkt = 0 \, .$$

Аналогічно доводиться, що $pka = 0$ для будь якого елемента a нескінченного порядку.

Нехай надалі ω - довільний елемент кільця R. Оскільки знайдеться таке вільне від квадратів ціле число π, що $\pi a^2 = 0$, і такі цілі числа α, β, що $a\omega = \alpha a + \beta a^2$, то $\pi \alpha a = \pi a\omega$ - елемент скінченного порядку, а отже, $\alpha = 0$. Це показує, що $a\omega = \beta a^2$ та $\pi a R = 0$. Із $b\omega = \gamma b$, де $\gamma \in \mathbf{Z}$, $b\omega \in \mathcal{F}(R)$ та $b \notin \mathcal{F}(R)$ також маємо $b\omega = o$ та $bR = 0$.

Нехай тепер d - такий елемент скінченного порядку, що $d^2 = 0$. Тому знайдуться такі $\kappa \in \mathbf{Z}$ та $\rho \in \mathbf{Z}^*$, що $\rho(d+b)^2 = \rho\kappa(d+b)$ /можливо, $\rho = 1$/. І взявши до уваги, що $db = \mu_1 d$ для деякого цілого μ_1, отримуємо

$$(d+b)b = \xi_1(d+b) + \eta_1(d+b)^2$$

для певних $\xi_1, \eta_1 \in \mathbf{Z}$ та

$$\rho(d+b)b = \rho(\xi_1 + \kappa\eta_1)(d+b).$$

звідки $\rho(\xi_1 + \kappa\eta_1) = 0$ та $\rho db = 0$. Далі, аналогічно

$$(d+\rho b)b = \xi_2(d+\rho b) + \eta_2(d+\rho b)^2$$

для певних $\xi_2, \eta_2 \in \mathbf{Z}$, звідки

$$\xi_2(d+\rho b) = db \in \mathcal{F}(R),$$

а отже, $\xi_2 = 0$, $db = 0$. Тоді, враховуючи доведене вище, із рівності

$$(d+b)\omega = \xi_3(d+b) + \eta_3(d+b)^2,$$

де $\xi_3, \eta_3 \in \mathbf{Z}$, отримуємо $\xi_3(d+b) = d\omega \in \mathcal{F}(R)$, звідки $\xi_3 = 0$ та $d\omega = 0$. Ми довели, що $\mathrm{Ann}_l R = \{i \in R | \; i^2 = 0\}$.

Далі, оскільки

$$(k+pa)t = \mu(k+pa) + \lambda(k+pa)^2$$

для певних цілих μ та λ, то $\mu p a \in \mathcal{F}(R)$, а тому $\mu = 0$. Звідси також випливає, що

$$kt = \lambda k^2 \in \{k^2\}.$$

Використовуючи цей факт, доведемо, що $|\mathcal{F}_p^2| \leqslant p$. Справді, припустимо, що $\mathcal{F}_p^2 \neq 0$ і знайдуться такі елементи $k, t \in \mathcal{F}_p$ для яких $k^2 \neq 0$, $t^2 \neq 0$ та $\{k^2\} \cap \{t^2\} = 0$. Тоді $tk = \phi t^2$, $(k+t)t = \psi(k+t)^2$ для певних $\phi, \psi \in \mathbf{Z}$, а отже,

$$(\lambda - \psi - \psi\lambda)k^2 = (-1 + \phi\psi + \psi)t^2,$$

звідки внаслідок доведеного раніше і зроблених припущень маємо систему конгруенцій

$$\begin{cases} \lambda - \psi - \psi\lambda \equiv 0(mod p), \\ -1 + \psi + \psi\phi \equiv 0(mod p). \end{cases}$$

з другої конгруенції цієї системи випливає, що $\psi \not\equiv 0(mod p)$, а отже, $\lambda \not\equiv 0(mod p)$. Окрім цього, із системи конгруенцій також маємо $\psi(\phi\lambda - 1) \equiv 0(mod p)$, звідки випливає $\phi\lambda \equiv 1(mod p)$. Але тоді $(\lambda k - t)^2 = (1 - \lambda\phi)t^2 = 0$, а тому також $\lambda kt - t^2 = (\lambda k - t)t = 0$, і звідси $t^2 = \lambda^2 k^2 \neq 0$, що суперечить припущенню. Отже, якщо $k^2 \neq 0$, $t^2 \neq 0$, то $\{k^2\} = \{t^2\}$, а отже, $|\mathcal{F}_p^2| = p$. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай t, r – довільні елементи кільця R. Якщо $t^2 = 0$, то $tR \leqslant \{t\}$. Тому нехай надалі $t^2 \neq 0$.

Для елемента t із $\mathcal{F}_p$, очевидно, $\{t^2\} = \mathcal{F}_p^2$ і $tr = 0$ або $0 \neq tr \in R^2 \cap \mathcal{F}_p = R_p = \{t^2\} \leqslant \{t\}$. Звідси легко випливає, що для будь-якого елемента скінченного порядку t маємо $tr \in \{t^2\}$.

Тому нехай $|t| = \infty$. Оскільки $t^2 \in \mathcal{F}(R)$, то за умовою теореми $|t^2| = \pi$ для деякого вільного від квадратів $\pi \in \mathbf{Z}^*$. Тоді, очевидно, $(\pi t)^2 = 0$ та $\pi t R = 0$. Нехай $\pi = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ – канонічний розклад числа π у добуток простих чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тоді із умови $|t^2| = \pi$ випливає, що

$$\{t^2\} = \mathcal{F}_{p_1}^2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{p_n}^2, \ \mathcal{F}_{p_i}^2 \neq 0 \ /i = \overline{1,n}/.$$

А з співвідношення $\pi t R = 0$, тобто

$$tR \leqslant \sum_{i=1}^{n} {}^{\oplus} \mathcal{F}_{p_i}^2,$$

також випливає, що $tR \leqslant \{t\}$.

Будь-яке підкільце із R, породжене одним елементом, є правим ідеалом. Це означає, що R – праве гамільтонове кільце. Теорема доведена.

5. Змішані праві гамільтонові кільця з періодичним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ та радикалом Левицького $\mathcal{L}(R)$

ТЕОРЕМА 5.1. *Нехай R – змішане кільце з періодичним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ за радикалом Левицького $\mathcal{L}(R)$. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо $R = T \oplus \Phi$ – пряма сума неперіодичного правого гамільтонового ніль кільця T та кільця $\Phi = \sum_p^{\oplus} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, де пряма сума береться за різними простими p.*

Доведення. Достатність випливає внаслідок леми 1.8.

Необхідність. Нехай r – довільний елемент кільця R. За теоремою 3 [25]

$$\{r\} = S \oplus P,$$

де S – нільпотентне кільце, породжене одним елементом, а $P \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ для певного $m \in \mathbf{Z}^*$. На основі цього

$$R = \mathcal{F}(R) + \mathcal{L}(R)$$

і оскільки $R/\mathcal{F}(R)$ – ніль-кільце без скруту, то внаслідок теореми 2.1 $R^2 \subseteq \mathcal{F}(R)$. Якщо $\mathcal{F}(R) \cap \mathcal{L}(R) = 0$, то $R = \mathcal{F}(R) \oplus \mathcal{L}(R)$ та $\mathcal{L}(R)^2 = 0$, і за твердженням 1.5 $\mathcal{F}(R) = \sum_p^{\oplus} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ – пряма сума за різними простими p. Але тоді $\mathcal{F}(R)$ та $\mathcal{L}(R)$ гамільтонові кільця, а тому кільце також гамільтонове.

Припустимо, що $\mathcal{F}(R) \cap \mathcal{L}(R) \neq 0$. Тоді $\mathcal{F}(R) \neq \mathcal{L}(\mathcal{F}(R)) \neq 0$ і будова кільця $\mathcal{F}(R)$, описана теоремою 3.1 /див. тип 2/, із якої випливає, що

$$R = \mathcal{F}(R) + \mathcal{L}(R) = M + \Phi,$$

$M \cap \Phi = 0$, $\Phi M = 0$, де M – змішане праве гамільтонове ніль-кільце, $\Phi \cong \sum_p^{\oplus} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ – пряма сума за різними простими p.

Якщо a – елемент нескінченного порядку із M, e – одиниця кільця Φ, то очевидно, $ae = \delta a^2$ для певного $\delta \in \mathbf{Z}$ і, як наслідок,

$$ae = ae^2 = \delta a^2 e = \delta aea,$$

Але тоді для будь-якого елемента $t \in \mathcal{F}(R)$ маємо $|a+t| = \infty$, а тому $te = (e+t)e = 0$. Це означає, що $R = M \oplus \Phi$. Теорема доведена.

6. Змішані праві гамільтонові кільця R з фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ без скруту

Нагадаємо, якщо порядок кожного періодичного елемента змішаного кільця є степінь простого числа p, то таке кільце називається $\overline{p}$-кільцем.

Якщо конгруенція $x^2 \equiv a(mod p)$ має хоч би один розв'язок, то a називається квадратичним лишком за модулем p; в іншому разі a називається квадратичним нелишком за модулем p.

ТЕОРЕМА 6.1. *Нехай R – змішане кільце з фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ без скруту. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо*

$$R = \mathcal{L}(R) + \{a\} ,$$

$a^3 = \nu a^2$, $|a^2 - \nu a| = \pi$, $\pi, \nu \in \mathbf{Z}^*$, π *вільне від квадратів і ділить* ν

$$\mathcal{L}(R) = \sum_p {}^{\oplus} \mathcal{L}_p \text{ —}$$

змішане або періодичне ніль-кільце, яке є прямою сумою ідеалів за різними простими p, кожен з яких є p-кільце або змішане $\overline{p}$-кільце, ізоморфне одному з кілець:

1) кільцю K, де $K^2 = 0$, $aK = 0$ та $la = \nu l$ для кожного елемента $l \in K$;

2) кільцю K, де $K = \{u\} + \operatorname{Ann} K$, $u^3 = pu^2 = 0$, $a \operatorname{Ann} K = 0$, $u^2 \neq 0$, $la = \nu l$ для кожного елемента $l \in \operatorname{Ann} K$ і виконуються умови:

а) якщо p не ділить π, то $au = 0$;

б) якщо p ділить π, то

$$u^2 = x\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a);$$

$$au = \epsilon\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a);$$

$$ua = \delta\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a) + \nu u;$$

$x, \epsilon, \delta \in \mathbf{Z}$, *причому*

б$_1$) $(x, p) = 1$;

б$_2$) *якщо* $p > 2$, *то* $\frac{\pi}{p}(\frac{\pi}{p}(\delta + \epsilon)^2 - 4x)$ *квадратичний нелишок за модулем* p;

б$_3$) *якщо* $p = 2$, *то число* $\delta + \epsilon$ *непарне;*

3) кільцю K, *де* $K = \{u, w\} + \operatorname{Ann} K$, $u^3 = pu^2 = 0$, $w^3_* = pw^2 = 0$, $w^2 = \delta u^2 \neq 0, uw = \delta_1 u^2$, $wu = \delta_2 u^2$, $\delta, \delta_1, \delta_2 \in \mathbf{Z}$, p *не ділить* π */а отже,* $aK = 0$/, $la = \nu l$ *для кожного елемента* $l \in K$, *причому виконуються умови:*

а) $(\delta, p) = 1$;

б) якщо $p > 2$, *то* $(\delta_1 + \delta_2)^2 - 4\delta$ *– квадратичний нелишок за модулем простого* p;

в) якщо $p = 2$, *то число* $\delta_1 + \delta_2$ *непарне.*

Доведення. Необхідність. Нехай R – змішане праве гамільтонове кільце з фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ без скруту. Тоді за наслідком 1.3 $R/\mathcal{L}(R)$ комутативне, а тому $R/\mathcal{L}(R) = \{\overline{a}\}$ для деякого елемента $\overline{a}$ нескінченного порядку. Звідси

$$R = \{\mathcal{L}(R), a\} = \mathcal{L}(R) \dot{+} \{a\},$$

де a – прообраз елемента $\overline{a}$ в кільці R. За твердженням 1.1 елемент a має тип K_7 або K_8. Крім того, очевидно, $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{L}(R)$ та $R^2 \not\subseteq \mathcal{F}(R)$. Оскільки для довільного елемента $c \in \mathcal{L}(R)$

$$ac = \alpha_1 a + \beta_1 a^2 \quad ,$$

де α_1, β_1 – деякі цілі числа, та

$$\pi\alpha_1 a + \pi\beta_1 \nu a = \pi ac \in \mathcal{L}(R),$$

то $\alpha_1 + \beta_1 \nu = 0$ та $ac = \beta_1(a^2 - \nu a) \in \{a^2 - \nu a\}$.

Нехай f – довільний елемент із $\mathcal{F}(R)$. Тоді

$$(f + \nu|f|a)a = \xi(f + \nu|f|a) + \eta(f + \nu|f|a)^2$$

для деяких $\xi, \eta \in \mathbf{Z}$, а звідси

$$fa - \xi f - \eta f^2 = -|f|\nu^2 a + \xi|f|\nu a + \eta|f|^2\nu^3 a,$$

і, як наслідок, $\xi = \nu - \eta\nu^2|f|$ та $fa = \nu f + \eta f^2$.
Аналогічно, якщо d – довільний елемент нескінченного порядку із $\mathcal{L}(R)$, то внаслідок теореми 2.1 /див. тип 3/ також

$$da = \nu d + \eta_1 d^2$$

для деякого $\eta_1 \in \mathbf{Z}$. Крім того, для довільних $l \in \mathcal{F}_p$ та $t \in \mathcal{L}(R)$ із рівності

$$(l + \nu a)t = \alpha(l + \nu a) + \beta(l + \nu a)^2,$$

де $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, одержуємо

$$-(\alpha\nu a + \beta\nu^2 a^2) = -lt + \alpha l + \beta l^2 + \beta\nu^2 l + \beta\beta_2\nu l^2 \in \mathcal{L}(R),$$

де $la = \nu l + \beta_2 l^2$, $\beta_2 \in \mathbf{Z}$, звідки випливає, що

$$lt \in \{l^2\}. \qquad (6.1)$$

Покладемо $u = \mu a - c$, де $\mu \in \mathbf{Z}$. Припустимо, що π не ділить μ. Враховуючи, що $ca = \nu c + \theta c^2$ для деякого $\theta \in \mathbf{Z}$, маємо

$$u^2 = \mu\nu u + (1 - \mu\theta)c^2$$

і на підставі цього для деякого $\gamma \in \mathbf{Z}$

$$uc = \gamma(1 - \mu\theta)c^2 \in \{c^2\}. \qquad (6.2)$$

$ac \in \{c^2\}$, а отже, якщо $c^2 = 0$, то $ac = 0$. Із (6.1) та (6.2) також випливає, що кожне підкільце із $\mathcal{L}(R)$ є двосторонній ідеал кільця R та $\mathcal{L}(R)$ – змішане /або періодичне/ гамільтонове ніль-кільце.

Припустимо, що $a^2 = \nu a$. Оскільки $ca = \nu c + \theta c^2$, то покладемо $u_1 = a - \theta c$; тоді із рівностей

$$u_1^2 = a^2 - \theta ac - \theta ca + \theta^2 c^2 = \nu u_1$$

випливає, що $u_1 t = 0$ для будь-якого $t \in \mathcal{L}(R)$, а отже, $\theta ct = at = 0$, звідки /при $t = c$/ маємо $ca = \nu c$. Тому, $ca - \nu c \in \{a^2 - \nu a\}$ для будь-якого елемента $c \in \mathcal{L}(R)$.

Розглянемо два можливі випадки.

1. Нехай $\mathcal{L}(R)$ – змішане кільце. Тоді згідно з [11]

$$\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}_{\overline{p}_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{\overline{p}_\alpha} \oplus \dots \text{ —}$$

/кільцева/ пряма сума $\overline{p}_\alpha$-ідеалів /принаймні один з яких змішаний/, причому кожний змішаний $\overline{p}_\alpha$-ідеал $\mathcal{L}_{\overline{p}_\alpha}$ ізоморфний одному з кілець:

A_1) змішаному $\overline{p}$-кільцю T, де $T^2 = 0$;

$Б_1$) змішаному $\overline{p}$-кільцю T, де $T = \{u\} + \operatorname{Ann} T$, $u^3 = pu^2 = 0$, причому якщо $|u| < \infty$, то $\operatorname{Ann} T$ – змішане підкільце;

B_1 змішаному $\overline{p}$-кільцю T, де $T = \{u, w\} + \operatorname{Ann} T$, $u^3 = pu^2 = 0$, $w^3 = pw^2 = 0$, $w^2 = \delta u^2 \neq 0$, $uw = \delta_1 u^2$, $wu = \delta_2 u^2$, $\delta, \delta_1, \delta_2 \in \mathbf{Z}$, причому

а) $(\delta, p) = 1$;

б) якщо $p > 2$, то число $(\delta_1 + \delta_2)^2 - 4\delta$ квадратичний нелишок за модулем простого числа p;

в) якщо $p = 2$, то число $\delta_1 + \delta_2$ непарне. Зрозуміло, що в усіх випадках, якщо $l^2 = 0$, то $la = \nu l$ та $a \cdot \operatorname{Ann} T = 0$.

Розглянемо тип $Б_1$. Якщо p не ділить π, то $au = 0$. Тому припустимо, що p ділить π. Тоді

$$u^2 = x\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a);$$

$$au = \epsilon\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a);$$

$$ua = \nu u + \delta\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a)$$

для деяких цілих чисел x, ϵ, δ, причому $(x, \delta) = 1$. Припустимо, $t = sa + u$, де $s \in \mathbf{Z}$, $s > 1$, $(s, p) = 1$. Тоді $t^2 - s\nu t = t_0$, де

$$t_0 = s^2(a^2 - \nu a) + \frac{\pi}{p}(\delta s + \epsilon s + x)(a^2 - \nu a).$$

Якщо силовська p-підгрупа адитивної групи $\{t^2 - s\nu t\}^+$ нульова, то $\frac{\pi}{p}t_0 = 0$, звідси випливає конгруенція

$$s^2 + \frac{\pi}{p}s(\delta + \epsilon) + \frac{\pi}{p}x \equiv 0 (mod p).$$

Але тоді із
$$ta = \nu t + s(a^2 - \nu a) + \delta\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a)$$
та
$$tu = \frac{\pi}{p}(s\epsilon + x)(a^2 - \nu a)$$
також випливають конгруенції
$$s + \frac{\pi}{p}\delta \equiv 0(modp);$$
$$s\epsilon + x \equiv 0(modp),$$
а це, як легко бачити, одночасно для всіх $s > 1$ неможливо. Тому
$$\frac{\pi}{p}\left(\frac{\pi}{p}(\delta + \epsilon)\right)^2 - 4x) —$$
квадратичний нелишок за модулем p; якщо ж $p = 2$, то $\delta + \epsilon$ непарне число. Отже, T – кільце типу 2 із умови теореми.

Перейдемо до розгляду типу B_1. Припустимо, що p ділить π. Тоді
$$\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a) = \delta_0 u^2;$$
$$au = \theta_1 u^2;$$
$$aw = \theta_2 u^2,\ ua = \theta_3 u^2 + \nu u,\ wa = \theta_4 u^2 + \nu w,$$
для деяких цілих $\delta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, а отже,
$$(\phi a + \psi u + \rho w)^2 = \nu\phi(\phi a + \psi u + \rho w) + \phi^2 p\epsilon_2(a^2 - \nu a) + t_1,$$
де $t_1 = t_1(\phi, \psi, \rho) = \phi^2\delta_0\epsilon_1 + \psi^2 + \rho^2\delta + \phi\psi(\theta_1 + \theta_3) + \phi_\rho(\theta_2 + \theta_4) + \psi_\rho(\delta_1 + \delta_2)$, а ϵ_1 та ϵ_2 такі цілі числа, що $\frac{\pi}{p}\epsilon_1 + p\epsilon_2 = 1$. Оскільки за теоремою Шевалле /див., наприклад, [27, с. 13] або [28, с. 176]/ конгруенція $t_1 \equiv 0(modp)$ має ненульовий розв'язок $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, то $t_1(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = 0$ та адитивна підгрупа
$$\{(\alpha_0 a + \beta_0 u + \gamma_0 w) - \nu\alpha_0(\alpha_0 a + \beta_0 u + \gamma_0 w)\}^+$$

має нульову силовську p-підгрупу, що, очевидно, неможливо. Отже, p не ділить π та $au = aw = 0$, і T – кільце типу 3 із умови теореми.

2°. Припустимо тепер, що $\mathcal{L}(R)$ – періодичне. Нехай t – якийнебудь елемент із $\mathcal{L}_p$. Тоді оскільки

$$(a+t)t = \xi_2(a+t) + \eta_2(a+t)^2$$

для деяких $\xi_2, \eta_2 \in \mathbf{Z}$ та для деякого вільного від квадратів числа $\mu_1 \in \mathbf{Z}$ знайдеться таке число $\omega \in \mathbf{Z}^*$, що

$$\mu_1(a+t)^2 = \mu_1\omega(a+t),$$

то, приймаючи μ_2 рівним найменшому спільному кратному чисел μ_1 та π, одержуємо

$$\mu_2(at + t^2) = (\mu_2\xi_2 + \mu_2\omega\eta_2)(a+t),$$

звідси випливають рівності

$$\mu_2(\xi_2 + \omega\eta_2) = 0;$$

$$\mu_2 t^2 = 0.$$

Отже, $p\mathcal{L}_p^2 = 0$. Внаслідок доведеного вище та результатів із [13] $\mathcal{L}_p$ кільце типу R_1 /у розумінні [13]/, тобто воно ізоморфне одному із кілець:

A_2) p-кільцю K, де $K^2 = 0$, причому $aK = 0$ та $la = \nu l$ для кожного $l \in K$;

Б$_2$) p-кільцю K, де $K = \{k\} + \mathrm{Ann}\, K$, $k^3 = pk^2 = 0$, причому $a \cdot \mathrm{Ann}\, K = 0$ та $la = \nu l$ для кожного $l \in \mathrm{Ann}\, K$;

B_2) p-кільцю K, де $K = \{k_1, k_2\} + \mathrm{Ann}\, K$, $k_i^3 = pk_i^2 = 0$, $k_ik_j = \alpha_{ij}k_1^2 /i, j = 1, 2/, \alpha_{ij} \in \mathbf{Z}, a \cdot \mathrm{Ann}\, K = 0$ та $la = \nu l$ для кожного $l \in \mathrm{Ann}\, K$, причому при $p > 2$ число $(\alpha_{12} + \alpha_{21})^2 - 4\alpha_{22}$ – квадратичний нелишок за модулем p, а при $p = 2$ числа $\alpha_{12} + \alpha_{21}$ та α_{22} непарні. Міркуваннями, аналогічними як і у випадку змішаного підкільця $\mathcal{L}(R)$, показано, що $\mathcal{L}_p$ є p-кільце одного із типів 1)–3). Необхідність доведена.

<u>Достатність.</u> Очевидно, досить показати, що $R = \mathcal{L}_p + \{a\}$ – праве гамільтонове кільце для підкілець $\mathcal{L}_p$ типів 1)–3). Оскільки для кільця

$\mathcal{L}_p$ типу 1) це очевидно, то нехай спочатку $\mathcal{L}_p$ – кільце типу 2), $t = sa + ku + l$ – довільний елемент із R, де $s, k \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathrm{Ann}(\mathcal{L}_p)$. Тоді

$$t^2 = s\nu t + s^2(a^2 - \nu a) + sk\frac{\pi}{p}(\epsilon + \delta)(a^2 - \nu a) + k^2 x\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a).$$

Нехай p ділить s, а тому, $s(a^2 - \nu a) \in \{t\}$. Тоді, якщо p ділить k, то $ta = \nu t + s(a^2 - \nu a)$, $tu = 0$, а отже, $\{t\}$ – правий ідеал. Якщо ж p не ділить k, то $k^2 x\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a) \neq 0$, а отже, $\{\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a)\} \leqslant \{t\}$. І оскільки

$$ta = \nu t + s(a^2 - \nu a) + k\delta\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a);$$

$$tu = (s\epsilon + kx)\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a),$$

то і в цьому випадку $\{t\}$ – правий ідеал.

Тому нехай p не ділить s. Тоді із $б_1$ та $б_2$ випливає, що

$$\{\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a)\} = \{\frac{\pi}{p}(s^2 + sk\frac{\pi}{p}(\epsilon + \delta) + k^2 x\frac{\pi}{p})(a^2 - \nu a)\} \leqslant \{t\}$$

та $\{ps(a^2 - \nu a)\} \leqslant \{t\}$, на основі чого

$$ta = \nu t + s(a^2 - \nu a) + k\delta\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a) \in \{t\},$$

$$tu = (s\epsilon + kx)\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a) \in \{t\}$$

і $\{t\}$ – правий ідеал.

Тепер розглянемо підкільце $R = \mathcal{L}_p + \{a\}$, де $\mathcal{L}_p$ – кільце типу 3). Нехай $t = sa + ku + mw + l$ – довільний елемент із R, де $s, k, m \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathrm{Ann}(\mathcal{L}_p)$. Аналогічними міркуваннями неважко показати, що $\{t\}$ – правий ідеал. Теорема доведена.

7. Змішані праві гамільтонові кільця зі змішаним фактор-кільцем за радикалом Левицького

Теорема 7.1. *Нехай R – змішане кільце зі змішаним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ за радикалом Левицького $\mathcal{L}(R)$. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо $R = R_1 \oplus R_2$ – пряма сума кільця $R_2 \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ та змішаного правого гамільтонового кільця $R_1 = \mathcal{L}(R_1) + \{a\}$ з фактор-кільцем $R_1/\mathcal{L}(R_1)$ без скруту, причому $|a| = \infty$, $a^3 = \nu a^2$, $|a^2 - \nu a| = \pi$, де π, m – ненульові цілі числа, вільні від кадратів, $\nu \in \mathbf{Z}^*$ та π ділить ν.*

Доведення. Необхідність. За наслідком 1.3 фактор-кільце $R/\mathcal{L}(R)$ комутативне. Із [10, 12] випливає, що $R/\mathcal{L}(R) = \{\overline{a}\}$, де $|\overline{a}| = \infty$, $\overline{a}^2 \neq 0$. Тому $R = \mathcal{L}(R) + \{a\}$, де a – прообраз елемента $\overline{a}$ у кільці R, причому, як випливає із твердження 1.1 /див. типи K_9 та K_{10}/,

$$\{a\} = \{a_1\} \oplus R_2,$$

$|a_1| = \infty$, $R_2 \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, m > 1$, $a_1^3 = \nu a_1^2$, $|a_1^2 - \nu a_1| = \pi$ /можливо, $\pi = 1$/, $\pi \in \mathbf{Z}^*$, $\nu \in \mathbf{Z}^*$, числа m та π вільні від квадратів і ділять ν. Позначимо через R_1 підкільце $\{\mathcal{L}(R), a_1\}$. Зрозуміло, що $R = R_1 + R_2$ та $R_1/\mathcal{L}(R_1)$ – праве гамільтонове кільце без скруту. Крім цього, очевидно, $R_2 R_1 = 0$.

Нехай t – довільний елемент із $\mathcal{L}(R)$ індекса нільпотентності n. Тоді для одиничного елемента e кільця R_2 маємо $te = \alpha t + \beta t^2$, де $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$. Якщо $|t| = \infty$, то $\alpha t = te - \beta t^2$ /див. теорему 4.1/, а отже, $te = \beta t^2$ та $te = te^2 = \beta t^2 e = 0$. Тому нехай $t \in \mathcal{F}(R)$. І оскільки

$$(t + \pi a_1)e = \xi(t + \pi a_1) + \eta(t + \pi a_1)^2$$

для деяких $\xi, \eta \in \mathbf{Z}$, а отже,

$$\pi(\xi + \nu\eta)a_1 = te - \xi t - \eta t^2 - \eta\pi t a_1 - \eta\pi a_1 t \in \mathcal{F}(R),$$

то $\xi + \nu\eta = 0$,

$$te = -\nu\eta t + \eta t^2 + \eta\pi t a_1 + \eta\pi a_1 t,$$

і звідси, зважаючи на те, що m ділить ν,

$$te = te^2 = -\nu\eta te = 0\,.$$

Також $R_1R_2 = 0$ і $R = R_1 \oplus R_2$. Необхідність доведена.

Достатність майже очевидна. Теорема доведена.

8. Праві гамільтонові ніль-p-кільця характеристики 0

Оскільки кожне праве гамільтонове кільце, очевидно, володіє однією із властивостей:

1) R – періодичне ніль-кільце;
2) R – періодичне неніль-кільце /див. теорему 3.1/;
3) R – кільце без скруту /див. теорему 2.1/;
4) R – змішане ніль-кільце /див. теорему 4.1/;
5) R – змішане неніль-кільце з періодичним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ /див. теорему 5.1/;
6) R – змішане неніль-кільце з фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ без скруту /див. теорему 6.1/;
7) R – змішане неніль-кільце зі змішаним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ /див. теорему 7.1/,

то для опису будови правих гамільтонових кілець залишається /див. також наслідок 1.9/ дослідити праві гамільтонові ніль-p-кільця B у випадках, коли

а) B – кільце характеристики 0;

б) B – кільце скінченної характеристики p^k /$k \in \mathbf{N}$/.

У цій роботі, використовуючи [9], ми охарактеризуємо тільки випадок 1а .

Дві наступні леми є легкими посиленнями лем 4.6.6 та 4.6.7 [9].

Лема 8.1. *Якщо R – праве гамільтонове p-кільце, то $x^3 \in \{x^2\}$.*

Лема 8.2. *Якщо R – праве гамільтонове кільце, x, y – елементи кільця R такі, що*

$$|y| \geqslant p^{2m}, \quad \text{де } p^m = |x|,$$

то $px^2 = 0$.

Доведення. Нехай $|y| = p^{2m+r}$ для деякого $r \in \mathbf{N}$. Оскільки

$$(px)x = \alpha px + \beta p^2 x^2$$

для деяких $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, то

$$(1 - \beta p)px^2 = \alpha px,$$

звідки випливає, що $px^2 \in \langle px \rangle$.

Припустимо, що $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 0$. Тоді оскільки

$$(px + p^m y)x = \xi(px + p^m y) + \eta(px + p^m y)^2$$

для деяких $\xi, \eta \in \mathbf{Z}$, то

$$px^2 - \xi px - \eta p^2 x^2 = \xi p^m y + \eta p^{2m} y^2,$$

причому ліва частина цієї рівності належить підгрупі $\langle px \rangle$, а права – підгрупі $\langle py \rangle$. Отже,

$$px^2 = \xi px + \eta p^2 x^2;$$

$$\xi p^m y + \eta p^{2m} y^2 = 0$$

і, як наслідок, p^m ділить ξ. Але тоді з першого рівняння випливає, що $px^2 = 0$

Тому тепер припустимо, що $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq 0$. Нехай

$$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle p^s x \rangle = \langle p^{r+m+s} y \rangle$$

для деякого $s \in \mathbf{Z}$ такого, що $0 \leqslant s < m$. Тоді для певних $r, \delta \in \mathbf{Z}$

$$p^{r+m+s} y = \delta p^s x,$$

причому $\delta \not\equiv 0 (mod p)$, і звідси

$$p^{s-1}(\delta px - p^{r+m+1} y) = 0.$$

Далі, оскільки

$$(\delta px - p^{r+m+1} y)x = \xi_1(\delta px - p^{r+m+1} y) + \eta_1(\delta px - p^{r+m+1} y)^2$$

для певних $\xi_1, \eta_1 \in \mathbf{Z}$, то

$$\delta px^2 = \xi_1(\delta px - p^{r+m+1} y) + \eta \delta^2 p^2 x^2, \qquad (7.1)$$

звідки

$$\xi_1 p^{r+m+1} y = \eta \delta^2 p^2 x^2 + \xi_1 \delta px - \delta px^2 \in \langle px \rangle \leqslant \langle x \rangle,$$

а отже, p^{s-1} ділить ξ_1. Але тоді із (7.1) випливає рівність

$$\delta px^2 = \eta \delta^2 p^2 x^2,$$

яка можлива тільки якщо $px^2 = 0$. Лема доведена.

ТЕОРЕМА 8.3. *Ніль-p-кільце R характеристики 0 є праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо R – майже нульове справа, тобто для всіх елементів $x \in R$ $x^3 = px^2 = 0$, $xR \leqslant \{x^2\}$.*

Доведення. Необхідність. Нехай R – праве гамільтонове ніль-p-кільце характеристики нуль. За лемою 8.2 $px^2 = 0$ для всіх елементів $x \in R$. Для певності нехай

$$|x| = p^r, \ |y| = p^s$$

для деяких $r, s \in \mathbf{N}$ та $t = \max\{r, s\} + 1$.

Виберемо в кільці R такий елемент z, щоб $|z| = p^{2t}$. Розглянемо можливі три випадки.

1 . Нехай $\langle z\rangle \cap \{x\} = 0$. Покладемо $w = x + p^t z$. Тоді

$$xy = (x + p^t z)y = wy \in \{w\},$$

і оскільки для певних $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbf{Z}$

$$wy = \alpha_1 w + \beta_1 w^2 = \alpha_1(x + p^t z) + \beta_1 x^2,$$

то

$$xy - \alpha_1 x - \beta_1 x^2 = \alpha_1 p^t z \in \{x\} \cap \langle z\rangle,$$

а отже, p^t ділить α_1, і на підставі цього

$$xy = \beta_1 x^2 \in \{x^2\} \ .$$

2 . Нехай $\langle x\rangle \cap \langle z\rangle = \langle p^k x\rangle \neq 0$. Тоді

$$p^{2t+k-r} z = \alpha p^k x \ ,$$

причому $\alpha \not\equiv 0 (mod p)$. Підставимо $w = \alpha x - p^{2t-r} z$. Маємо для певних $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbf{Z}$

$$\alpha xy = (\alpha x - p^{2t-r-1} z)y = wy = \alpha_2 w + \beta_2 w^2 =$$

$$= \alpha_2(\alpha x - p^{2t-r-1} z) + \beta_2 \alpha^2 x^2,$$

і звідси

$$p\alpha xy - p\alpha_2 \alpha x = -\alpha_2 p^{2t-r} z \in \langle x\rangle \cap \langle z\rangle,$$

а отже, p^k ділить α_2 та $\alpha_2(\alpha x - p^{2t-r}z) = 0$ Тому $\alpha xy = \beta_2\alpha^2 x^2$ та $xy \in \{x^2\}$.

3.. Нехай $\langle z\rangle \cap \{x\} \neq 0$ та $\langle z\rangle \cap \langle x\rangle = 0$. Тоді для деяких цілих μ та θ маємо

$$p^{2t-1}z = \mu p^{r-1}x + \theta x^2.$$

Розглянемо два можливі підвипадки.

а) Спочатку припустимо, що $\mu \equiv 0(mod p)$, $w = x + p^t z$. Тоді для деяких $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbf{Z}$

$$xy = (x + p^t z)y = wy = \alpha_3(x + p^t z) + \beta_3(x + p^t z)^2,$$

а отже,

$$pxy - p\alpha_3 x = \alpha_3 p^{t+1} z \in \langle x\rangle \cap \langle z\rangle,$$

і, як наслідок, p^{t-1} ділить α_3. На підставі цього для певного $\gamma \in \mathbf{Z}$

$$xy - \beta_3 x^2 = \alpha_3 p^t z = \gamma p^{2t-1} z = \gamma(\mu p^{r-1}x + \theta x^2) = \gamma\beta x^2,$$

звідки $xy \in \{x^2\}$.

б) Тепер нехай $\mu \not\equiv 0(mod p)$. Підставимо $w = \mu x - p^{2t-r}z$. Тоді для деяких $\alpha_4, \beta_4 \in \mathbf{Z}$ маємо

$$\mu xy = (\mu x - p^{2t-r}z)y = wy = \alpha_4(\mu x - p^{2t-r}z) + \beta_4(\mu x - p^{2t-r}z)^2$$

та

$$p\mu xy - p\alpha_4\mu x = -\alpha_4 p^{2t-r+1} z \in \langle px\rangle \cap \langle z\rangle,$$

а отже, p^{r-1} ділить α_4, а тому для деякого $\nu \in \mathbf{Z}$

$$\mu xy = \nu(\mu p^{r-1}x - p^{2t-1}z) + \beta_4\mu^2 x^2 = (\beta_4\mu^2 - \theta\nu)x^2,$$

звідки $xy \in \{x^2\}$. Отже, $xy \in \{x^2\}$ для будь-яких елементів $x, y \in R$. Теорема доведена.

Твердження 8.4. *Нехай R – нільпотентне p-кільце, причому $|R^2| \leqslant p$. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо R належить до одного із типів:*

1) R – майже нульове справа;

2) R^+ містить такий елемент x нульової висоти та підгрупу N, що

$$R^+ = \langle x \rangle \oplus N$$

/групова/ пряма сума, $NR = \{p^{k-1}x\}$, $|x| = p^k$, $x^2 = 0$, $\{y \in N | y^2 = 0\} \leqslant \mathrm{Ann}_l R$, $\exp N \leqslant p^k$, $\exp(\mathrm{Ann}\, R) < p^k$, $\exp(N \cap \mathrm{Ann}_l R) < p^k$. *Якщо крім того,* $\exp N = p^k$, *то $xy = -yx$ для всіх елементів $y \in R$.*

Доведення. Необхідність. Нехай R – праве гамільтонове нільпотентне p-кільце, причому R не є майже нульове справа. Тоді внаслідок теореми 8.3 знайдеться такий елемент $x \in R$, що $x^2 = 0$ та $xR \neq 0$. Оскільки $pR \leqslant \mathrm{Ann}_l R$, то x має нульову висоту [17], а тому $R^+ = \langle x \rangle \oplus N$ – /групова/ пряма сума для деякої підгрупи N. Зрозуміло, що $R^2 \leqslant \{x\}$, а отже, $R^2 = \{p^{k-1}x\}$, де $p^k = |x|$.

Нехай $y \in N$. Якщо $y^2 \neq 0$, то $\langle y^2 \rangle = R^2 = \langle p^{k-1}x \rangle$, а тому $yR \subseteq \langle y^2 \rangle$. Якщо ж $y^2 = 0$, то $yR \subseteq \langle y \rangle \cap R^2 = 0$, а отже, $y \in \mathrm{Ann}_l R$. Отже, $NR = \{p^{k-1}x\}$ та $\{y \in N | y^2 = 0\} \subseteq \mathrm{Ann}_l R$.

Припустимо, що $\exp N > p^k$. Тоді знайдеться такий елемент $y \in N$, що $|y| > p^k$, і для кожного такого елемента маємо

$$(x + py)y = \alpha_1(x + py) + \beta_1(x + py)^2,$$

де $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbf{Z}$, звідки

$$xy - \alpha_1 x = \alpha_1 py \in \langle x \rangle \cap N,$$

а тому p^k ділить α_1 і $xy = 0$.

Оскільки $x \notin \mathrm{Ann}_l R$, то $xz \neq 0$ для деякого z, причому, як тільки що доведено, $|z| \leqslant p^k$. Але тоді $|z + y| > p^k$, а отже, $xz = x(z + y) = 0$. Отримана суперечність показує, що $\exp N \leqslant p^k$.

Тепер припустимо, що $\exp N = p^k$ та y – деякий елемент із N порядку p^k. Тоді для деяких $a, b, c \in \mathbf{Z}$

$$y^2 = ap^{k-1}x,$$

$$xy = bp^{k-1}x,$$
$$yx = cp^{k-1}x.$$

Якщо $c \not\equiv -b(mod p)$, то або $b \not\equiv 0(mod p)$, або $c \not\equiv 0(mod p)$. Нехай, наприклад, $c \not\equiv 0(mod p)$. Покладемо

$$w = ax - (b+c)y.$$

Оскільки $wx = \alpha_2 w + \beta_2 w^2$ для деяких $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbf{Z}$, то

$$\alpha_2 ax + (b+c)cp^{k-1}x = -\alpha_2(b+c)y \in N \cap \langle x \rangle,$$

а тому$(b+c)cp^{k-1}x = 0$ і $c \equiv 0(mod p)$, що суперечить припущенню. Отже, $xy = -yx$. Якщо тепер u – довільний елемент із N, причому $|u| < p^k$, то $|u+y| = p^k$, а отже, $x(u+y) = -(u+y)x$, звідки $xu = -ux$. Отже, $xv = -vx$ для всіх $v \in R$.

Розглянемо тепер двосторонній анулятор $\mathrm{Ann}\, R$ кільця R. Нехай $t \in \mathrm{Ann}\, R$ та $|t| = p^k$. Тоді $t = \mu x + m_0$ для деяких $\mu \in \mathbf{Z}$, $m_0 \in n$. Оскільки $m_0^2 = t^2 = 0$, $tx = m_0 x = 0$, і для довільного $l \in N$ $tl = 0$, а отже,

$$\mu x l = -m_0 l \in \langle x \rangle \cap N,$$

то $m_0 \in \mathrm{Ann}_l R$, звідки $\mu x \in \mathrm{Ann}_l R$. Зважаючи на те, що $\{x\} \cap \mathrm{Ann}_l R = \{px\}$, одержуемо, що $|m_0| = p^k$ та $m_0 \in \mathrm{Ann}\, R$. І тоді оскільки для певних $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbf{Z}$

$$(x + m_0)z = \alpha_3(x + m_0) + \beta_3(x + m_0)^2,$$

то

$$xz - \alpha_3 x = \alpha_3 m_0 \in \langle x \rangle \cap N,$$

а отже, p^k ділить α_3 і, як наслідок, $xz = 0$, що неможливо. Тому $\exp(\mathrm{Ann}\, R) < p^k$.

Нехай $m \in N \cap \mathrm{Ann}_l R$ та $|m| = |x|$. Тоді із $xR = (x+m)R \leqslant \{m+x\}$ та $(m+x)^2 = 0$ випливае, що $p^{k-1}x = \theta(m+x)$ для деякого $\theta \in \mathbf{Z}$, звідки p^k ділить θ та $p^{k-1}x = 0$, що неможливо. Отже, $\exp(\mathrm{T} \cap \mathrm{Ann}_l R) < p^k$. Необхідність доведена.

Достатність. Очевидно, що кільце типу 1 є правим гамільтоновим. Тому нехай надалі R – кільце типу 2 і $t = \lambda x + m$ /$\lambda \in \mathbf{Z}, m \in N$/

– довільний його елемент. Оскільки $tR = 0$ означає, що $\{t\}$ – правий ідеал, то нехай надалі $tR \neq 0$. Якщо при цьому $t^2 \neq 0$, то, очевидно, $tR \leqslant R^2 = \{t^2\} \leqslant \{t\}$.

Припустимо, що $t^2 = 0$ та $t \notin \mathrm{Ann}_l R$. Тоді при $(\lambda, p) \neq 1$ маємо $mR = tR \neq 0$ у той час як $m^2 = (m + \lambda x)^2 = 0$, а це суперечить умові. Отже, $(\lambda, p) = 1$, і або $|m| < |x|$ /а тому $\lambda p^{k-1} x \in \{t\}$ та $tR \leqslant \{t\}$/, або $|m| = |x|$ /і тоді $mx = -xm, m^2 = 0$, що неможливо/. Теорема доведена.

Список літератури

1. Днестровская тетрадь: 3-е изд. Новосибирск, 1982.
2. Шперлинг М. *О кольцах, каждое подкольцо которых является идеалом* // Мат. сборник. 1945.Т.17. N3. С.371-384.
3. Redei L. *Vollidealringe in weiteren Sinn* // Acta Math. Acad. Hung. 1952.V.3. S.243-268.
4. Redei L. *Die Vollidealringe* // Monatsch. Math. 1952.V.56. S.89-95.
5. Jones A., Schafferäffer J.J. *Concerning the structure of certain rings* // Bol.Fac.Inden. Agrimens. Montevideo, 1958.V.6. P.327-335.
6. Фрейдман П.А. Письмо в редакцию /по поводу статьи М.Шперлинга// Мат. сборник. 1960.V.52. N3. С.915-916.
7. Kruse R.L. A characterization of rings in which all subrings are ideals // Notices Amer.Math.Soc. 1964.V.11. N7. P.780.
8. Kruse R.L. *Rings in which all subrings are ideals*, I// Canad.J.Math., 1968.V.20. N4. P.862-871.
9. Kruse R.L., Price D.I. Nilpotent rings. N.Y., 1969. 130p.
10. Андриянов В.И., Фрейдман П.А. *О гамильтоновых кольцах* // Уч. зап. Свердлов.гос.пед.ин-та. 1965. Вып.31. С.3-23.
11. Андриянов В.И. *Смешанные гамильтоновы нилькольца* // Мат. зап. Урал. ун-та. 1966. Т.5. 3. С.15-30.
12. Андриянов В.И. *Смешанные Г-кольца* // Уч.зап. Свердлов. гос.пед. ин-та. 1967. Вып.51. С.12-21.
13. Андриянов В.И. *Периодические гамильтоновы кольца* // Мат. сборник. 1967. Т.74. N2. С.241-261.
14. Liu S.-X. *On algebras in which every subalgebras is an ideal (chinese)*// Acta Math. Sinica. 1964.V.14. P.532-537.
15. Холл М. Теория групп. М. 1962.
16. Джекобсон Н. Строение колец. М. 1961.
17. Курош А.Г. Теория групп, М., 1967.

18. Артемович О.Д. *Про праві гамільтонові кільця* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 34. С.70-73.

19. Артемович О.Д. *О правых гамильтоновых кольцах* // Симпозиум по теории колец, алгебр и модулей: Тез. сообщений. Львов, 1990. С.11.

20. Артемович О.Д. *Про праві гамільтонові кільця*, II // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.36. С.43-45.

21. Артемович О.Д. О правых гамильтоновых кольцах // Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И.Ширшова /Барнаул, 20-25 августа 1991 г./ Тез. докладов по теории колец алгебр и модулей. Новосибирск, 1991. С.10.

22. Артемович О.Д. *Про праві гамільтонові кільця, III* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.38. С.33-35.

23. Фрейдман П.А. *Кольца с правым идеализаторным условием* // Мат. зап. Урал. ун-та. 1963. Т.4. 3. С.51-58.

24. Хмельницкий И.Л. *Кольца, в которых все подкольца являются метаидеалами конечного индекса* // Изв. вузов. Математика. 1979. N4. С.53-67.

25. Фрейдман П.А. *О кольцах с идеализаторным условием, II* // Уч. зап. Урал. ун-та. 1959. Т. 23. 1. С.35-48.

26. Фрейдман П.А. *Кольца с идеализаторным условием, I* // Изв.вузов. Математика. 1960. N2. С.213-222.

27. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел /3-е изд./ М., 1985.

28. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М., 1987.

УДК 515.544

О.Д.Артемович, О.В.Тураш

ГРУПИ, ВЛАСНІ ПІДГРУПИ ЯКИХ Є РОЗШИРЕННЯМИ ГІПЕРЦЕНТРАЛЬНИХ ГРУП ЗА ДОПОМОГОЮ ЧЕРНІКОВСЬКИХ ГРУП

1. У праці [10] доведено, що локально ступінчаста група, кожна власна підгрупа якої є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської, сама є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської. Група, кожна власна підгрупа якої є розширенням нільпотентної (відповідної гіперцентральної) групи за допомогою черніковської, але сама не є такою, називається $\overline{\mathrm{N\check{C}}}$ (відповідно $\overline{\mathrm{ZA\check{C}}}$-групою). Із [2] випливає, що локально нільпотентна $\overline{\mathrm{N\check{C}}}$-$p$-група досконала і є об'єднанням зростаючого ланцюга власних нормальних нільпотентних підгруп.

Ми довели, що періодична локально ступінчаста $\overline{\mathrm{ZA\check{C}}}$-група – досконала локально нільпотентна група, яка є об'єднанням зростаючого ланцюга нормальних гіперцентральних груп.

Групу, яка є розширенням гіперцентральної (відповідно нільпотентної) групи за допомогою черніковської, будемо називати ZAČ-групою (відповідно NČ-групою). Інші позначення і факти стандартні (див., наприклад, [11]).

2. Правильна така теорема

Теорема 2.1. *Нехай G – періодична локально ступінчаста група, кожна власна підгрупа якої є розширенням гіперцентральної групи за допомогою черніковської групи.*

a) Якщо група G недосконала, то G сама є розширенням гіперцентральної групи за допомогою черніковської.

б) Якщо G – $\overline{\mathrm{ZA\check{C}}}$-група, то вона досконала локально нільпотентна група, і є об'єднанням зростаючого ланцюга нормальних гіперцентральних підгруп.

Для доведення цієї теореми нам потрібні такі твердження.

Лема 2.2. *Нехай G – група, кожна власна підгрупа якої є розширенням гіперцентральної групи за допомогою черніковської, і K – власна нормальна підгрупа G. Тоді в G є така нормальна гіперцентральна підгрупа S, що K/S – черніковська група.*

Доведення. Розглянемо множину

$$\mathcal{A} = \{S: \text{ де } S \text{ – така нормальна гіперцентральна підгрупа } K, \text{ що фактор група } K/S \text{ черніковська}\}.$$

Оскільки K – ZAČ-група, то множина $\mathcal{A}$ непорожня. Нехай

$$\mathcal{A}_1 = \{r \in \mathbf{N}, \text{ де } r = |K/T|, T \text{ – розширення ZA-групи за допомогою прямого добутку скінченної кількості квазіциклічних груп}\}.$$

Через λ_1 позначимо найменше число з множини $\mathcal{A}_1$. Нехай T_1 – така група, що $|K/T_1| = \lambda_1$. Розглянемо множину

$$\mathcal{A}_2 = \{r \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \text{ де } T_1/S \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_r^\infty} \text{ для нормальної гіперцентральної підгрупи } S\}.$$

Через λ_2 позначимо найменше число множини $\mathcal{A}_2$. Якщо $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = 0$, то $K = T_1 = S$, і лема доведена. Припустимо, що $\lambda_1 \neq 1$. Якщо при цьому $\lambda_2 = 0$, то K – розширення гіперцентральної групи за допомогою скінченної групи. Тоді для довільного елемента $g \in G$ отримуємо, що T_1^g – нормальна підгрупа групи $K^g = K$, $T_1T_1^g$ – гіперцентральна підгрупа і $T_1T_1^g \in \mathcal{A}$. Міркуючи аналогічно [3, твердження 3.1], одержуємо $|S/(T_1T_1^g)| \geqslant \lambda_1 = |S/T_1| \geqslant |(T_1T_1^g)/T_1| = \mu$. Крім того, $|S/(T_1T_1^g)| = |(S/T_1)/(T_1T_1^g/T_1)| = \lambda_1/\mu$ Звідси випливає, що $\mu = 1$ та $T_1T_1^g = T_1$, а тому T_1 нормальна гіперцентральна підгрупа G. Отже, $S = T_1 \in \mathcal{A}$.

Якщо ж $\lambda_2 \neq 0$, то нехай S – така гіперцентральна група, що $T_1/S \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_{\lambda_2}^\infty}$. Окрім того, для довільного елемента g групи G $S^g \trianglerighteq K^g = K$ і SS^g – гіперцентральна підгрупа. Нехай $T/(SS^g) \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_n^\infty}$. Тоді $n \leqslant \lambda_2$, і, внаслідок мінімального вибору числа λ_2 одержуємо, що $n = \lambda_2$. Отже, $SS^g = S$ та S – нормальна гіперцентральна підгрупа групи G. Лема доведена.

ЛЕМА 2.3. *Періодична локально ступінчаста $\overline{ZA\check{C}}$-група локально скінченна.*

ЛЕМА 2.4. *Локально ступінчаста $\overline{ZA\check{C}}$-група не містить власних нормальних підгруп скінченного індексу.*

Доведення. Припустимо, що H – власна нормальна підгрупа групи G скінченного індексу. За лемою 2.2 існує нормальна гіперцентральна підгрупа групи G така, що H/K – черніковська група. Тоді G/K – черніковська, і це суперечить умові леми. Лема доведена.

ЛЕМА 2.5. *Періодична локально ступінчаста $\overline{ZA\check{C}}$-група не має простого гомоморфного образу.*

Доведення. Припустимо, що для деякої нормальної підгрупи M фактор-група G/M проста. Оскільки G не має власних нормальних підгруп скінченного індексу, то G/M є $\overline{ZA\check{C}}$-група. За наслідком А1 [4] G/M – лінійна група. Локально скінченна проста група, яка є лінійною, обов'язково є групою типу Лі (див.[5, 12, 13]). Внаслідок [6] $G/M \cong PSL(2, F)$ або $G/M \cong Sz(F)$ для деякого локально скінченного поля F, а це суперечить результатам праці [9]. Отже, G/M не проста. Лема доведена.

Доведення теореми. Від супротивного. Припустимо, що G є $\overline{ZA\check{C}}$-група. За лемою 2.4 G не містить підгруп скінченного індексу.

Припустимо також, що G – недосконала група. Тоді G/G' – подільна періодична абелева група, а тому в G є така нормальна підгрупа L, що фактор-група G/L квазіциклічна. За лемою 2.2 в G також існує така нормальна гіперцентральна підгрупа K, що $K \leqslant L$ і фактор-група L/K черніковська. Але тоді фактор-група G/K черніковська і, як наслідок, G – $ZA\check{C}$-група. Отримана суперечність свідчить, що група G досконала.

Нехай N – довільна власна нормальна підгрупа групи G. За лемою 2.2 існує гіперцентральна нормальна в G підгрупа K, така що N/K – черніковська. Відомо, що $(G/K)/C_{G/K}(N/K)$ вкладається в групу $\mathrm{Aut}(N/K)$, і що група автоморфізмів черніковської групи є черніковською групою (див. [1]). Доведемо, що $C_{G/K}(N/K) = G/K$. Справді, якщо це не так, то $C_{G/K}(N/K)$ – $ZA\check{C}$-група, а тому G/K – $ZA\check{C}$-група і G – $ZA\check{C}$-група. Ця суперечність свідчить, що

$[N,G] \leqslant K$. N є розширенням гіперцентральної групи за допомогою абелевої.

Унаслідок леми 2.5 група G зображається у вигляді об'єднання зростаючого ланцюга нормальних груп, кожна з яких є розширенням гіперцентральної групи за допомогою абелевої

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots \subset G, \ G = \cup L_n$$

Якщо $G \neq \cup L'_n$, то фактор-група $G/(\cup L'_n)$ абелева всупереч досконалості групи G. Тому $G = \cup L'_n$ і група G є об'єднанням зростаючого ланцюга гіперцентральних нормальних підгруп. Зокрема, група G є локально нільпотентна. Теорема доведена.

Наслідок 2.6. *Нехай кожна власна підгрупа групи G є розширенням нільпотентної групи ступеня $\leqslant r$ за допомогою черніковської групи. Тоді група G також є розширенням нільпотентної групи ступеня $\leqslant r$ за допомогою черніковської групи.*

3. Правильна така теорема

Теорема 3.1. *Недосконала локально ступінчаста група G є ZAČ-групою тоді і тільки тоді, коли кожна її власна підгрупа є ZAČ-групою.*

Доведення. Зрозуміло, що G/G' – ділена абелева група. Якщо G/G' періодична, то доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 2.1.

Нехай група $\overline{G} = G/G'$ – не є періодичною, $\tau(\overline{G})$ – періодична частина групи $\overline{G}$. Тоді $\overline{G}/\tau(\overline{G})$ – ділена абелева група без скруту, а тому в G є така нормальна підгрупа L, що $G/L \cong \mathbf{Q}$. У фактор-групі G/L існує підгрупа, ізоморфна $\mathbf{Z}$. Нехай P – прообраз в G цієї підгрупи. $G/P \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_n^\infty} \times \ldots = \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times (\mathbf{C}_{p_2^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_n^\infty} \times \ldots)$ Отже, в G є нормальна підгрупа H, така що $G/H \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty}$. Група H – ZAČ-група, тому і G – ZAČ-група. Теорема доведена.

4. Лема 4.1. *Нехай N – гіперцентральна (відповідно розв'язна) нормальна підгрупа G, а U – субнормальна гіперцентральна (відповідно розв'язна) підгрупа G. Тоді NU також гіперцентральна (відповідно розв'язна) підгрупа.*

Доведення цієї леми аналогічне до доведення леми 1 [7]. Наведемо його.

Доведення. Нехай $U_0 = UN$ і $U_j = \langle x^{-1}Ux | x \in U_{j-1}\rangle$ для всіх $j \in \mathbf{N}$. Оскільки U субнормальна в G, то вона також субнормальна і в UN. Тому $U_n = U$ для деякого $n \in \mathbf{N}$.

Припустимо, що U_i – гіперцентральна підгрупа. Тоді U_i та $U_{i-1} \cap N$ – гіперцентральні нормальні підгрупи U_{i-1}. Окрім того,

$$U_{i-1} = U_{i-1} \cap UN = (U_{i-1} \cap N)U \leqslant (U_{i-1} \cap N)U_i \leqslant U_{i-1},$$

а тому $U_{i-1} = (U_{i-1} \cap N)U_i$. Звідси випливає, що підгрупа U_{i-1} гіперцентральна. Використовуючи індукцію, отримуємо, що підгрупа NU гіперцентральна. Лема доведена.

Підгрупа групи G, яка має властивість α, називається α-підгрупою.

Лему 4.1 узагальнюють таким чином.

Наслідок 4.2. *Нехай в групі G добуток двох нормальних α-підгруп є α-підгрупою. Якщо N – нормальна α-підгрупа G, а U - субнормальна α-підгрупа G, то NU також α-підгрупа.*

Лема 4.3. *Нехай G – p-група, кожна власна підгрупа якої є ZAČ-група і кожна скінченна підгрупа субнормальна. Припустимо, що T – повна абелева підгрупа G. Якщо X – така підгрупа G, що $[X,T]$ гіперцентральна, то $[X,T] = [X,T,T]$. Зокрема, $N_G(N_G(T)) = N_G(T)$.*

Доведення. Нехай $[X,T] \leqslant C_G(T), M = [X,T]$. Якщо $\exp M = m < \infty$, то $T^m = \langle t^m | t \in T\rangle \leqslant C_G(X)$. Але T ділена, а отже, $T = T^m$ і, як наслідок, $T \leqslant C_G(X)$. Звідси $M = 1$.

Розглянемо загальний випадок. Нехай $H = \langle X,T\rangle$. Приймемо $\overline{H} = H/M^p$. Оскільки $\exp(\overline{M}) \leqslant p$, то, як доведено вище, $\overline{M} = \overline{1}$ і $M = M^p$. За теоремою 2.2 [1, с. 87] M абелева ділена. І оскільки кожна скінченна підгрупа субнормальна в G, то внаслідок теореми 1.16 [1, с. 67] $M \leqslant Z(H)$.

Нехай $x \in X, t \in T, |x| = s$. Тоді $[x,t] \in M \subset Z(H)$, а отже, $[x,t^s] = [x,t]^s = [x^s,t] = 1$. Звідси $[x,T^s] = 1, [x,T] = 1$ і, як наслідок, $M = 1$. Далі, нехай $U = N_G(T), V = N_G(U)$. Доведемо, що $[V,T]$ - гіперцентральна підгрупа. Нехай K - V-інваріантна гіперцентральна підгрупа U така що U/K черніковська і нехай D/K – максимальна ділена абелева підгрупа U/K. Тоді $|U/D| < \infty$ і D нормальна в V. Внаслідок теореми 1.16 [1, с. 67] $D/K \leqslant Z(V/K)$ і $[T/K, V/K] = \bar{1}$. Отже, $[T,V] \leqslant K$. Лема доведена.

Твердження 4.4. *Нехай G - ZAČ – p-група, кожна скінченна підгрупа якої субнормальна. Тоді G - група з субнормальними власними підгрупами.*

Доведення. В групі G є така нормальна гіперцентральна підгрупа T, що фактор-група G/T черніковська. Нехай W/T - максимальна ділена абелева підгрупа групи G/T. Тоді $G = WF$ для деякої скінченної підгрупи F. Нехай K – власна нормальна підгрупа групи G, яка містить F. Тоді KT/T – власна нормальна підгрупа черніковської групи G/T і за теоремою 1.16 [1, с. 67] центр $Z(G/T)$ містить таку ділену підгрупу L/T, що $G = L/TK/T$. Тому можемо вважати, що $[W,F] \leqslant T$. Тоді за лемою 4.1 [8] фактор-група G/T нільпотентна. Візьмемо яку-небудь підгрупу X групи G. Тоді XT/T субнормальна в G. Залишилось довести, що X субнормальна в XT.

Нехай $D/X \cap T$ – максимальна ділена абелева підгрупа групи $X/X \cap T$. Тоді існує така скінченна підгрупа E, що $X = DE$. Як доведено вище, $D/X \cap T \leqslant Z(X/X \cap T)$, а отже, $[D,X] \leqslant X \cap T$. І, як наслідок, $D, X \leqslant N_G(ET)$. Окрім того, за лемою 4.1 підгрупа ET гіперцентральна. Нехай $K = D(ET) = XT$. Оскільки ET нормальна в K, то $U = X \cap ET$ субнормальна в K. Розглянемо $U_1 = \langle g^{-1}Ug | g \in K\rangle$. Оскільки фактор-група DU_1/U_1 повна абелева, то вона міститься в центрі $Z(K/U_1)$. Звідси випливає, що DU_1 нормальна в K. Далі, нехай $U_2 = \langle g^{-1}Ug | g \in U_1\rangle$. Оскільки $D \leqslant N_G(U)$, то $D \leqslant N_G(U_2)$. Тепер, як і вище, DU_2/U_2 повна абелева, а отже, міститься в центрі $Z(DU_1/U_2)$, звідки випливає, що DU_2 нормальна в DU_1. Міркуючи аналогічно, через скінченну кількість кроків ми досягнемо підгрупи $DU = X$. Отже, X субнормальна в K. Твердження доведене.

Твердження 4.5. *Нехай G – p-група з нормалізаторною умовою, кожна власна підгрупа якої є ZAČ-група, і кожна скінченна підгрупа суб-*

нормальна. Припустимо, що X – власна підгрупа G з черніковською фактор-групою X/Y для деякої гіперцентральної підгрупи Y. Якщо Y субнормальна в G, то X також субнормальна в G.

Доведення. Внаслідок твердження 4.4 можемо вважати, що G – $Z A\check{C}$-група. Нехай M – нормальне замикання Y в G, $H = MX$. Оскільки $H \neq G$, то $M \neq G$. Це означає, що H – ZAC-група і за твердженням 4.4 X субнормальна в H. Залишилось довести, що H субнормальна в G.

Нехай C/M - повна частина підгрупи XM/M. Тоді за лемою 4.3 $N_{G/M}(N_{G/M}(C/M)) = N_{G/M}(C/M)$. Оскільки G/M також з нормалізаторною умовою, то $N_{G/M}(C/M) = G/M$. Отже, $C/M \trianglerighteq G/M$. І оскільки XM/CM - скінченна підгрупа G/CM, то вона субнормальна, а отже, XM субнормальна в G. Твердження доведене.

Наведена нижче теорема аналогічна до наслідка 3 [2].

Теорема 4.6. *Нехай G – p-група з нормалізаторною умовою, кожна власна підгрупа якої $Z A\check{C}$-група і кожна скінченна підгрупа субнормальна. Тоді якщо кожна гіперцентральна підгрупа субнормальна в G, то G розв'язна.*

Доведення. Нехай X – яка-небудь власна підгрупа G. Оскільки X є $Z A\check{C}$-група, то за умовою і твердженням 4.5 X субнормальна в G. Тоді за теоремою [8] G розв'язна. Теорема доведена.

Список літератури

1. Черников С.Н. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп* // М.: Наука. 1980. 384с.
2. Asar A.O. *On nonnilpotent p-groups and the normalizer condition* // Jur.Math. 1994. 18.114–129.
3. Bruno B. *On p-groups with "nilpotent-by-finite" proper subgroups* // Bull. Unione Math. Ital. 1989. 3. N1. p.45–51.
4. Hartley B. *Centralizing properties in simple locally finite groups and large finite classical groups* // J.Austral Math.Soc (Ser.A). 1990. 49. p.509–513.
5. Hartley B., G.Shute. *Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type Quart* // J.Math. Oxford. 1984. 35 (ser 2). p.49–71.
6. P.B.Kleidman, R.A.Wilson. *Acharacterization of some locally finite groups of Lie type* // Arch.Math. 1987. 48. p.10–14.

7. Möhres W. *Torsiongruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind* // Geom. dedic. 1989. 31. P.237–248.

8. Möhres W. *Auflösbarkeit von Gruppen deren Untergruppen alle subnormal sind* // Ann. Math. 1990. 54. P.232–235

9. Otal J., Pena J.M. *Infinite locally-finite groups of type $PSL(2, K)$ or $Sz(K)$ are not minimal under certain conditions* // Publ.Math. Barcelona. 1988. 32. p.151–157.

10. Otal J., Pena J.M. *Groups in which every proper subgroups is Cernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Cernicov* // Arch.Math. 1988. 51. P.193–197

11. Robinson D.J.S.*A course in the theory of groups* // Springer. New York. e.a. 1982.

12. Thomas S. *Anidentification theorem for the locally finite non-twisted chevalley groups* // Arch.Math. 1983. 40. p.21–31.

13. Thomas S. *The classification of the simple periodic linear groups* // Arch. Math. 1983. 41. p.103–116.

УДК 517947

Л.С.Баб'як, О.Л.Горбачук

АСИМПТОТИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ, НЕОДНОРІДНА ЧАСТИНА ЯКОГО Є ЦІЛА ФУНКЦІЯ.

Розглядається неоднорідне еволюційне диференціальне рівняння першого порядку у банаховому просторі

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t)+f(t) \quad (1),$$

де A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0, $f(t)$ – ціла функція.

Відомо, що коли A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0, то банаховий простір B розкладається на пряму суму замикання образу і ядра оператора A, тобто $B=\overline{R(A)}+KerA$ (див.[1, теорема 18,6.2]). Проектор на $KerA$ позначимо P. Нагадаємо, що границя функції за Чезаро

$$(C-1)\ \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\xi)d\xi.$$

Встановлюється, що довільний розв'язок диференціального рівняння (1) за деяких умов на функцію $f(t)$ існує і має вигляд $y(t)=u(t)+g(t)$, де $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння, причому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t u(\xi)d\xi=0\ ,\ \text{а}\ g(t)\ \text{– ціла функція.}$$

Аналогічно розв'язується обернена асимтотична задача: для довільної цілої функції $g(t)$, яка є розв'язком еволюційного рівняння, причому $Ag(t)$ – теж ціла функція, існує ціла функція $f(t)$, яка є правою частиною цього еволюційного рівняння.

Нехай B – рефлексивний банаховий простір. У роботі [4] розглядалось диференціальне рівняння (1) ,де $f(t)$ - многочлен цього рівняння у банаховому просторі . Ми розглядаємо це ж еволюційне диференціальне рівняння з правою неоднорідною частиною у вигляді цілої функції.

Теорема 1. Нехай задано рівняння (1), де $f(t)$ - і $Af(t)$ - цілі функції, тобто $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, a_k - елементи з банахового простору B, $a_k \in D(A^{\infty})$, причому так, що $\forall n$ $\forall i$ $\exists c$: $\forall \alpha$ $\|A^n a_i\| < C\alpha^n$, тоді довільний розв'язок цього рівняння подається у вигляді $y(t)=u(t)+g(t)$,де $g(t)$ - ціла функція , яка визначається однозначно функцією $f(t)$, $u(t)$ - розв'язок однорідного рівняння і $(C-1)\lim_{t\to\infty} u(t)=0$.

Доведення. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді ряду $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$. Підставивши його у рівняння (1), отримаємо зв'язок відомих коефіцієнтів a_k і шуканих b_k :

$$\begin{gathered} b_1=Ab_0+a_0; \\ 2b_2=Ab_1+a_1; \\ 3b_3=Ab_2+a_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ nb_n=Ab_{n-1}+a_{n-1}; \\ (n+1)b_{n+1}=Ab_n+a_n; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{gathered} \qquad (2$$

b_0 вибираємо так , що $b_0=-(C-1)\lim_{t\to\infty} u(t)$.

Елементи b_k ($k=1,2,\dots$) шукаємо за рекурентним співвідношенням $b_k=\frac{1}{k}(Ab_{k-1}+a_{k-1})$.

Запишемо елементи b_k через елементи a_k :

$$b_1=Ab_0+a_0;$$

$$b_2=\frac{1}{2}(Ab_1+a_1)=\frac{1}{2}A^2b_0+\frac{1}{2}Aa_0+\frac{1}{2}a_1;$$

$$b_3 = \frac{1}{3}(Ab_2 + a_2) = \frac{1}{3}A^3 b_0 + \frac{1}{3}A^2 a_0 + \frac{1}{6}Aa_1 + \frac{1}{3}a_2;$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$b_n = \frac{1}{n!}A^n b_0 + \frac{1}{n!}A^{n-1}a_0 + \frac{1}{n!}A^{n-2}a_1 + \frac{1}{n(n-1)\dots 3}A^{n-3}a_2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n(n-1)(n-2)}A^2 a_{n-3} + \frac{1}{n(n-1)}Aa_{n-2} + \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n!}A^n b_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i!}{n!}A^{n-i}a_{i-1} + \frac{1}{n}a_{n-1}.$$

Із співвідношеннь (2) видно , що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ буде збіжним за мови $\forall n,\ \forall i\ \exists C:\ \forall\alpha\ \|A^n a_i\| < C\alpha^n$ і є цілою функцією.

Зважаючи на те, що коефіцієнти b_k задовільняють умову (2), ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ буде розв'язком рівняння (1). Єдиність розв'язку випливає з того, що коефіцієнти $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ визначаються однозначно із співвідношень (2), а b_0 – із умови, що границя Чезаро розв'язку однорідного рівняння дорівнює нулю.

Тепер поставимо обернену асимптотичну задачу: знайти цілу функцію $f(t)$ таку, що дана ціла функція $g(t)$ буде розв'язком рівняння $\frac{dy(t)}{d(t)} = Ay(t) + f(t)$.

Теорема 2. Для довільної цілої функції $g(t)$, причому $Ag(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Ab_k t^k$ – теж ціла функція $f(t)$, що довільний розв'язок рівняння (1) представляється у вигляді $u(t) = v(t) + g(t)$, де $v(t)$ – роз'язок однорідного рівняння і $(C-1)\ \lim_{t\to\infty} v(t) = 0$, причому $P(b_0 - y_0) = 0$.

Доведення. Підставляючи відому цілу функцію $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ у рівняння (1), отримаємо рівності, які пов'язують відомі кофіцієнти b_k і шукані a_k:

$$a_0 = b_1 - Ab_0;$$

$$a_1 = 2b_2 - Ab_1;$$
$$a_2 = 3b_3 - Ab_2;$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$a_n = (n+1)b_{n+1} - Ab_n;$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

Усі коефіцієнти a_k **визначаються** однозначно. **Покажемо**, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ **буде збіжним.** Оскільки $Ag(t)$ – ціла функція, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} Ab_k t^k$ **збігається за умовою. Ряд** $\sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k$ – ціла функція, тому $\exists C$ $\forall \alpha>0$: $\|b_k\|<C\alpha^k$. **Неважко показати**, що $\forall n$ $\exists M$ $\forall \beta>0$ $\|na_n\| \le M\beta^n$. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ є **алгебраїчною** сумою названих рядів, тому він буде **збіжним.**

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0, \ u(0) = y_0.$$

Для досягнення **цієї умови** потрібно, щоб $P(b_0 - y_0) = 0$ **(див.[3]).**

Список літератури.

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы., М., 1962, 830 с.

2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве., М., 1967, 464 с.

3. Горбачук О.Л. Розв'язок деякої оберненої задачі для еволюційного рівняння у банаховому просторі // Укр. матем. журнал, 1990, т.42, №9, с.1262-1265.

4. Баб'як Л.С., Горбачук О.Л. Пряма і обернена задача для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі // Тематичний збірник наукових праць "Алгебра і топологія", К.,1993.

УДК 515. I2.

Б.М.Бокало

НЕПЕРЕРВНІ ОБРАЗИ ЗЛІЧЕННО КОМПАКТНИХ РОЗРІДЖЕНИХ ПРОСТОРІВ

У монографії М.М.Чобана і Н.К.Додона [3] сформульована проблема: чи кожний компакт є неперервним образом деякого розрідженого злічено компактного простору? Там же є і часткова відповідь на це запитання, а саме: Раджагопалан [5] встановив, що існує злічено компактний розріджений простір, який неперервно відображається на відрізок [0,I]. Оскільки кожний метризований компакт є досконалим образом підмножини [0,I], то отримаємо, що кожний метризований компакт є неперервним образом деякого розрідженого злічено компактного простору.

У цій роботі ми показуємо, що існує злічено компактний гаусдорфовий розріджений простір, який неперервно і біективно відображається на Стоун-Чехівську компактифікацію $\beta\mathbb{N}$ натуральних чисел. А звідси випливає, що кожний сепарабельний компакт є неперервним образом деякого розрідженого злічено компактного гаусдорфового простору. Термінологія і позначення переважно такі, як в [1], [4]. Оператор замикання позначається квадратними дужками [*]. Бажаючи підкреслити, що замикання береться в просторі (X,τ)

ми пишемо $[*]_{(X,\tau)}$ замість $[*]$. Через $\mathbb{N}$ позначаємо множину натуральних чисел.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема I. *Існує гаусдорфовий розріджений зліченно компактний простір, який неперервно і біективно відображається на Стоун-Чехівську компактифікацію натуральних чисел $\beta\mathbb{N}$.*

Доведення. Зафіксуємо на множині $\beta\mathbb{N}$ довільне мінімальне цілком впорядкування $<$. Через τ позначимо звичайну топологію Стоун-Чехівської компактифікації $\beta\mathbb{N}$ натуральних чисел $\mathbb{N}$. Введемо на множині $\beta\mathbb{N}$ нову топологію τ^*, передбазою якої є сім'я множин $\tau\cup\{\{y\in\beta\mathbb{N} : y\leq x\},\ x\in\beta\mathbb{N}\}$. Простір $(\beta\mathbb{N}, \tau^*)$ є гаусдорфовий, правий, а отже (див [I],[2]), розріджений. Залишилось показати, що $(\beta\mathbb{N}, \tau^*)$ є зліченно компактний. Нехай $A\subset\beta\mathbb{N}$ – довільна нескінченна зліченна множина. Оскільки $|\beta\mathbb{N}|=2^c$ і порядок $<$ мінімальний, то існує така точка x_0, що $A\subset\{y\in\beta\mathbb{N} : y < x_0\}$. Оскільки $|[A]_{(\beta\mathbb{N},\tau)}|=2^c$ і порядок $<$ мінімальний, то існує $x^*\in\beta\mathbb{N}$, що $x_0 < x^*$ і $x^*\in[A]_{(\beta\mathbb{N},\tau)}$. З побудови топології τ^* зразу випливає, що $x^*\in[A]_{(\beta\mathbb{N},\tau^*)}$.

Наслідок I. *Кожний сепарабельний компакт є неперервним образом деякого зліченно компактного розрідженого простору.*

Доведення. Нехай X – сепарабельний компакт, а $Y\subset X$ – зліченний всюди щільний у X підпростір. Зафіксуємо деяке відображення $f\colon \mathbb{N}\to Y$ дискретного простору натуральних чисел на простір Y. Очевидно, f – неперервне. Тоді існує неперервне відображення $\hat{f}$ простору $\beta\mathbb{N}$ на простір X таке, що $\tilde{f}(n)=f(n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\tilde{f}$ неперервно відображає зліченно компактний розріджений простір $(\beta\mathbb{N}, \tau^*)$ на X (де $(\beta\mathbb{N}, \tau^*)$ – простір, який побудований в доведенні теореми 1.).

<u>Зауваження.</u> Відомо, що кожний регулярний розріджений зліченно компактний простір є секвенціально компактним. Так як неперервний образ секвенціально компактного простору є секвенціально компактний, то не кожний компакт є неперервним образом регулярного зліченно компактного розрідженого простору. Зокрема, це стосується Стоун-Чехівської компактифікації $\beta\mathbb{N}$ натуральних чисел $\mathbb{N}$.

З теореми 1 і попереднього зауваження випливає

<u>Наслідок 2.</u> *Існують гаусдорфові розріджені простори без нетривіальних збіжних послідовностей.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Архангельський А.В. *Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты* // УМН. 1978. Т. 33. N 6. С. 29-34.
2. Архангельский А.В. *Об α-растянутых пространствах* // ДАН. 1978. 239: 3.
3. Чобан М.М., Додон Н.К. *Теория $\mathcal{P}$-разреженных пространств.* Кишинев, 1979.
4. Энгелькинг Р. *Общая топология.* М. 1986.
5. Rajagopalan M. *A chain compact space wich is not strongly scattared* // Israel I. Math. 1976. 117-125.

УДК 510.52

О.В.Вербіцький

ПРО ЙМОВІРНІСНУ ІЄРАРХІЮ МІЖ КЛАСАМИ P І NP

Ми розглядаемо модель обчислень, запропоновану в [1]. Нехай M — це машина Тюрінга із п'ятьма стрічками. Три з них є стандартними: вхідна, робоча і вихідна. На початку своєї роботи машина M зчитує із вхідної стрічки двійкове слово w, довжина якого позначається n. Після виконання на робочій стрічці стандартних операцій згідно з програмою, M записує на вихідній стрічці результат, що є символом 0 або 1. На четвертій стрічці записане "випадкове" слово r довжини $O(\log n)$. Вважається, що кожен біт цього слова є 1 або 0 з однаковою ймовірністю. На п'ятій стрічці записане слово u, що інтерпретується як доведення належності слова w до деякої множини. В ході роботи машині M дозволяється прочитати слово r повністю, а також щонайбільше k символів слова u, вибір яких машиною M може залежати від слова r. k є деякою натуральною константою. Час роботи M на вході w не повинен перевищувати $n^{O(1)}$.

Результат роботи машини M на вході w, випадковому слові r і доведенні u записуємо як $M(w, r, u)$.

Говоримо, що машина M розпізнає мову $L \subseteq \{0,1\}^*$ з ймовірністю помилки ϵ, $\epsilon \in (0,1)$, за умов:

(1) Якщо $w \in L$, то існує u таке, що $\mathbf{P}[M(w,r,u)=1] = 1$, де ймовірність береться за розподілом r.

(2) Якщо $w \notin L$, то для будь-якого u $\quad \mathbf{P}[M(w,r,u)=1] < \epsilon$.

Через $PCP_\epsilon(O(\log n), k)$ позначаємо клас мов, які розпізнаються за допомогою описаної моделі.

Робота виконана за підтримки Міжнародного Наукового Фонду, грант MQT 300.

Нагадаємо, що клас $P[NP]$ об'єднує всі мови, які розпізнаються [недетермінованими] машинами Тюрінга за час, обмежений поліномом від довжини входу. Як легко бачити, для будь-якого ϵ і k маємо $P \subseteq PCP_\epsilon(O(\log n), k) \subseteq NP$.

У [2] доведено, що $NP = PCP_{\epsilon_1}(O(\log n), K)$ для деяких $\epsilon_1 \in (0,1)$ і $K \in \mathbb{N}$. У цій роботі ми вказуємо, що аналогічний факт має місце і для класу P.

Теорема. *Для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і $\epsilon \leq 2^{-k}$,*

$$PCP_\epsilon(O(\log n), k) = P.$$

Доведення. Припустимо $L \in PCP_\epsilon(O(\log n), k)$, де $\epsilon \leq 2^{-k}$, тобто L розпізнає деяка машина M у розумінні пунктів (1) і (2). Необхідно описати поліноміальний алгоритм A, який за словом w визначав би, належить воно L, чи ні.

Булеву функцію $f_{w,r}(x_1, \ldots, x_l)$ задамо так. Вважаємо, що значення l достатньо велике, і змінні $x_1, \ldots, x_l$ позначають біти слова u. Означимо $f_{w,r}(x_1, \ldots, x_l) = M(w, r, x_1, \ldots, x_l)$. Оскільки r має довжину $O(\log n)$, всього маємо $N = n^{O(1)}$ функцій. Зауважимо, що $f_{w,r}$ залежить щонайбільше від k змінних, решта змінних фіктивні. Позначимо через $C_{w,r}$ диз'юнктивну нормальну форму функції $f_{w,r}$. Вона складається із не більш як 2^k кон'юнкцій $C_{w,r,j}$. Множину кон'юнкцій $C_{w,r,j}$ для всіх можливих r і $j \leq 2^k$ позначимо через $\mathcal{C}_w$. Перший крок роботи алгоритму A на вході w — це конструювання $\mathcal{C}_w$.

Елементи множини $\mathcal{C}_w$ перенумеруємо довільно: $\mathcal{C}_w = \{C_1, \ldots, C_m\}$, $m = n^{O(1)}$. Кожне C_i є кон'юнкцією щонайбільше k змінних $x_1, \ldots, x_l$ або їх заперечень. Далі слово u утотожнюється з набором значень істинності змінних $x_1, \ldots, x_l$. Зрозуміло, що будь-який набір u задовольняє не більше N кон'юнкцій із $\mathcal{C}_w$. Якщо $w \in L$, то за умовою (1) знайдеться u, що задовольняє саме N кон'юнкцій. Якщо $w \notin L$, то за умовою (2) будь-який набір значень істинності задовольняє менш як ϵN функцій $f_{w,r}$, а отже, менш як ϵN кон'юнкцій із $\mathcal{C}_w$.

Тепер вважаємо, що набір значень істинності u вибирається випадково. Позначимо через $e(\mathcal{C}_w)$ математичне сподівання кількості кон'юнкцій із $\mathcal{C}_w$, що задовольняються цим набором. Зважаючи на лінійність математичного сподівання, маємо:

$$e(\mathcal{C}_w) = \mathbf{E}[\#\{i : C_i(w) = 1\}] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{m} C_i(w)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}[C_i(w)] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}[C_i = 1].$$

Остання рівність має два наслідки. По-перше, вона показує, що $e(\mathcal{C}_w) \geq 2^{-k}m$. По-друге, оскільки кожна кон'юнкція C_i залежить від не більш як k змінних, ймовірність $\mathbf{P}[C_i(w) = 1]$ легко обчислюється. Отже, значення $e(\mathcal{C}_w)$ може бути обчислене за поліноміальний час. Другий крок алгоритму A полягає якраз в обчисленні величини $e(\mathcal{C}_w)$.

Згідно з вище викладеними міркуваннями, якщо $w \in L$, то $e(\mathcal{C}_w) \geq 2^{-k}m > 2^{-k}N$; якщо ж $w \notin L$, то $e(\mathcal{C}_w) < \epsilon N \leq 2^{-k}N$. Отже, завершальний крок алгоритму A такий: якщо $e(\mathcal{C}_w) > 2^{-k}N$, то робиться висновок, що $w \in L$, інакше — що $w \notin L$. Теорему доведено.

Отже, маємо таку картину:

$$P = PCP_{\epsilon_0}(O(\log n), K) \subsetneq$$
$$\cdots \subsetneq PCP_{\epsilon}(O(\log n), K) \subsetneq \ldots$$
$$\subsetneq PCP_{\epsilon_1}(O(\log n), K) = NP$$

для $\epsilon_0 \in (0, 2^{-K}]$ і $\epsilon \in (\epsilon_0, \epsilon_1)$. За припущення $P \neq NP$, залишається відкритим питання про кількість різних класів $PCP_\epsilon(O(\log n), K)$, $\epsilon \in (0,1)$, а також про співвідношення цієї ієрархії із іншими ієрархіями всередині класу NP, наприклад, із ієрархією обмеженого детермінізму.

Список літератури

1. S. Arora, S. Safra, *Probabilistic checking of proofs; a new characterization of NP*, Proc. 33rd IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1992, pp. 2–13.
2. S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan M. Szegedy, *Proof verification and hardness of approximation problems*, Proc. 33rd IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1992, pp. 14–23.

УДК 512.553

Р.В.ВОВК

ПРО НЕКОМУТАТИВНІ H-ЛОКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ

Теорію комутативних h-локальних кілець розвинув Метліс у роботах [1], [2]. Пізніше з'ясувалось, що клас h-локальних кілець є важливим у теорії кілець елементарних дільників, у теорії кілець, над якими всі скінченно-породжені модулі є прямими сумами циклічних модулів (проблема Капланського), а також для розв'язання задачі про локальну визначеність кручень над комутативними кільцями [3].

Усі кільця вважають асоціативними з ненульовою одиницею. Як звичайно, розглядають праві унітарні модулі.

Означення. *Два праві максимальні ідеали кільця R називаються пов'язаними, якщо вони є правими ануляторами ненульових елементів одного і того ж ненульового простого правого модуля.*

Насправді M_1 і M_2 пов'язані тоді і тільки тоді, коли існують такі елементи $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, що $(M_1 : \lambda_1) = (M_2 : \lambda_2)$. Множина усіх максимальних правих ідеалів, пов'язаних з максимальним правим ідеалом M позначається через $< M >$. Зрозуміло, що $Ann(A/M) = \bigcap\limits_{M_1 \in <M>} M_1$. Має місце така лема.

Лема 1. $\bigcap\limits_{M_1 \in <M>} M_1$ *є первинним ідеалом, максимальним серед двосторонніх ідеалів, що містяться в M.*

Означення. *Двосторонній ідеал I кільця R називається колокальним справа (подібно до комутативного випадку [2]), якщо будь-які два праві максимальні ідеали кільця R, що містять ідеал I є пов'язаними.*

Якщо у кільці всі максимальні праві ідеали пов'язані (або, що те саме, коли усі прості праві модулі ізоморфні між собою, тобто є тільки один тип простого модуля), то його називають *локальним справа.* Аналогічно вводять поняття локального зліва кільця.

Проте, якщо кільце локальне справа і зліва, то це ще не означає, що воно локальне у загальноприйнятому розумінні. (Наприклад, кільце Козенса-Койфмана є простим локальним зліва і справа [4]). Зрозуміло, що кільце є локальним справа тоді і тільки тоді, коли нульовий ідеал є колокальним справа.

Якщо правий ідеал K міститься хоча б в одному максимальному правому ідеалі M_1 з $< M >$, то ми кажемо, що K належить типові $< M >$.

Введемо таке означення h-локального справа кільця.

Означення. *Кільце R називається h-локальним справа, якщо*

1) кожний ненульовий правий ідеал I кільця R належить лише скінченому числу типів максимальних правих ідеалів;

2) кожний ненульовий первинний ідеал належить лише одному типу максимальних правих ідеалів, тобто є колокальним справа.

Аналогічно вводять поняття h-локального зліва кільця.

Очевидно, кожне комутативне h-локальне кільце є h-локальним справа і h-локальним зліва. Кільце, яке є h-локальним зліва і справа будемо називати *h-локальним.* Кожна область головних ідеалів є h-локальною областю.

Означення. *Двосторонній ідеал I кільця R називається півколокальним справа, якщо він дорівнює скінченому перетину колокальних справа ідеалів кільця R.*

Двосторонній ідеал I кільця R називається майже колокальним справа, якщо він належить лише скінченому числу типів максимальних правих ідеалів.

У h-локальному справа кільці усі двосторонні ідеали є майже колокальними справа.

Наведемо деякі властивості колокальних ідеалів:

1. Якщо $I_1, I_2, ..., I_n$ - колокальні ідеали, які належать одному і тому ж типові, то $I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$ є колокальним ідеалом, який теж належить цьому типу.

2. Якщо I, J - колокальні ідеали, які належать різним типам, то вони взаємно-прості, тобто $I + J = R$.

3. Нехай $I = \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i$, де I_i - колокальний ідеал, який належить типові $< M_i >$ і $< M_i > \neq < M_j >$ при $i \neq j$. Тоді $I = I_1 I_2 ... I_n$.

Такий розклад будемо називати нормальним. Зрозуміло, що кожний скінчений розклад можна нормалізувати.

Лема 2. *Нехай I - колокальний справа ідеал кільця R, J - довільний двосторонній ідеал з R, який містить I. Тоді J - теж колокальний справа і належить цьому ж типу максимальних правих ідеалів що й I.*

Доведення. Нехай M_1, M_2 - максимальні праві ідеали кільця R, які містять J. Тоді $I \subset M_1, I \subset M_2$. Оскільки I - колокальний справа, тому M_1 пов'язаний з M_2. Отже J - колокальний справа.

Лема 3. *Нехай I, J - колокальні справа ідеали кільця R, які належать одному типові $< M >$. Тоді IJ і $I \cap J$ теж колокальні справа ідеали, які належать цьому ж типові $< M >$.*

Доведення. Нехай ідеал IJ належить деякому правому максимальному ідеалу N. Тоді IJ належить до всіх максимальних правих ідеалів N_α, пов'язаних з N, а тому і до їх перетину $\bigcap\limits_{N_\alpha \in <N>} N_\alpha$, який є первинним ідеалом. Тому хоча б один з ідеалів I або J повинен міститися у перетині $\bigcap\limits_{N_\alpha \in <N>} N_\alpha$, і отже, належати типові $< N >$. Оскільки I і J колокальні справа і належать типові $< M >$, то $< N > = < M >$. Отже, IJ - колокальний справа. Зважаючи на те, що $IJ \subset I \cap J$, тому за лемою 2 ідеал $I \cap J$ - колокальний справа і належить типові $< M >$.

Лема 4. *Нехай I - колокальний справа ідеал кільця R, a - довільний елемент з R, тоді $(I : a)$ - колокальний справа ідеал.*

Доведення. Оскільки $(I : a)$ - двосторонній ідеал і $I \subset (I : a)$ отримуємо за лемою 2, що $(I : a)$ теж колокальний справа.

Лема 5. *Нехай I – колокальний справа ідеал кільця R. Якщо J – довільний двосторонній ідеал, який міститься в I, і для кожного елемента $a \in I$ ідеал $(J : a)$ – колокальний справа, то J – теж колокальний справа ідеал.*

Доведення. Нехай M_1, M_2 – довільні праві максимальні ідеали кільця R, які містять ідеал J. Для кожного елемента $a \in I$ мають місце включення $(J : a) \subset (M_1 : a)$ і $(J : a) \subset (M_2 : a)$. Оскільки $(J : a)$ – колокальний справа, то $(M_1 : a)$ пов'язаний з $(M_2 : a)$. Праві ідеали M_1 і $(M_1 : a)$ є пов'язаними, бо $(M_1 : a) = ((M_1 : a) : 1)$. Аналогічно M_2 пов'язаний з $(M_2 : a)$. Тому за транзитивністю маємо, що M_1 пов'язаний з M_2. А це і означає, що J – колокальний справа ідеал.

Зважаючи на попередні леми, отримуємо теорему.

Теорема . *Колокальні ідеали кільця R, які належать одному типу $< M >$ утворюють базу радикального фільтра.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Matlis E. Cotorsion modules // Mem. Amer. Math. Soc. No 49, 1964.
2. Matlis E. Decomposable modules // Trans. Amer. Math. Soc. 125, 1966, 147-179.
3. Тушницький І.Я. Кільця з локально визначеними крученнями // Алгебра і топологія. К., 1993. С. 88-109.
4. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории: в 2 т. М., 1977.
5. Stenström B. Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory, Berlin, 1975.

УДК.512.552.12 А.І. Гаталевич

Про дуо-кільця елементарних дільників

У цій статті досліджуються деякі класи кілець елементарних дільників. Доведено, що комутативне кільце стабільного рангу 1 буде кільцем елементарних дільників і, що права дуо-область стабільного рангу 1 буде областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона дуо-область.

Вводиться поняття адекватного справа елемента. Доведено, що простий ідеал правої дуо-області Безу, який містить хоча б один адекватний справа елемент, належить одному і тільки одному максимальному ідеалу. Також доведено, що в правому дуо-кільці Безу кожний скінченно-зображений модуль, який є прямою сумою циклічних модулів, має канонічну форму. Цей результат є узагальненням вже відомого, який наведений у роботі [4].

Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце з одиницею. Правим дуо-кільцем називається кільце, в якому довільний правий ідеал є двостороннім. Скажемо, що матриця A з елементами кільця R володіє діагональною редукцією, якщо існують такі зворотні матриці P і Q відповідних розмірів з елементами кільця R, що виконується

$$PAQ=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & & 0\\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_r\end{pmatrix},\ \text{де}\ \varepsilon_i R\cap R\varepsilon_i\supseteq R\varepsilon_{i+1}R\ ,i=1,2,\dots,r-1$$

Якщо над кільцем R довільна матриця володіє діагональною редукцією, тоді кільце R називають кільцем елементарних дільників.

Через $U(R)$ будемо позначати групу одиниць кільця R.

Кільце R називається кільцем стабільного рангу I, якщо для довільних $a,b,c \in R$, таких, що $aR+bR+cR=R$ існують $s,t \in R$, що виконується $a+bs+ct \in U(R)$.

Твердження I.

Нехай R-комутативне кільце стабільного рангу I. Тоді R-кільце елементарних дільників.

Доведення.

На основі результатів [3], достатньо обмежитись матрицями виду

$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR+bR+cR=R$.

Оскільки R - кільце стабільного рангу I, то існують $s,t \in R$ такі, що $as+b+ct \in U(R)$.

Розглянемо оборотні матриці

$$\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} as+b+ct & c \\ * & * \end{pmatrix}=B$$

Легко переконатись, що матриця B, а отже і матриця A володіє діагональною редукцією. Тому R - кільце елементарних дільників.

Твердження 2.

Права дуо-область R стабільного рангу I буде областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли R-дуо-область стабільного рангу I.

Необхідність відразу випливає з [2].

Достатність.

Використовуючи результати [3], достатньо обмежитись матрицями виду $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR+bR+cR=R$.

Нехай існують такі $s,t \in R$, що $as+b+ct \in U(R)$.

Оскільки R- дуо-область, то існує $s' \in R$ таке, що $as=s'a$.

Матриці $\begin{pmatrix} s' & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ t & I \end{pmatrix}$ оборотні.

Розглянемо $\begin{pmatrix} s' & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s'a+b+ct & c \\ * & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} as+b+ct & c \\ * & * \end{pmatrix}=B$

Оскільки $as+b+ct=u \in U(R)$, то матриця B, отже і матриця A володіють діагональною редукцією, а R- кільце елементарних дільників.

Нехай R- праве(ліве) дуо-кільце.

Теорема I.

Усі діагональні матриці над кільцем R допускають діагональну редукцію тоді і тільки тоді, коли R- кільце Безу.

Доведення дамо для лівих дуо-кілець.

Необхідність.

Якщо $a,b \in R$ і матриця $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$, де $dR \cap Rd \supseteq ReR$. Оскільки R ліве дуо-кільце, то $dR \supseteq Rd$ і $eR \supseteq ReR$, також і $dR \supset eR$. Отримуємо $aR+bR=dR+eR=dR$. Отже, R- кільце Безу.

Достатність.

Нехай $A=(m \times n)$-матриця.

Доведення достатності будемо проводити індукцією за m.

Для m=I твердження правильно.

Якщо $m>I$, запишемо $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, де $A_1-(m-I)\times(n-I)$ діагональна матриця. За припущенням індукції A_1-допускає діагональну редукцію.

$$A_1 \sim \begin{pmatrix} c_1 & 0 \ldots 0 \\ & \ddots \\ 0 & c_r \ldots 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $d=am+c_1n$, $a=da'$, $c_1=dc_1'$.

а) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & am+c_1n \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$,

оскільки $\begin{pmatrix} I & n' \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & m \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & am+c_1n \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$,

$c_1n=n'c_1$, оскільки R- ліве дуо-кільце;

б) $\begin{pmatrix} a & d \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d & a \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$, оскільки $\begin{pmatrix} a & d \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & a \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} d & a \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -a'c_1 \end{pmatrix}$;

оскільки $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -c_1' & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & a \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -a'c_1 \end{pmatrix}$,

$c_1 = dc_1' = c_1''d$, оскільки R-ліве дуо-кільце.

d ділить c_1 зліва. Отже d мусить ділити всі діагональні елементи (зліва).

$$A \sim \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -a'c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & c & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

Знову застосовуючи індукцію до матриці, отриманої викресленням першого рядка і першої колонки, отримуємо потрібний результат.

Означення I.

Циклічний R-модуль форми R/rR, $r \in R$ називається циклічно-зображеним R-модулем.

Означення 2.

Модуль M над R має канонічну форму, якщо $M \cong R/A_1 \oplus \ldots \oplus R/A_n$, де $A_1, \ldots, A_n$ – ідеали в R, і $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \neq R$.

Відомо, що скінченно-зображений циклічний модуль над кільцем Безу є циклічно-зображений.[4].

Сформулюємо і доведемо тепер важливий наслідок з теореми I.

Наслідок.

Якщо R-праве(ліве) кільце Безу, то кожний скінченно-зображений модуль над R, який є прямою сумою циклічних модулів має канонічну форму.

Оскільки скінчено-зображений циклічний модуль над R є циклічно-зображений, то скінчено-зображений модуль над R, який є прямою сумою циклічних визначається (квадратною) діагональною матрицею A.

За теоремою I. A допускає діагональну редукцію.

$A\sim\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots \\ 0 & d_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$, де кожний d_i ділить d_{i+1} зліва.

Оскільки еквівалентні матриці визначають ізоморфні модулі, то модуль визначений A ізоморфний до $R/d_1R\oplus\dots\oplus R/d_nR$.

Змінюючи порядок доданків, отримуємо потрібний результат.

Назвемо ненульовий елемент a кільця R адекватним справа, якщо для кожного ненульового елемента $b\in R$ знайдуться такі елементи $r,s\in R$, що

I) $a=rs$ 2) $rR+bR=R$ 3) для будь-якого $s'\in R$ з включення $sR\subseteq s'R\neq R$ випливає, що ідеал $s'R+bR$ властивий.

Кільце, в якому кожний ненульовий елемент адекватний справа, називається адекватним справа. Через $A_r(R)$ позначимо множину адекватних справа елементів.

Твердження 3.

Нехай R- права дуо-область Безу. P- простий ідеал, який містить хоча б один адекватний справа елемент. Тоді він міститься в одному і тільки одному максимальному ідеалі кільця.

Доведення.

I) Якщо P- максимальний ідеал, то все очевидно.

2) Нехай існують M_1,M_2- максимальні ідеали, що $P\subset M_1\cap M_2$. Тоді існують $m_1\in M_1, m_2\in M_2$, що $m_1R+m_2R=R$

Нехай $a\in A_r(R)$. Тоді $a=rs$, $rR+m_iR=R$ і для всіх $s'\in R$, таких що

$sR\subseteq s'R$ ідеал $s'R+m_1R$ властивий. Оскільки P- простий ідеал, то $s\in P$. $P\subset M_1$. Нехай $sR+m_2R\subset dR$. З того, що $P\subset M_2$ випливає $sR\subset dR$ і $dR+m_1R\supset m_1R+m_2R=R$. А звідси слідує, що $a\notin A_r(R)$. Отримуємо суперечність.

Прикладом адекватного справа правого дуо-кільця може служити праве дуо ланцюгове справа кільце.

Нехай $a\neq 0$. Для довільного $b\in R$, маємо $aR\subset bR$, або $bR\subset aR$.

1) Якщо $aR\subset bR$, тоді $a=bx$, $x\in R$. Нехай існує $a'\notin U(R)$ такий, що $aR\subset a'R$, але $a'R+bR=R$. Внаслідок локальності R і того, що $a'\notin U(R)$ випливає, що $b\in U(R)$, тобто a- адекватний справа до елемента b.

2) Якщо $bR\subset aR$, тоді $b=ax$ і $a=1a$, $R+bR=R$, $a'R+bR=a'R\neq R$ для довільного $a'\in R$ такого, що $aR\subset a'R\neq R$.

Список літератури

1. Комарницький М.Я., Забавський Б.В. Про адекватні кільця // Прикладні питання математичного аналізу.
Вісн. Львів. унів. 30 1988, С.39-43

2. Забавский Б.В., Комарницкий Н.Я. Дистрибутивные области с элементарными делителями //
Укр. мат. журнал. 1990. Т.42, С.1000-1004. 3. Kaplansky I. Elementary divisors and modules //
Trans. Amer. Math. Sco. 1949-66-P.464-491.

4. Max D.Larsen, W.J.Lewis, Th.S.Shores.
Elementary divisors rings and finitely presented modules //
Trans. Amer. Math. Soo. 1974-187-P.231-248

УДК 512.536

О.В.Гутік

ДОВІЛЬНА ТОПОЛОГІЧНА НАПІВГРУПА ТОПОЛОГІЧНО ІЗОМОРФНО ВКЛАДАЄТЬСЯ В ПРОСТУ ЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗНУ ТОПОЛОГІЧНУ НАПІВГРУПУ

Довільна топологічна напівгрупа топологічно ізоморфно вкладається в просту топологічну напівгрупу [1]. Природно виникає запитання про аналог теореми Гартмана-Мицельського [2] для топологічних напівгруп: чи довільна топологічна напівгрупа вкладається у просту лінійно зв'язну напівгрупу? Ми позитивно відповідаємо на це запитання. Запропонована конструкція пов'язана з використанням алгебраїчної конструкції Брака вкладення довільної напівгрупи у просту напівгрупу з одиницею [1], [3], [4, Т. 2, с. 139-140]. Нехай S – напівгрупа, $a, b \notin S$. Напівгрупа $\mathcal{C}(S)$ породжується множиною $S \cup \{a, b\}$, та задається співвідношеннями $ab = 1$, $as = a$, $sb = b$ для всіх $s \in S$, а також співвідношеннями, що виконуються в S. Одиницею 1 напівгрупи $\mathcal{C}(S)$ є або одиниця напівгрупи S, якщо $1 \in S$, або ж приєднана звичайним чином до $\mathcal{C}(S)$ одиниця, якщо S не містить одиниці. Напівгрупу $\mathcal{C}(S)$, так побудовану, будемо називати напівгрупою Брака на S. Кожен елемент напівгрупи $\mathcal{C}(S)$ єдиним чином зображається у вигляді $b^i t a^j$, де $t \in S^1$. Напівгрупа S алгебраїчно вкладається у $\mathcal{C}(S)$ і $\mathcal{C}(S)$ - проста напівгрупа.

Твердження 1. *Нехай $\{(S_i, \tau_i) | i \in \mathbb{N}\}$ - сім'я топологічних напівгруп, що задовольняє умови:*

1) (S_i, τ_i) - відкрита піднапівгрупа в (S_{i+1}, τ_{i+1});

2) S_i - проста напівгрупа для кожного $i \in \mathbb{N}$.

Якщо $\mathcal{B}(a) = \cup\{\mathcal{B}_n(a) | n \in \mathbb{N}, \mathcal{B}_n(a)$ - база топології τ_n у точці $a \in \cup_{i=1}^{\infty} S_i\}$. Тоді $S = \cup\{S_i | i \in \mathbb{N}\}$ з топологією τ, що породжена *сім'єю $\{B(a)|a \in S\}$ є простою топологічною, а за виконання умови*

3) (S_i, τ_i) – топологічна інверсна напівгрупа для кожного $i \in \mathbf{N}$ топологічною інверсною напівгрупою.

Доведення. Оскільки для довільних $s, t \in S$ існує $i \in \mathbf{N}$ таке, що $s, t, st \in S_i$, то напівгрупова операція визначена на S.

Покажемо, що S – проста напівгрупа. Припустимо, що S не є простою, тоді існує нетривіальний ідеал J в S. Оскільки для кожного $i \in \mathbf{N}$ S_i піднапівгрупа в S_{i+1}, то існує $k \in \mathbf{N}$ таке, що $S_k \cap J = J_k \neq \emptyset$, і $S_k J_k S_k \subset J_k$, а це суперечить простоті S_k.

Покажемо, що (S, τ) - топологічна напівгрупа. Нехай a і b довільні елементи з S. Існує $n \in \mathbf{N}$ таке, що $a, b, ab \in S_n$. Нехай $W(ab)$ - довільний окіл ab в (S, τ). $W(ab) \cap S_n$ – відкритий окіл ab в S_n. (S_n, τ_n) - топологічна напівгрупа, тому існують околи $U(a)$ і $V(b)$ в S_n такі, що $U(a) \cdot V(b) \subseteq W(ab) \cap S_n \subseteq W(ab)$. Оскільки $U(a)$ і $V(b)$ – відкриті околи в S, то (S, τ) – топологічна напівгрупа.

Покажемо, що якщо виконується умова 3), то (S, τ) - топологічна інверсна напівгрупа. Інверсність S випливає з того, що для кожного $n \in \mathbf{N}$ виконується умова : для довільного $a \in S_n$ існує інверсний $a^{-1} \in S_n$ і два довільних ідемпотента в S_n комутують ([4], теорема 1.17). Доведемо, що інверсія неперервна в (S, τ). Нехай $a \in S$. Існує $n \in \mathbf{N}$ таке, що $a \in S_n$. Нехай $U(a)$ – довільний відкритий окіл a в (S, τ). Множина $U(a) \cap S_n$ відкрита в (S_n, τ_n). S_n – топологічна інверсна напівгрупа, отже існує $V(a^{-1})$ - відкритий окіл a^{-1} такий, що $(V(a^{-1}))^{-1} \subseteq U(a) \cap S_n \subseteq U(a)$. Отже (S, τ) – топологічна інверсна напівгрупа.

Зауваження 1. *Якщо сім'я $\{(S_i, \tau_i)|i \in \mathbf{N}\}$ напівгруп задовольняє умовам твердження 1 і будь-які дві точки з S_i можна з'єднати шляхом в S_{i+1}, то S – лінійно зв'язна напівгрупа.*

Нехай (S, τ_0) – довільна топологічна напівгрупа. Якщо S не містить одиниці, то будемо вважати, що до S одиниця приєднана дискретно. $J_{\max}([0;1], \max)$ – напівгрупа з індукованою з $\mathbf{R}$ природною топологією. Нехай $G = S \times J_{\max}$ з топологією декартового добутку τ^0. Очевидно, що якщо (S, τ_0) – топологічна (інверсна) напівгрупа, то (G,τ^0) – топологічна (інверсна) напівгрупа.

Нехай $\mathcal{C}G = \mathcal{C}(G)$ - напівгрупа Брака на G, $\tilde{\tau}$ – топологія прямої суми на $\mathcal{C}G$ ([1], теорема 1). Топологію $\tilde{\tau}$ послабимо до напівгрупової τ^* так. У точках b^isa^j $i,j \in \mathbb{Z}_+, s \in G\setminus\{1\}$ бази топологій $\tilde{\tau}$ і τ^* співпадають. Базу топології τ^* у точках $b^isa^j i,j \in \mathbb{N}$, задамо так. Сім'я $\mathcal{B}^*(b^ia^j) = \{U_\varepsilon(b^ia^j) = b^iUa^j \cup b^{i-1}(S\times]1-\varepsilon,1[)a^{j-1} | U \in \mathcal{B}(1)$, $\mathcal{B}(1)$ – база топології τ_0 у точці $1 \in G, \varepsilon \in]0,1[\}, i,j \in \mathbb{N}$ задовольняє умовам (BP1)-(BP3) [5], а отже, і задає топологію у точках b^ia^j.

Лема 1. *Якщо (S,τ_0) – топологічна (інверсна) напівгрупа, тоді $(\mathcal{C}G,\tau^*)$ – топологічна (інверсна) напівгрупа.*

Доведення. Оскільки топологія прямої суми $\tilde{\tau}$ на $\mathcal{C}G$ напівгрупова ([1], теорема 1), то, очевидно, що неперервність множення в $(\mathcal{C}G,\tau^*)$ достатньо перевірити у трьох випадках

1) $b^ia^j \cdot b^ka^l$;

2) $b^ia^j \cdot b^ksa^l$;

3) $b^isa^j \cdot b^ka^l$,

де $i,j,k,l \in \mathbb{Z}_+, s \in G$.

Розглянемо ці випадки.

$$1)\ b^ia^j \cdot b^ka^l = \begin{cases} b^{i+k-j}a^l, & \text{якщо } j<k; \\ b^ia^l, & \text{якщо } j=k; \\ b^ia^{l+j-k}, & \text{якщо } j>k. \end{cases}$$

Якщо для околів одиниці $1 \in G$ $U(1), V(1), W(1)$ виконується $U(1)\cdot V(1) \subseteq W(1)$, тоді $U_\varepsilon(b^ia^j)\cdot V_\varepsilon(b^ka^l) \subseteq W(b^ia^j \cdot b^ka^l)$.

$$2)\ b^ia^j \cdot b^ksa^l = \begin{cases} b^{i+k-j}sa^l, & \text{якщо } j\le k; \\ b^ia^{l+j-k}, & \text{якщо } j>k. \end{cases}$$

Отже:

а) якщо $j \le k$, тоді $V_\varepsilon(b^ia^j)\cdot b^kU(s)a^l \subseteq b^{i+k-j}U(s)a^l$;

б) якщо $j > k$, тоді $V_\varepsilon(b^ia^j)\cdot b^kU(s)a^l \subseteq V_\varepsilon(b^ia^{j+l-k})$.

$$3)\ b^isa^j \cdot b^ka^l = \begin{cases} b^{i+k-j}a^l, & \text{якщо } j<k; \\ b^isa^{l+j-k}, & \text{якщо } j\ge k. \end{cases}$$

Тому

а) якщо $j<k$, тоді $b^iU(s)a^j \cdot V_\varepsilon(b^ka^l) \subseteq V_\varepsilon(b^{i+k-j}a^l)$;

б) якщо $j>k$, тоді $b^iU(s)a^j \cdot V_\varepsilon(b^ka^l) \subseteq b^iU(s)a^{j+l-k}$.

Нехай (S, τ_0) – топологічна інверсна напівгрупа. Оскільки топологія прямої суми $\tilde{\tau}$ на $\mathcal{C}G$ є напівгруповою інверсною ([1], наслідок 1), то неперервність інверсії в $(\mathcal{C}G, \tau^*)$ достатньо перевірити у точках $b^i a^j i, j \in \mathbb{N}$. Якщо $(V(1))^{-1} \subseteq V(1)$ у (G, τ^0), тоді $(V_\varepsilon(b^i a^j))^{-1} \subseteq V_\varepsilon(b^j a^i)$. Лема доведена.

Нехай $\mathcal{C}^0(\mathcal{C}G) = \mathcal{C}G$. Поклавши $\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G) = \mathcal{C}(\mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{C}G))$, отримаємо сім'ю напівгруп $\{\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G) | n \in \mathbb{N}\}$.

На $\mathcal{C}^1(\mathcal{C}G)$ топологію прямої суми $\tilde{\tau}_1$ ([1], теорема 1) послабимо до напівгрупової τ_1^* так. У точках $b_1^{i_1} t a_1^{j_1}$ $i_1, j_1 \in \mathbb{Z}_+, t \in \mathcal{C}G \setminus \{1\}$ бази топологій $\tilde{\tau}_1$ і τ_1^* співпадають. Топологію $\tilde{\tau}_1$ послабимо лише у точках $b_1^{i_1} 1 a_1^{j_1}$, де 1 – одиниця напівгрупи $\mathcal{C}G$, $i_1, j_1 \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{B}^*(1)$ – база топології τ^* у точці $1 \in \mathcal{C}G$, $S_0(n) = \{b^k s a^l | k \geq n, l \geq n, s \in G\} \setminus \{b^n(s \times \{0\})a^n | s \in S\}$. Сім'я

$$\mathcal{B}^*(b^i a^j) = \{M_1^{i,j}(U, n) = b_1^{i_1} U(1) a_1^{j_1} \cup b_1^{i_1 - 1} S_0(n) a_1^{j_1 - 1} | U(1) \in \mathcal{B}^*(1), n \in \mathbb{N}\}$$

задовольняє умовам (BP1)-(BP2) [5], а отже, задає базу топології τ_1^* у точці $b_1^{i_1} a_1^{j_1}$.

Припустимо, що ми вже задали топологію τ_{n-1}^* на напівгрупі $\mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{C}G)$. Визначимо тепер топологію τ_n^* на $\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G)$. Топологію прямої суми $\tilde{\tau}_n$ ([1], теорема 1) послабимо до напівгрупової τ_n^* так. У точках $b_n^{i_n} t a_n^{j_n} i_n, j_n \in \mathbb{Z}_+, t \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{C}G) \setminus \{1\}$ бази топологій $\tilde{\tau}_n$ і τ_n^* співпадають. Топологію $\tilde{\tau}_n$ послабимо лише у точках $b_n^{i_n} a_n^{j_n}$, $i_n, j_n \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{B}_{n-1}^*(1)$ – база топології τ_{n-1}^* у точці $1 \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{C}G)$,

$$S_{n-1}(m) = \{b_{n-1}^{i_{n-1}} \mathcal{C}^{n-2}(\mathcal{C}G) a_{n-1}^{j_{n-1}} | i_{n-1}, j_{n-1} \geq m\} \setminus$$

$$\setminus \{b_{n-1}^m b_{n-2}^{i_{n-2}} \cdots b_1^{i_1} b^i (s \times \{0\}) a^j a_1^{j_1} \cdots a_{n-2}^{j_{n-2}} a_{n-1}^m | ((i = 0) \vee (j = 0)) \;\&$$

$$\& \; ((i_1 = 0) \vee (j_1 = 0)) \;\&\; \cdots \;\&\; ((i_{n-2} = 0) \vee (j_{n-2} = 0)), s \in S\}.$$

Сім'я

$$\mathcal{B}_n^*(b_n^{i_n} a_n^{j_n}) = \{M_n^{i_n, j_n}(U, m) = b_n^{i_n} U(1) a_n^{j_n} \cup b_n^{i_n - 1} S_{n-1}(m) a_n^{j_n - 1} |$$

$$U(1) \in \mathcal{B}_{n-1}^*(1), m \in \mathbb{N}\}$$

задовольняє умовам (BP1)-(BP2) [5], а отже і задає базу топології τ_n^* у точці $b_n^{i_n} a_n^{j_n}$.

Лема 2. *Якщо (S,τ_0) – топологічна (інверсна) напівгрупа, тоді $\{(C^n(CG),\tau_n^*)|n\in\mathbf{N}\}$ – сім'я простих топологічних (інверсних) напівгруп.*

Доведення. З теореми 8.45 [4] випливає, що $\{C^n(CG)|n\in\mathbf{N}\}$ – сім'я простих напівгруп.

$(C^0(CG),\tau^*)$ – топологічна (інверсна) напівгрупа (лема 1). Покажемо, що з того, що $(C^{\alpha-1}(CG),\tau^*_{\alpha-1})$ – топологічна (інверсна) напівгрупа випливає, що $(C^{\alpha}(CG),\tau^*_{\alpha})$ – топологічна (інверсна) напівгрупа для кожного $\alpha\in\mathbf{N}$.

Нехай $\tilde{s},\tilde{t}\in C^{\alpha}(CG)$. Тоді

$$\tilde{s}=b^i_\alpha s a^j_\alpha,\ s\in C^{\alpha-1}(CG),i,j\in\mathbf{Z}_+,$$

$$\tilde{t}=b^k_\alpha t a^l_\alpha,\ t\in C^{\alpha-1}(CG),k,l\in\mathbf{Z}_+.$$

Очевидно, що неперервність множення достатньо перевірити у таких трьох випадках, оскільки ослаблення напівгрупової топології $\tilde{\tau}_\alpha$ на $C^\alpha(CG)$ відбувається лише у точках $b^i_\alpha a^j_\alpha$ $i,j\in\mathbf{N}$:

1) $b^i_\alpha a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha a^l_\alpha$;

2) $b^i_\alpha a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha s a^l_\alpha$;

3) $b^i_\alpha s a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha a^l_\alpha$,

де $i,j,k,l\in\mathbf{Z}_+$, $s\in C^{\alpha-1}(CG)$.

Довільне $s\in C^{\alpha-1}(CG)$ можна зобразити у вигляді $s=b^p_{\alpha-1}s^0a^q_{\alpha-1}$, $s^0\in C^{\alpha-2}(CG)$.

Розглянемо три вищезгаданих випадки.

1) $b^i_\alpha a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha a^l_\alpha=\begin{cases} b^{i+k-j}_\alpha a^l_\alpha, & \text{якщо } j\le k;\\ b^i_\alpha a^{l+j-k}_\alpha, & \text{якщо } j>k.\end{cases}$

Нехай для одиниці $1\in C^{\alpha-1}(CG)$ виконується $U(1)\cdot U(1)\subseteq W(1)$ причому $U(1)\subseteq W(1)\subseteq C^{\alpha-1}(CG)$. Тоді $M^{i,j}_\alpha(U(1),n)\cdot M^{k,l}_\alpha(U(1),n)\subseteq$ $\subseteq M^{\beta,\gamma}_\alpha(W(1),n)$, де β і γ степені b_α і a_α відповідно, утворені при перемноженні $b^i_\alpha a^j_\alpha$ і $b^k_\alpha a^l_\alpha$.

2) $b^i_\alpha a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha s a^l_\alpha=\begin{cases} b^{i+k-j}_\alpha s a^l_\alpha, & \text{якщо } j\le k;\\ b^i_\alpha a^{l+j-k}_\alpha, & \text{якщо } j>k.\end{cases}$

Тому

а) якщо $j\le k$, тоді $M^{i,j}_\alpha(U(1),n)\cdot b^k_\alpha V(s)a^l_\alpha\subseteq b^{i-j+k}_\alpha W(s)a^l_\alpha$,

де $U(1) \cdot V(s) \subseteq W(s) \subseteq \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathcal{C}G), n \in \mathbf{N}$,
б) якщо $j > k$, тоді $M_\alpha^{i,j}(U(1), m) \cdot b_\alpha^k V(s) a_\alpha^l \subseteq M_\alpha^{i,l+j-k}(U(1), n)$, де $m = n + p$, $V(s) \subseteq \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathcal{C}G)$ – окіл $s \in \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathcal{C}G)$.

3) $b_\alpha^i s a_\alpha^j \cdot b_\alpha^k a_\alpha^l = \begin{cases} b_\alpha^{i+k-j} a_\alpha^l, & \text{якщо } j < k; \\ b_\alpha^i s a_\alpha^{l+j-k}, & \text{якщо } j \geq k. \end{cases}$

Отже

а) якщо $j < k$, тоді $b_\alpha^i U(s) a_\alpha^j \cdot M_\alpha^{k,l}(V(1), m) \subseteq M_\alpha^{i+k-j,l}(V(1), n)$, де $m = n + q$, $U(s) \subseteq \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathcal{C}G)$ – окіл $s \in \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathcal{C}G)$;
б) якщо $j \geq k$, тоді $b_\alpha^i U(s) a_\alpha^j \cdot M_\alpha^{k,l}(V(1), n) \subseteq b_\alpha^i W(s) a_\alpha^{j+l-k}$, де $U(s) \cdot V(1) \subseteq W(s) \subseteq \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathcal{C}G), n \in \mathbf{N}$

У випадку коли (S, τ_0) – топологічна інверсна напівгрупа, щоб показати, що $\{(\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G), \tau_n^*) | n \in \mathbf{N}\}$ – сім'я інверсних топологічних напівгруп, достатньо показати неперервність інверсії у напівгрупі $(\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G), \tau_n^*)$ в точках $b_n^i a_n^j$, оскільки тілки у них відбувається послаблення топології прямої суми ([1], наслідок 1).

$(M_\alpha^{i,j}(U(1), n))_1 \subseteq M_\alpha^{j,i}(U(1), n)$, де $(U(1))_1 \subseteq V(1)$ в $\mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathcal{C}G)$.

Лема доведена.

Теорема. *Довільна топологічна (інверсна) напівгрупа топологічно ізоморфно вкладається в просту лінійно зв'язну топологічну (інверсну) напівгрупу з одиницею.*

Доведемо декілька допоміжних тверджень.

Твердження 2. *Нехай $\tilde{s}$ – довільний елемент $(\mathcal{C}G, \tau^*)$, $\tilde{s} = b^i(\{s\} \times \{t\})a^j, s \in S$, $t \in [0, 1[$. Існує $f \in C([0,1], \mathcal{C}G)$ таке, що $f(1) = b^{i+1}a^{j+1}$ і $f(0) = \tilde{s}$.*

Доведення. Розглянемо два випадки.

1) $t = 0$. Тоді $\tilde{s} = b^i(\{s\} \times \{0\})a^j$.

Відображення f задамо так

$$f(x) = \begin{cases} b^i(\{s\} \times \{x\})a^j, & 0 \leq x < 1; \\ b^{i+1}a^{j+1}, & x = 1. \end{cases}$$

а) Перевіримо неперервність функції f у точці $x = 0$. Нехай $U^*(b^i(\{s\} \times \{0\})a^j)$ -довільний елемент бази топології τ^* у точці

$b^i(\{s\} \times \{0\})a^j \in CG$, тоді $U^*(b^i(\{s\} \times \{0\})a^j) = b^i(U(s) \times [0,\delta[)a^j$, де $U(s)$ – довільний елемент бази топології τ_0 у точці $s \in S, \delta \in]0,1[$. $f^{-1}(b^i(U(s) \times [0,\delta[)a^j) = [0,\delta[$ – відкрита множина в $[0,1]$, а отже, функція f неперервна в точці $x = 0$.

б) Перевіримо неперервність функції f при $x \in]0,1[$. Нехай $U^*(b^i(\{s\} \times \{x\})a^j)$ -довільний елемент бази топології τ^* у точці $b^i(\{s\} \times \{x\})a^j \in CG$, тоді $U^*(b^i(\{s\} \times \{x\})a^j) = b^i(U(s) \times]\varepsilon,\delta[)a^j$, де $U(s)$ – довільний елемент бази топології τ_0 у точці $s \in S$, $0 < \varepsilon < \delta < 1$. $f^{-1}(b^i(U(s) \times]\varepsilon,\delta[)a^j) =]\varepsilon,\delta[$ – множина відкрита в $[0,1]$, а отже, і функція f – неперервна на інтервалі $]0,1[$.

в) Покажемо, що функція f неперервна у точці $x = 1$. Нехай $U_\varepsilon(b^{i+1}a^{j+1})$ – довільний окіл точки $b^{i+1}a^{j+1} \in CG$ у топології τ^*. $f^{-1}(U_\varepsilon(b^{i+1}a^{j+1})) =]1-\varepsilon,1]$ – відкрита множина в $[0,1]$.

Отже, функція f – неперервна на $[0,1]$.

2) $0 < t < 1$.

Покладемо $f = g \circ \phi$ де $\phi : [0,1] \to [t,1]$. $\phi(x) = x + t - xt$, і

$$g(x) = \begin{cases} b^i(\{s\} \times \{x\})a^j, & t \le x < 1; \\ b^{i+1}a^{j+1}, & x = 1. \end{cases}$$

Неперервність функції g доводиться аналогічно, як і в 1. Функція f – неперервна, як композиція неперервних ϕ і g. Твердження доведене.

Твердження 3. *Для довільного $n \in \mathbb{Z}_+$, множина $L_k^n = \{b_n^i C^{n-1}(CG)a_n^j | i - j = k\}$ – лінійно зв'язна підмножина в $(C^n(CG), \tau^*)$ для довільного $k \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Очевидно, що достатньо показати, що для довільного $s = b_n^{i_n} \ldots b_1^{i_1} b^i s^0 a^j a_1^{j_1} \ldots a_n^{j_n} \in C^n(CG)$ існує функція $f_1 \in C([0,1], C^n(CG))$ така, що $f_1(0) = s$, $f_1(1) = b_n^{i_n+1}a_n^{j_n+1}$.

Доведення будемо проводити індукцією за n.

1. $l = 1$. З твердження 2 випливає, що достатньо побудувати функцію f_1, що задовольняє умовам: $f_1(1) = b_1^{i_1}b^i 1 a^j a_1^{j_1}$, $f_1(0) = b_1^{i_1+1}a_1^{j_1+1}$, де 1 – одиниця G, щоб показати, що множина L_p^1 – лінійно зв'язна для довільного $p \in \mathbb{Z}$.

Покажемо це у випадку, коли $i = 0$ або $j = 0$. Нехай $j = 0$, тоді $b_1^{i_1}b^i 1 a^j a_1^{j_1} = b_1^{i_1}b^i 1 a_1^{j_1}.1 = 1_S \times \{y\}$, де y деяке число з $[0,1[$,

1_S – одиниця напівгрупи S. Якщо $x \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, де $k \in \mathbf{N}$, покладемо $f_1(x) = b_1^{i_1} b^{i+k-1}(1_S \times \{t\} a^{k-1} a_1^{j_1}$, де $t = \frac{1}{x} - k$, $f_1(0) = b_1^{i_1+1} a_1^{j_1+1}$. Неперервність функції f_1 при $x \in]0,1]$ випливає з неперервності функції f (твердження 2).

Тоді для довільного елемента бази топології τ_1^* у точці $b_1^{i_1+1} a_1^{j_1+1}$ $M_1^{i_1+1, j_1+1}(U(1), k)$ $f_1^1(M_1^{i_1+1, j_1+1}(U(1), k)) = [0, \frac{1}{k+1}[$ – відкрита множина в $[0,1]$.

2. Припустимо, що для $n = l - 1$ виконується, що для кожного $s = b_{l-1}^{i_{l-1}} s^* a_{l-1}^{j_{l-1}}$ $s^* \in C^{l-2}(CG)$ існує $f_1 \in C([0,1], C^{l-1}(CG))$ така, що $f_1(0) = s, f_1(1) = b_{l-1}^{i_{l-1}+1} a_{l-1}^{j_{l-1}+1}$. Покажемо, що це твердження виконується і якщо $l = n$, тобто для довільного $s \in C^l(CG)$ існує неперервна функція $f : [0,1] \to C^l(CG)$ така, що $f(0) = s$ і $f(1) = b_l^{i_l+1} a_l^{j_l+1}$.

Нехай $s = b_l^{i_l} b_{l-1}^{i_{l-1}} \ldots b_1^{i_1} b^i s^0 a^j a_1^{j_1} \ldots a_{l-1}^{j_{l-1}} a_l^{j_l}$. Оскільки для довільних $i_l, j_l \in \mathbf{Z}_+$ множина типу $b_l^{i_l} C^{l-1}(CG) a_l^{j_l}$ гомеоморфна $C^{l-1}(CG)$, тоді існує неперервна функція

$$f^1_{i_{l-1}, j_{l-1}} : [0,1] \to b_l^{i_l} C^{l-1}(CG) a_l^{j_l}$$

така, що

$$f^1_{i_{l-1}, j_{l-1}}(0) = s \;;$$

$$f^1_{i_{l-1}, j_{l-1}}(1) = b_l^{i_l} b_{l-1}^{i_{l-1}+1} a_{l-1}^{j_{l-1}+1} a_l^{j_l},$$

і для кожного $\alpha \in \mathbf{N} \backslash \{1\}$ існує неперервна функція

$$f^\alpha_{i_{l-1}, j_{l-1}} : [0,1] \to b_l^{i_l} C^{l-1}(CG) a_l^{j_l}$$

така, що

$$f^\alpha_{i_{l-1}, j_{l-1}}(0) = b_l^{i_l} b_{l-1}^{i_{l-1}+\alpha} a_{l-1}^{j_{l-1}+\alpha} a_l^{j_l} \;;$$

$$f^\alpha_{i_{l-1}, j_{l-1}}(1) = b_l^{i_l} b_{l-1}^{i_{l-1}+\alpha+1} a_{l-1}^{j_{l-1}+\alpha+1} a_l^{j_l}.$$

Відображення f задамо так $f(0) = b_l^{i_l+1} a_l^{j_l+1}$, якщо ж $x \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, $k \in \mathbf{N}$ покладемо $f_k(x) = f^k_{i_{l-1}, j_{l-1}}(\frac{1}{x} - k)$.

Оскільки функція $f^{\alpha}_{i_{l-1},j_{l-1}}$ неперервна для кожного $\alpha \in \mathbf{N}$ і $f^{\alpha-1}_{i_{l-1},j_{l-1}}(1) = f^{\alpha}_{i_{l-1},j_{l-1}}(0)$, то функція $f = \nabla_{k\in\mathbf{N}} f_k$ – неперервна на $]0,1]$ ([5], твердження 2.1.11). Функція f також неперервна у точці $x = 0$. Дійсно, для довільного елемента бази топології τ^*_k $M^{i_l+1,j_l+1}_l(U(1),m)$ у точці $b^{i_l+1}_l a^{j_l+1}_l$ множина $f^{-1}(M^{i_l+1,j_l+1}_l(U(1),m)) = [0,\frac{1}{m}[$ – відкрита в $[0,1]$. Твердження доведене.

Доведення теореми. Сім'я $\{(\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G),\tau^*_n)|n \in \mathbf{N}\}$ задовольняє умовам твердження 1. Покладемо $\mathcal{C}^{\omega}(\mathcal{C}G) = \cup\{\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G)|n \in \mathbf{N}\}$. Топологія τ на $\mathcal{C}^{\omega}(\mathcal{C}G)$ породжується сім'єю $\{B^{\omega}(a)|a \in \mathcal{C}^{\omega}(\mathcal{C}G)\}$, де $B^{\omega}(a) = \cup\{\{B^*_n(a)|n \in \mathbf{N}, B^*_n(a)$ – база топології τ^*_n в точці $a \in \cup_{i=1}^{\infty}\mathcal{C}^i(\mathcal{C}G)\}$.

З тверджень 2 і 3 випливає, що сім'я $\{(\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G),\tau^*_n)|n \in \mathbf{N}\}$ задовольняє умовам у зауваженні 1. Отже $(\mathcal{C}^{\omega}(\mathcal{C}G),\tau)$ – лінійно зв'язна топологічна напівгрупа, причому якщо (S,τ_0) – топологічна інверсна, тоді $(\mathcal{C}^{\omega}(\mathcal{C}G),\tau)$ – топологічна інверсна напівгрупа.

Список літератури

1. Гутик О.В. *Вложение топологических полугрупп в простые* // Математичні студії. 1994. 3. С. 10-14.
2. Hartman S. Mycielsky J. *On the imbedding of topological groups into connected topological groups* // Coll. Math. 1958. 5. P. 167-169.
3. Bruck R.H. *A survey of binary systems* // Ergebnisse der Math. Heft 20, Berlin, 1958.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. М., 1972. Т. 1. 288 с. Т. 2. 424 с.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986. 752 с.

УДК 512.552.12

Б.В.ЗАБАВСЬКИЙ

ПРО КОМУТАТИВНІ КІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ ЗІ СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ МІНІМАЛЬНИХ ПРОСТИХ ІДЕАЛІВ

Комутативні кільця елементарних дільників, тобто кільця, над якими можлива діагональна редукція є кільцями скінченно породжених головних ідеалів. Виникає запитання: чи довільне кільце скінченно породжених головних ідеалів є кільцем елементарних дільників? У праці [1] побудовано приклад комутативного кільця скінченно породжених головних ідеалів, яке не є кільцем елементарних дільників. Це дало змогу звузити клас комутативних кілець елементарних дільників до класу комутативних областей Безу. У [2-6] поставлена проблема: чи кожна комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників?

Оскільки гомоморфний образ комутативного кільця елементарних дільників є знову кільцем елементарних дільників, то важливість цієї гіпотези очевидна. Окрім того, очевидно, що пряма сума комутативних областей елементарних дільників є кільцем елементарних дільників і навпаки. Тому дослідження діагональної редукції матриць над комутативною областю Безу можна звести до дослідження аналогічного питання для комутативних кілець скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів.

ТЕОРЕМА 1. Комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного простого ідеалу фактор кільце по ньому є кільцем елементарних дільників.

Для доведення теореми важливе таке твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ 1. Комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів R зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли фактор кільце R по нільрадикалу є кільцем елементарних дільників.

Доведення. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ – всі мінімальні прості ідеали R, а $P(R)$ – нільрадикал R, тобто $P(R) = \cap_{i=1}^{n} P_i$. Припустимо, що $R/P(R)$ є кільцем елементарних дільників. З уваги на [7, теор.2.2., 8, теор.6.] для того, щоб показати, що R є кільцем елементарних дільників, досить показати, що для довільних $a, b, c \in R$ таких, що $aR+bR+cR = R$ існують такі елементи $p, q \in R$, що $(ap+bq)R + cR = R$. Оскільки $R/P(R)$ – кільце елементарних дільників, то внаслідок [8, теор.6.] для елементів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \subset R/P(R)$ існують елементи $\bar{p}, \bar{q}, \bar{u}, \bar{v} \subset R/P(R)$ такі, що $(\bar{a}\bar{p} + \bar{b}\bar{q})\bar{u} + \bar{c}\bar{q}\bar{v} = \bar{1}$, де $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ позначають гомоморфні образи елементів $a, b, c \in R$ при канонічному гомоморфізмі R в $R/P(R)$. Звідси очевидно, що існують елементи $p, q, u, v \in R$, $n \in P(R)$ такі, що $(ap+bq)u + cqv = 1 + n$. Оскільки $1 + n$ – зворотний елемент R, то $(ap + bq)R + cR = R$, що і потрібно довести. Твердження доведено.

Доведення теореми. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ – усі мінімальні прості ідеали R, а $P(R)$ – нільрадикал R. Оскільки кільце скінченно породжених головних ідеалів є кільцем Прюфера, то $P_1, \ldots, P_n$ – попарно комаксимальні ідеали [9, с. 583]. За китайською теоремою $R/P(R)$ – пряма сума кілець $R/P_1, \ldots, R/P_n$ [9, с. 583]. З умов теореми, кільця $R/P_1, \ldots, R/P_n$ – кільця елементарних дільників. Оскільки пряма сума кілець елементарних дільників є кільцем елементарних дільників, то $R/P(R)$ – кільце елементарних дільників. З доведеного твердження R є кільцем елементарних дільників. Теорема доведена.

Легко зауважити, що для доведення теореми досить вимагати, щоб фактор кільця по мінімальних простих ідеалах були кільцями елементарних дільників.

Розглянемо конкретні приклади комутативних кілець елементарних дільників. Відомо, що комутативні області головних ідеалів є кільцями елементарних дільників. О.Хелмер [10] увів до розгляду адекватні області і довів, що вони є кільцями елементарних дільників. І.Капланський [8] довів, що адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі є кільцями елементарних дільників. У праці [7] доведено, що адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі є або кільцями без дільників нуля, або кільцями нормування. У своїй статті ми доведемо, що комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є адекватним тоді і тільки тоді, коли воно є прямою сумою кілець нормування.

Елемент a комутативного кільця скінченно породжених головних ідеалів R назвемо адекватним, якщо для кожного елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що:

1) $a = rs$;
2) $rR + bR = R$;
3) для будь-якого $s' \in s$ включення $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R + bR$ – властивий.

Очевидними прикладами адекватних елементів служать одиниці, атоми кільця, а також елементи, вільні від квадратів.

ТВЕРДЖЕННЯ 2. Множина адекватних елементів комутативного кільця скінченно породжених головних ідеалів R є мультиплікативно замкнутою.

Доведення. Нехай a, b – адекватні елементи R, а c – довільний елемент R. Тоді існують такі елементи $r, m, t, l \in R$, що $a = rm, b = tl$, де $rR + cR = R, lR + cR = R$, причому для будь-яких m', l' з включення $mR \subseteq m'R \neq R, lR \subseteq l'R \neq R$ випливає співвідношення $m'R + cR \neq R, l'R + cR \neq R$. Отже $rtR + cR = R$ і для довільного $n' \in R$ з умови $mlR \subset n'R \neq R$ отримаємо $mlR + n'R \subseteq (mR + n'R)(lR + n'R) \neq R$. Тому $mlR + n'R \neq R$, а $n'R + cR \neq R$, тобто елемент ab – адекватний.

ТВЕРДЖЕННЯ 3. Нехай P - простий ідеал комутативного кільця скінченно породжених головних ідеалів R, який містить хоча б один адекватний елемент. Тоді P міститься в одному і тільки одному максимальному ідеалі.

Доведення. Якщо P – максимальний ідеал, то все доведено. Нехай P – простий ідеал, який містить адекватний елемент a й існують різні максимальні ідеали M_1 і M_2, що $P \subseteq M_1 \cap M_2$. Оскільки $M_1 + M_2 = R$, то існують елементи $m_1 \in M_1$ і $m_2 \in M_2$, такі, що $m_1 + m_2 = 1$. З визначення елемента a, $a = rs$, де $rR + m_1R = R$ і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + m_1R$ – властивий. Оскільки P – простий ідеал і $P \subset M_1$, то $s \in P$. Нехай $dR = sR + m_2R$. Оскільки $P \subset M_2$, то d – необоротний дільник елемента s. Але $dR + m_1R \supset m_2R + m_1R = R$, що суперечить вибору елемента a. Отримана суперечність доводить наше твердження.

Комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів, в якому довільний елемент є адекватним назвемо адекватним. Очевидними прикладами адекватних кілець служать кільця нормування, регулярні кільця [7,тв. 4.6.].

ТЕОРЕМА 2. Нехай R - комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів з єдиним мінімальним простим ідеалом P, який містить хоча б один адекватний елемент, тоді R - кільце нормування.

Доведення. З доведеного випливає, що P міститься в єдиному максимальному ідеалі. Оскільки P – єдиний мінімальний простий ідеал, то це можливо лише в єдиному випадку, коли R - локальне кільце скінченно породжених головних ідеалів, тобто кільце нормування.

Очевидно, що кільце нормування є адекватним з єдиним мінімальним простим ідеалом, тобто існує

ТЕОРЕМА 3. Комутативне кільце R скінченно породжених головних ідеалів з єдиним мінімальним простим ідеалом є адекватним тоді і тільки тоді, коли R - кільце нормування.

Розглянемо випадок, коли R - комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів.

ТЕОРЕМА 4. Нехай R - комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів і нехай довільний простий ідеал R міститься в єдиному максимальному ідеалі, тоді R – пряма сума кілець нормування.

Доведення. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ – усі мінімальні прості ідеали R, а $P(R)$ - нільрадикал R. Тоді, як було вже показано, $R/P(R) = R/P_1 \oplus \cdots \oplus R/P_n$. Звідси існують попарно ортогональні ідемпотенти $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$, де $\bar{e}_i \subset R/P_i$ такі, що $\bar{e}_1 + \cdots + \bar{e}_n = 1$. Тоді, піднявши ці ідемпотенти за модулем $P(R)$ до попарно ортогональних ідемпотентів $e_1, \ldots, e_n \in R$, отримаємо $1-(e_1+\cdots+e_n)$ ідемпотент і $1-(e_1+\cdots+e_n) \in P(R)$, що можливо тільки, коли він є нулем. Звідси $R = e_1 R \oplus \cdots \oplus e_n R$ і кожен $e_i R$ є гомоморфним образом R, тобто комутативним кільцем скінченно породжених головних ідеалів. Оскільки в R довільний простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, тоді $e_i R$ - кільце нормування. Теорема доведена.

Нехай R – комутативне кільце, яке є прямою сумою кілець нормування R_i. Очевидно, що R - комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів. Нехай $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ – елементи кільця R, де $a_i \in R_i$, $b_i \in R_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки R_i – кільце нормування, тоді $a_i = r_i s_i$, де $r_i R + b_i R = R$ і для довільного необоротного дільника s_i' елемента s_i виконується $s_i' R_i + b_i R_i \neq R_i$. Якщо $r = (r_1, \ldots, r_n)$ і $s = (s_1, \ldots, s_n)$, тоді, очевидно, $a = rs$ і $rR + bR \neq R$. Нехай $s' = (s_1', \ldots, s_n')$ – неодиничний дільник s. Для кожного i такого, що s_i' є неодиничним дільником s_i в R_i, ми маємо $s_i' R_i + b_i R_i \neq R_i$. Звідси $s' R + bR \neq R$, тобто R є адекватним.

Зважаючи на ці міркування на основі теореми 4. отримаємо такий результат:

ТЕОРЕМА 5. Комутативне кільце R скінченно породжених головних ідеалів зі скінченим числом мінімальних простих ідеалів є адекватним тоді і тільки тоді, коли R пряма сума кілець нормування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gillman L., Henriksen M. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal// Trans. Amer. Soc. 1956, 82. P.366-394.

2. Кон П. Свободные кольца и их связи. Мир, М., 1976.

3. Henriksen N. Some remarks about elementary divisor rings// Michigan Math. J., 1955/56, 3, P.159-163.

4. Shores T.S. Bezout rings and their modules// Ring Theory Proc. Oked., New York, 1973, P.63-73.

5. Warfield R.B. Decomposability of finitely presented modules// Proc. Amer. Math.Soc. 1970, 25, P.467-472.

6. Kaplansky I. Elementary divisors and modules// Trans. Amer. Math. Soc. 1949, 66,P.464-491.

7. Larsen M., Lewis W., Shores T. Elementary divisor rings and finitely presented modules// Trans. Amer. Math. Soc. 1974. 187. 19. P.231-248.

8. Gillman L., Henriksen M. Some remarks about elementary divisors ring// Trans. Amer. Math. Soc. 1956. vol.82. P.362-365.

9. Бурбаки Н. Комутативная алгебра. Мир, М., 1971.

10. Helmer O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions// Bull. Amer. Soc. 1943. vol.49. P.225-236.

УДК 515.12

М.М. Зарічний

МНОЖЕННЯ В СУПЕРРОЗШИРЕННЯХ І ЧАСТКОВІ ДОБУТКИ

Дослідження різних функторіальних конструкцій у топології методами теорії ретрактів та нескінченновимірних многовидів є предметом багатьох праць (див оглядову статтю [1]). У цій статті ми розглядаємо означений Й. де Гроотом функтор суперрозширення λ (означення див. нижче), що діє у категорії компактів. Цей функтор породжує монаду $\mathbb{L} = (\lambda, \eta, \mu)$ на категорії *Comp* [2]. Геометрію відображень, що входять до природного перетворення μ цієї монади, розглядали у [3–5]. Ми застосовуємо до дослідження відображень μX операцію часткового добутку топологічних просторів, введену Б.О. Пасинковим [6].

Означення, що стосуються теорії функторів у категорії компактів, а також обернених спектрів, можна знайти у [1–7].

1. Нехай X, Y – компакти і $A \subset X$ – замкнена множина. Нагадаємо означення часткового добутку $P(X, Y; A)$, див. [6]. Нехай $\sim$ – відношення еквівалентності на $X \times Y$, $(a, y_1) \sim (a, y_2)$, $a \in A$, $y_1, y_2 \in Y$. Тоді $P(X, Y; A) = (X \times Y)/\sim$. Через $\langle x, y\rangle \in P(X, Y; A)$ позначаємо клас еквівалентності точки $(x, y) \in X \times Y$. Нехай $q : X \times Y \to P(X, Y; A)$ – фактор-відображення. Через $\pi : P(X, Y; A) \to X$ позначається проекція на перший співмножник, $\pi\langle x, y\rangle = x$, $\langle x, y\rangle \in P(X, Y; A)$.

Нехай задано також частковий добуток $P(X', Y'; A')$ і неперервні відображення $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, причому $f(A) \subset A'$. Тоді можна означити відображення $P(f, g) : P(X, Y; A) \to P(X', Y'; A')$ формулою $P(f, g)\langle x, y\rangle = \langle f(x), g(x)\rangle$. Відображення $P(f, g)$, як легко бачити, неперервне.

2. Суперрозширенням λX компакту X називається простір усіх максимальних зчеплених систем підмножин простору X, наділений волменівською топологією (див. [8]). При цьому система множин називається зчепленою, якщо кожні два її елементи мають непорожній перетин, і називається максимально зчепленою, якщо вона не є власною підсистемою деякої зчепленої системи замкнених підмножин простору X. Замкнену передбазу волменівської топології в λX утворюють множини вигляду

$$A^+ = \{\mathcal{M} \in \lambda X \mid A \in \mathcal{M}\},$$

де A пробігає сім'ю замкнених в X підмножин.

Через $\lambda^2 X$ позначимо простір $\lambda(\lambda X)$. Відображення $\mu X : \lambda^2 X \to \lambda X$, означене формулою

$$\mu X(\mathfrak{M}) = \cup\{\cap \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\},$$

згідно з прийнятою у теорії категорій термінологією, називається множенням. Відображення $\eta X : X \to \lambda X$, $\eta X(x) = \{A \mid x \in A$, A – замкнена підмножина в $X\}$, $x \in X$, є вкладенням [1], [7].

Нехай $\lambda_\nabla X = \lambda X \setminus \eta X(X)$, $\lambda^2_\nabla X = \lambda^2 X \setminus \eta \lambda X(\eta X(X))$. Тоді легко бачити, що $\mu X(\lambda^2_\nabla X) = \lambda_\nabla X$. Покладемо

$$\mu_\nabla X = \mu X \mid \lambda^2_\nabla : \lambda^2_\nabla X \to \lambda_\nabla X.$$

3. Нижче уточнюється один результат з [5], який стверджує, що для однорідного за характером відкритопородженого континууму X відображення $\mu_\nabla X$ гомеоморфне локально-тривіальному розшаруванню, шаром якого є тихоновський куб I^τ, де $\tau = w(X)$ – вага простору X.

ТЕОРЕМА 1. *Нехай X – однорідний за характером відкритопороджений континуум і $\tau = w(X)$. Відображення $\mu_\nabla X$ гомеоморфне тривіальному I^τ-розшаруванню тоді і лише тоді, коли $\tau = \omega$.*

Доведення. Необхідність. Якщо $w(X) = \omega$, то простоір $\lambda_\nabla X$ є метричним, а отже, паракомпактним і за теоремою Чепмена [10], локально-тривіальне I^ω-розшарування $\mu_\nabla X$ є тривіальним.

Достатність. Нехай $w(X) = \tau > \omega$. Припустивши, що $\mu_\nabla X$ – тривіальне I^τ-розшарування, одержуємо, що відображення μX гомеоморфне проектуванню

$$\pi = \pi X : P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X)) \to \lambda X.$$

Для доведення теореми досить показати, що простір $P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X))$ не є абсолютним ретрактом (AR); цим буде досягнена суперечність з наступним доведеним у [9] фактом: $\lambda^2 X \in AR$ для розглядуваних X.

Нехай $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_{\alpha,\beta}; \mathcal{P}_\omega(\tau)\}$ – сигма-спектр з границею X (див. [7]; через $\mathcal{P}_\omega(\tau)$ позначається індексна множина злічених підмножин ординала τ, частково впорядкована включеннями), $p_\alpha : X \to X_\alpha$ – граничні проекції цього спектра. Нехай $g_\alpha : I^\tau \to I^\alpha$ – проектування, де $\alpha \in \mathcal{P}_\omega(\tau)$. Припустивши, що $P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X)) \in AR$, за спектральною теоремою Є.В.Щепіна [7] одержуємо, що існує таке $\alpha \in \mathcal{P}_\omega(\tau)$, що відображення

$$P(\lambda p_\alpha, g_\alpha) : P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X)) \to P(\lambda X_\alpha, I^\alpha, \eta X_\alpha(X_\alpha))$$

відкрите.

Покажемо, що це неможливо. Нехай $V \neq \emptyset$ – така відкрита підмножина в I^τ, що $g_\alpha(V) \neq I^\alpha$. Тоді $U = q(\lambda_\nabla X \times V)$ – відкрита множина в $P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X))$ образ якої при відображенні $P(\lambda p_\alpha, g_\alpha)$ не відкритий. Одержана суперечність завершує доведення теореми.

Існує нульвимірний аналог теореми 1. Через $D = \{0,1\}$ позначається дискретний двоточковий простір.

Теорема 2. *Нехай X – однорідний за характером відкритопороджений нульвимірний компакт ваги τ. Відображення $\mu_\nabla X$ гомеоморфне D^τ-розшаруванню тоді і тільки тоді, коли $\tau = \omega$.*

Доведення аналогічне до доведення теореми 1.

4. Сформулюємо деякі відкриті запитання. Алгебри монади $\mathbb{L}$, тобто компакти X, задані разом з "природним" відображенням (стуктурним відображенням) $\xi : \lambda X \to X$ внутрішньо охарактеризовані в [2]. Виникає проблема поширення на структурні відображення теорем 1 і 2.

Через NX позначається простір непорожніх замкнених підмножин у λX, що є перетинами елементів стандартної замкненої передбази в λX. Існує природне розшарування $p : Y \to NX$, де

$$Y = \{(x,y) \in NX \times \lambda X \mid y \in x\} \subset NX \times \lambda X,$$
$$p = pr_1|Y : Y \to NX.$$

Гіпотеза. Нехай X – відкритопороджений континуум і $\tau = w(X)$. Обмеження відображення p на доповнення до точок взаємної однозначності є локально-тривіальним I^τ-розшаруванням, причому це розшарування тривіальне тоді і тільки тоді, коли $\tau = \omega$.

Список літератури

1. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // Успехи матем. наук. 1986. Т.41. №6. С.121–159.
2. Заричный М.М. Монада суперрасширения и ее алгебры // Укр. матем. журнал. 1987. Т.39. №3. С.303–309.
3. Заричный М.М. О мягкости умножения в суперрасширениях // Общая топология. Пространства и отображения. – М.: Изд-во МГУ, 1989. С.70–76.
4. Заричный М.М. Итерированные суперрасширения // Общая топология. Отображения топол. пространств. – М.: Изд-во МГУ, 1986. С.45–59.
5. Заричный М.М. Абсолютные экстензоры и геометрия умножения монад в категории компактов // Матем. сборник. 1991. Т.182. №9. С.1261–1280.
6. Пасынков Б.А. Частичные топологические произведения // Тр. Моск. матем. общества. 1965. Т.13. С.136–245.
7. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи матем. наук. 1981. Т.36. Вып.3. С.3–62.
8. Mill J. van. Superextensions and Wallman spaces // MC Tracts. Amsterdam, 1977.
9. Иванов А.В. Решение проблемы ван Милла о характеризации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // ДАН СССР. 1982. Т.262. №3. С.526–528.
10. Chapman T.A. Locally trivial bundles and micro bundles with infinite-dimensional fibers // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. Vol.37, №2. P.595–602.

УДК 515.12+512.536

М.М. Зарічний, А.Б. Телейко

НАПІВГРУПИ І МОНАДИ

Монади у категорії компактів останніми роками систематично досліджують у зв'язку з загальною теорією нормальних та близьких до них функторів (див. [1]). Специфічною для монад, породжених такими функторами, є означена в [2] операція тензорного множення. У цій статті ми показуємо зв'язок операції тензорного множення з задачею підняття функторів і монад на категорію компактних напівгруп.

Монади. Монадою на категорії $\mathcal{C}$ називається трійка $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, у якій $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ – ендофунктор (функторіальна частина монади), $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to T$, $\mu : T^2 \to T$ – природні перетворення (їх називають, відповідно, одиницею і множенням монади), для яких діаграми

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, equal] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd}$$

комутативні (див. [3]). Ці діаграми виражають властивості двосторонності одиниці та асоціативність множення монади.

Категорією Клейслі монади $\mathbb{T}$ називається категорія $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, об'єкти якої ті ж, що і в $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y) = \mathcal{C}(X,TY)$, а композиція $g * f$ морфізмів $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(Y,Z)$ задається формулою $g * f = \mu Z \circ Tg \circ f$.

Через $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ позначають функтор, що є тотожним на об'єктах і переводить морфізм $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ у $\eta Y \circ f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y)$.

Кажуть, що ендофунктор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ має продовження на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, якщо існує ендофунктор $\overline{F} : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, для якого $IF = \overline{F}I$. В [4] показано, що продовженням функтора F на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

взаємнооднозначно відповідають природні перетворення $\xi : FT \to TF$, що задовольняють умови

$$\xi \circ F\eta = \eta F, \qquad \xi \circ F\mu = \mu F \circ T\xi \circ \xi T. \tag{$*$}$$

Монаду $\mathbb{T}$ називають проективною [4], якщо існує природне перетворення $\pi : T \to 1_C$ (проекція), для якого $\pi \circ \eta = 1$ і $\pi \circ \mu = \pi \circ \pi T$.

<u>Слабко нормальні функтори і монади.</u> Нагадаємо деякі необхідні означення, що стосуються загальної теорії функторів у категорії компактів (= компактних гаусдорфових просторів) $Comp$; детальніше див. у [1,5].

Функтор $F : Comp \to Comp$ називається нормальним (Є. В. Щепін [5]), якщо він неперервний, зберігає вагу, мономорфізми, епіморфізми, перетини, прообрази, точку і порожню множину. Якщо з цього означення вилучити умову збереження прообразів, то одержимо поняття слабко нормального функтора.

Зауважимо, що для кожного слабко нормального функтора F існує єдине природне перетворення $\eta : 1_{Comp} \to F$.

Монада у категорії $Comp$ називається (слабко) нормальною, якщо її функторіальна частина є (слабко) нормальним функтором.

Наведемо деякі приклади слабко нормальних монад.

1. Степенева монада Π_α, породжена степеневим функтором $(-)^\alpha$, де $1 \leq \alpha \leq \omega$.
2. Монада гіперпростору $\mathbb{H} = (\exp, s, u)$. Функтор гіперпростору (експоненти) exp у відповідність кожному компактові X ставить простір $\exp X = \{A \subset X | A \neq \varnothing$ – замкнена множина$\}$, наділений топологією Вієторіса. База цієї топології утворена множинами вигляду

$$< U_1, \dots, U_n >= \{A \in \exp X | A \subset U_1 \cup \dots \cup U_n,$$
$$A \cap U_i \neq \varnothing \text{ для кожного } i = 1, 2, \dots, n\},$$

де $U_1, \dots, U_n$ пробігають сім'ю відкритих підмножин простору X. Природні перетворення s і u задаються формулами: $\eta X(x) = \{x\}$, $x \in X$, $uX(\mathcal{A}) = \cup \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in \exp^2 X$.

3. Монада ймовірносних мір $\mathbb{P} = (P, \eta, \mu)$ (див., наприклад, [1]).
4. Монада гіперпросторів включення $\mathbb{G} = (G, \eta, \mu)$ та її підмонади. Гіперпростором включення у компакті X називається непорожня замкнена множина $\mathcal{A} \subset \exp X$, для якої виконана умова: якщо $B \in \exp X$ і $B \supset A \in \mathcal{A}$, то $B \in \mathcal{A}$.

Нехай $GX = \{\mathcal{A} | \mathcal{A}$ – гіперпростір включення в $X\} \subset \exp^2 X$. Для відображення $f : X \to Y$ нехай

$$Gf(\mathcal{A}) = \{C \in \exp Y | C \supset f(A) \text{ для деякого } A \in \mathcal{A}\}.$$

Природні перетворення η і μ задаються формулами:

$$\eta X(x) = \{A \in \exp X | x \in A\}, \quad x \in X,$$
$$\mu X(\mathfrak{A}) = \cup\{\cap \mathcal{A} | \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}, \quad \mathfrak{A} \in G^2 X.$$

Опишемо деякі підфунктори функтора G, які визначають підмонади монади $\mathbb{G}$. Насамперед, для кожного натурального $k \geq 2$ означимо підфунктор N_k функтора G умовою:

$$N_k X = \{\mathcal{A} \in \exp GX | \mathcal{A} - k\text{-зчеплена система}\}$$

(k-зчепленість системи $\mathcal{A}$ означає, що $A_1 \cap \dots \cap A_k \neq \varnothing$ для кожних $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$). Функтори N_k породжують монади $\mathbb{N}_k$.

Означимо підфунктор суперрозширення λ функтора G. Нехай

$$\lambda X = \{\mathcal{A} \in N_2 X | \text{ якщо } \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \in N_2 X, \text{ то } \mathcal{A} = \mathcal{B}\}.$$

Елементи простору λX називають максимальними зчепленими системами (м.з.с.) замкнених множин в X. Функтор λ породжує монаду суперрозширення $\mathbb{L}$.

Тензорні множення. Для слабко нормальних монад можуть бути означені операції тензорного множення; див. [1,2]. Нехай X, Y – компакти. Для кожного $x \in X$ означимо відображення $i_x : Y \to X \times Y$ формулою $i_x(y) = (x, y)$, $y \in Y$. Для кожного $b \in TY$ означимо відображення $f_b : X \to T(X \times Y)$ формулою $f_b(x) = Ti_x(b)$, $x \in X$. Тензорним добутком елементів $a \in TX$ і $b \in TX$ називається елемент

$$a \otimes b = \mu(X \times Y) \circ Tf_b(a) \in T(X \times Y).$$

Можна навести також інше означення, в якомусь сенсі симетричне до попереднього. Для кожного $y \in Y$ означимо відображення $j_y : X \to X \times Y$ формулою $j_y(x) = (x, y)$, $x \in X$. Для кожного $a \in TX$ означимо відображення $g_a : Y \to T(X \times Y)$ формулою $g_a(y) = Tj_y(a)$, $y \in Y$. Приймемо

$$a \widetilde{\otimes} b = \mu(X \times Y) \circ Tg_a(b) \in T(X \times Y).$$

Зауважимо, що, приймаючи $X = Y$, одержуємо природні перетворення $\otimes, \widetilde{\otimes} : (-)^2 \circ T \to T \circ (-)^2$ (див., наприклад, [2]).

Підняття функторів і монад на категорію напівгруп. Через $\mathcal{CS}$ позначимо категорію компактних гаусдорфових напівгруп і неперервних гомоморфізмів, через $U : \mathcal{CS} \to \mathcal{C}omp$ позначимо забуваючий функтор. Підняттям функтора $F : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ на категорію $\mathcal{CS}$ називається функтор $\overline{F} : \mathcal{CS} \to \mathcal{CS}$ такий, що $U\overline{F} = FU$. Якщо $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ – монада на категорії $\mathcal{C}omp$, то підняттям монади $\mathbb{T}$ на категорію $\mathcal{CS}$ називається монада $\overline{\mathbb{T}} = (\overline{T}, \overline{\eta}, \overline{\mu})$ на категорії $\mathcal{CS}$ така, що $U\overline{T} = TU$, $\eta \circ U = U \circ \overline{\eta}$ і $U \circ \overline{\mu} = \mu \circ U\overline{T} \circ \overline{T}U$.

Теорема 1. *Нехай $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ – слабко нормальна монада в категорії компактів. Приймаючи для кожної компактної напівгрупи (S, m)*

$$\overline{T}(S, m) = (TS, \overline{m}), \quad \overline{m}(a, b) = Tm(a \otimes b),$$
$$\widetilde{T}(S, m) = (TS, \widetilde{m}), \quad \widetilde{m}(a, b) = Tm(a \widetilde{\otimes} b), \quad a, b \in TS,$$

одержуємо підняття $\overline{T}, \widetilde{T}$ функтора T на категорію $\mathcal{CS}$. При цьому природне перетворення $\eta : 1_{\mathcal{C}omp} \to T$ породжує природні перетворення $\overline{\eta} : 1_{\mathcal{CS}} \to \overline{T}$, $\widetilde{\eta} : 1_{\mathcal{CS}} \to \widetilde{T}$.

Доведення випливає з властивостей тензорного множення, наведених у [2]. Покажемо лише асоціативність множення $\overline{m} : TS \times TS \to TS$.

Для кожних $a, b, c \in TS$ одержуємо $\overline{m}(a, \overline{m}(b, c)) = Tm(a \otimes Tm(b \otimes c)) = Tm(T1_S(a) \otimes Tm(b \otimes c)) = Tm((1_S \times m)(a \otimes (b \otimes c))) = Tm((m \times 1_S)((a \otimes b) \otimes c))) = \overline{m}(\overline{m}(a, b), c)$.

Якщо $\mathbb{T} = \mathbb{H}$, то одержуємо наступну напівгрупову операцію на $\exp S$: $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$.

Якщо $\mathbb{T} = \mathbb{P}$, то вказане підняття дає операцію згортки мір на PS.

Теорема 2. *Нехай природне перетворення $\xi = \otimes : (-)^2 \circ T \to T \circ (-)^2$ (відповідно, $\xi = \widetilde{\otimes} : (-)^2 \circ T \to T \circ (-)^2$) задовольняє умови $(*)$ (тобто задає продовження функтора $(-)^2$ на категорію $Comp_{\mathbb{T}}$). Тоді означене в умові Теореми 1 підняття $\overline{T}$ (відповідно $\widetilde{T}$) визначає підняття $\overline{\mathbb{T}}$ (відповідно $\widetilde{\mathbb{T}}$) монади $\mathbb{T}$ на категорію CS.*

Доведення. Розглянемо тільки випадок тензорного множення $\otimes$. Досить довести, що відображення $\mu S : (\overline{T}^2 S, \overline{\overline{m}}) \to (\overline{T}S, \overline{m})$ є гомоморфізмом. Використовуючи умову $(*)$ (з $\xi = \otimes$), одержуємо

$$\mu S \circ \overline{\overline{m}} = \mu S \circ T\overline{m} \circ \otimes T = \mu S \circ T^2 m \circ T \otimes \circ \otimes T =$$
$$Tm \circ \mu(S \times S) \circ T \otimes \circ \otimes T = Tm \circ \otimes \circ (\mu S \times \mu S) = \overline{m} \circ (\mu S \times \mu S).$$

Наслідок. *Кожна проективна (слабко нормальна) монада в $Comp$ має підняття на категорію CS.*

Доведення випливає з результатів праці [4].

Приклади. Наступний приклад показує, що підняття $\overline{T}$ і $\widetilde{T}$, про які йдеться у теоремі 1, можуть відрізнятися.

Приклад. Розглянемо монаду суперрозширення $\mathbb{L} = (\lambda, \eta, \mu)$. Нехай S' – довільна напівгрупа з трьох елементів, $S' = \{a, b, c\}$ і нехай $S = S' \times S'$. Розглянемо $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \lambda S$,

$$\mathcal{M} \supseteq \{\{(a,a),(b,a)\},\{(b,a),(c,a)\},\{(a,a),(c,a)\}\},$$
$$\mathcal{N} \supseteq \{\{(a,a),(a,b)\},\{(a,c),(a,a)\},\{(a,b),(a,c)\}\}.$$

Тоді безпосередні обчислення показують, що

$$\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,b)\} \in \overline{m}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \setminus \widetilde{m}(\mathcal{M},\mathcal{N}).$$

Зауважимо, що вказані підняття $\overline{T}$ і $\tilde{T}$ рівні для монад гіперпростору, ймовірносних мір та степеневої монади.

В [1] доведено, що тензорні монади $\mathbb{H}$ і $\mathbb{P}$ задовольняють умови теореми 2. Звідси випливає, що монади $\mathbb{H}$ і $\mathbb{P}$ допускають підняття на категорію $\mathcal{CS}$. Що стосується монади $\mathbb{L}$, то як показує наступне твердження, тут ситуація складніша.

Твердження 1. *Функтор $(-)^2$ не продовжується на категорію $Copm_{\mathbb{L}}$.*

Доведення. Для кожного компакта X і точок $x, y, z \in X$ через $t(x,y,z)$ позначимо м.з.с. $\{F \in \exp X \mid |F \cap \{x,y,z\}| \geq 2\}$.

Припустимо, що $\xi : (-)^2\lambda \to \lambda(-)^2$ – природне перетворення, для якого виконуються умови $(*)$ (з $F = (-)^2$ і $T = \lambda$).

Нехай тепер X – скінченний (дискретний) простір і a, b, c, a', b', c' – шість попарно різних точок простору X. Через $\mathcal{H}$ позначимо множину бієкцій з X у себе, що переводить кожну з множин $\{a,b,c\}$ та $\{a',b',c'\}$ у себе. Зрозуміло, що

$$\lambda h\big(t(a,b,c)\big) = t(a,b,c), \qquad \lambda h\big(t(a',b',c')\big) = t(a',b',c')$$

для кожного $h \in \mathcal{H}$.

Приймемо $\mathcal{A} = \xi X\big(t(a,b,c), t(a',b',c')\big)$, тоді за природністю ξ одержуємо, що

$$\lambda(h \times h)(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \tag{$**$}$$

для кожного $h \in \mathcal{H}$. Назвемо властивість $(**)$ інваріантністю м.з.с. $\mathcal{A}$.

Розглянемо ретракцію $f : X \to X \setminus \{b, b'\}$, таку, що $f(b) = a$, $f(b') = a'$. Тоді $\lambda f\big(t(a,b,c)\big) = \eta X(a)$, $\lambda f\big(t(a',b',c')\big) = \eta X(a')$ і за властивістю $(*)$ одержуємо $\xi X(\lambda f \times \lambda f)(\mathcal{A}) = \xi\big(\eta X(a), \eta X(a')\big) = \eta(X \times X)(a, a')$. Звідси випливає, що $\{a,b\} \times \{a',b'\} \in \mathcal{A}$ і за інваріантністю $\mathcal{A}$ одержуємо, що $A \times A' \in \mathcal{A}$ для кожних $A \in t(a,b,c)$, $A' \in t(a',b',c')$.

Розглянемо точки

$$\mathfrak{M} = \big(\eta(a), \eta(b), t(a,b,c)\big),\ \mathfrak{N} = \big(\eta(a'), \eta(b'), t(a',b',c')\big) \in \lambda^2 X.$$

Оскільки $\mu X(\mathfrak{M}) = t(a,b,c)$, $\mu X(\mathfrak{N}) = t(a',b',c')$, то $\xi X \circ (\mu X \times \mu X)(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathcal{A}$.

Припускаючи, що виконується друга умова з (*), одержуємо $\mathcal{A} = \mu(X \times X) \circ \lambda\xi X \circ \xi\lambda X(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Зауважимо, що для кожного $w \in X \setminus \{x, y, z\}$ маємо

$$\xi X\big(t(x,y,z), \eta X(w)\big) = t\big((x,w),(y,w),(z,w)\big),$$
$$\xi X\big(\eta X(w), t(x,y,z)\big) = t\big((w,x),(w,y),(w,z)\big).$$

Шоб довести, наприклад, першу з двох цих рівностей (друга доводиться аналогічно), розглянемо відображення $g : X \to X$, що бієктивно відображає множину $\{a,b,c\}$ на $\{x,y,z\}$ і відображає множину $\{a',b',c'\}$ у точку w; тоді

$$\xi X\big(t(x,y,z), \eta X(w)\big) = \xi X(\lambda g \times \lambda g)\big(t(a,b,c), t(a',b',c')\big) =$$
$$\lambda(g \times g)(\mathcal{A}) = t\big((x,w),(y,w),(z,w)\big).$$

Застосовуючи наведені вище міркування до елемента $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \in \lambda^2 X \times \lambda^2 X$, одержуємо, що

$$\mathcal{K} = \{\eta X(b), t(a,b,c)\} \times \{\eta X(a'), \eta X(b')\} \in \xi\lambda X(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}),$$
$$\mathcal{L} = \{\eta X(a), \eta X(b)\} \times \{\eta X(b'), t(a',b',c')\} \in \xi\lambda X(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Тоді

$$\lambda\xi X(\mathcal{K}) = \{\eta(X \times X)(b,a'), \eta(X \times X)(b,b'),$$
$$t\big((a,a'),(b,a'),(c,a')\big), t\big((a,b'),(b,b'),(c,b')\big)\},$$

а тому м.з.с. $\mathcal{A} = \mu(X \times X) \circ \lambda\xi X \circ \xi\lambda X(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ містить множину $K = \{(a,a'),(b,a'),(b,b'),(c,b')\}$. Застосовуючи наведені вище міркування до множини $\mathcal{L}$, одержуємо, що $L = \{(a,a'),(a,b'),(b,b'),(b,c')\} \in \mathcal{A}$.

Але неважко переконатися, що існує $h \in \mathcal{H}$ таке, що $(h \times h)(K) \cap L = \varnothing$, і ми одержуємо суперечність з інваріантністю $\mathcal{A}$.

Зауваження. Нескладна модифікація попереднього доведення дає змогу показати, що жоден степеневий функтор $(-)^{\alpha}$, $\alpha \le \omega$, не продовжується на категорію $\mathcal{C}omp_{\mathrm{L}}$.

Випадок функторів скінченного степеня. Для кожного слабко нормального функтора F носієм точки $a \in FX$ називається множина

$$supp(a) = \cap\{A \subset X | A \in \exp X, a \in FA\}.$$

Якщо для кожної точки $a \in FX$ множина $supp(a)$ має не більше, ніж n елементів, $n \in \mathbf{N}$, то кажуть, що степінь функтора F не перевищує n (позначається $deg\, F \leq n$). Запис $deg\, F = n$ означає, що $deg\, F \leq n$, але не $deg\, F \leq n-1$.

Твердження 2. *Нехай F – нормальний функтор, $deg\, F = n \in \mathbf{N}$ і виконана умова:*

довільна n-точкова множина є носієм рівно однієї точки;

Тоді F не допускає підняття $\overline{F}$ на категорію $\mathcal{CS}$ такого, що кожна компонента природного перетворення $\eta : 1_{\mathcal{CS}} \to \overline{F}$ є гомоморфізмом.

Доведення. Нехай задана $2n$-точкова множина $S = \{0_1, \ldots, 0_n, 1_1, \ldots, 1_n\}$ з операцією, що задається умовами: $0_i \cdot 1_j = 1_j \cdot 0_i = 0_i$, $0_i \cdot 0_j = 0_i$, $1_i \cdot 1_j = 1_i$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Нехай $X = S^\omega$ з поточковим множенням. Припустивши, що існує вказане підняття $\overline{F}$ функтора F на категорію $\mathcal{CS}$, можемо вважати, що X – піднапівгрупа в $\overline{F}X$. Існують $x = (x_i)_{i=1}^\infty, y = (y_i)_{i=1}^\infty \in X$ такі, що $xy \notin \{x, y\}$.

Існують околи U, V, W точок x, y, xy, відповідно, у FX, що попарно не перетинаються і для яких $UV \subset W$. Існують базисні околи U', V' точок x, y, відповідно, для яких

$$supp^{-1}(< U' >) \subset U \text{ і } supp^{-1}(< V' >) = V$$

(це є наслідком напівнеперервності знизу відображення $supp$ [5]).

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що U', V' мають вигляд

$$U' = U_1 \times \ldots \times U_m \times S \times S \times \ldots,$$
$$V' = V_1 \times \ldots \times V_m \times S \times S \times \ldots,$$

для деякого $m \in \mathbf{N}$.

Приймемо

$$a_i = (x_1, \dots, x_m, 0_i, x_{m+2}, \dots),$$
$$b_i = (y_1, \dots, y_m, 0_i, y_{m+2}, \dots), \quad i = 1, \dots, n.$$

Покладемо $T = \{a_i | i = 1, \dots, n\} \cup \{b_i | i = 1, \dots, n\}$. Легко бачити, що T – піднапівгрупа в X, а тому $\overline{F}T$ – піднапівгрупа в $\overline{F}X$.

За властивістю функтора F існують точки $a, b \in FX$, для яких $supp(a) = \{a_1, \dots, a_n\}$, $supp(b) = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Розглянемо відображення $f = (f_i)_{i=1}^{\infty} : X \to X$, тотожне на всіх координатах, крім $(m+1)$-ї, і таке, що

$$f_{m+1}(0_1) = 0_n, \; f_{m+1}(1_1) = 1_n,$$
$$f_{m+1}(0_i) = 0_{i-1}, \; f_{m+1}(1_i) = 1_{i-1} \text{ при } i > 1.$$

Очевидно, що f неперервний гомоморфізм, а тому $\overline{F}f(ab) = \overline{F}f(a)\overline{F}f(b) = ab$. Звідси випливає така властивість точки ab:

$$\begin{cases} \text{якщо } supp(ab) \cap supp(a) \neq \varnothing, \text{ то } supp(a) \subset supp(ab), \\ \text{якщо } supp(ab) \cap supp(b) \neq \varnothing, \text{ то } supp(b) \subset supp(ab). \end{cases}$$

Звідси випливає, що $ab \in \{a, b\}$, а тому $xy = x$ або $xy = y$. Одержуємо суперечність.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ функтор $\exp_n$ означається як підфунктор функтора $\exp$, для якого $\exp_n X = \{A \in \exp X | \, |A| \leq n\}$.

Наслідок. *При $n > 1$ функтор $\exp_n$ не має підняття на категорію $\mathcal{CS}$.*

<u>Відкриті питання.</u> Кожна монада $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ на категорії $\mathcal{C}$ породжує категорію $\mathbb{T}$-алгебр [3]. При цьому $\mathbb{T}$-алгеброю називається пара (X, ξ), де $\xi : TX \to X$ – морфізм, для якого $\xi \circ \eta X = 1_X$ і $\xi \circ \mu X = \xi \circ T\xi$. Морфізм $f : X \to X'$ називається морфізмом $\mathbb{T}$-алгебри (X, ξ) в $\mathbb{T}$-алгебру (X', ξ'), якщо $f \circ \xi = \xi' \circ Tf$.

Категорія $\mathbb{H}$-алгебр охарактеризована як категорія $\vee$-напівграток Лоусона (див. [6]). Категорія $\mathbb{P}$-алгебр охарактеризована як категорія опуклих компактів, що лежать в локально опуклих просторах (див. [7]).

Розглянемо підняття $\overline{\mathbb{H}}$ і $\overline{\mathbb{P}}$ монад $\mathbb{H}$ і $\mathbb{P}$, відповідно, на категорію $\mathcal{CS}$.

Проблема 1. *Охарактеризувати категорії $\overline{\mathbb{H}}$-алгебр і $\overline{\mathbb{P}}$-алгебр.*

Проблема 2. *Чи існують підняття монад $\mathbb{G}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{N}_k$ на категорію $\mathcal{CS}$?*

Найближче за своїми властивостями до топологічних груп знаходяться топологічні інверсні напівгрупи. Топологічна напівгрупа S називається інверсною [8], якщо для кожного $x \in S$ існує єдиний інверсний елемент x^{-1} (тобто елемент, для якого виконані умови $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$) і відображення з S в S, $x \mapsto x^{-1}$, – неперервне.

В [1] показано, що кожний нормальний функтор, для якого існує підняття на категорію компактних груп, є степеневим.

Проблема 3. *Чи існує нестепеневий слабко нормальний функтор, підняття якого на категорію $\mathcal{CS}$ зберігає клас компактних топологічних інверсних напівгруп?*

ЛІТЕРАТУРА

1. Зарічний М.М. Топологія функторів і монад у категорії компактів. К., 1993.
2. Зарічний М.М. *Абсолютные экстензоры и геометрия умножения монад в категории компактов* // Матем. сборник. 1991. Т.182, №9. С.1261–1280.
3. Barr M., Wells Ch. Toposes, triples and theories. New York, 1985.
4. Vinárek J. *Projective monads and extensions of functors* // Math. Centr. Afdeling. 1983. №195. P.1–12.
5. Щепин Е.В. *Функторы и несчетные степени компактов* // Успехи матем. наук. 1981. Т.36. Вып.3. С. 3–62
6. Wyler O. *Algebraic theories of continuous lattices* // Lect. Notes in Math. 1981. Vol.271. P.390–413.
7. Świrszcz T. *Monadic functors and convexity* // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. mat., astron. et phys. 1974. T.22. №1. P.39–42.
8. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М., 1972. В т.1.

УДК 512.64

В.Р.ЗЕЛІСКО

ДОПУСТИМІ ФАКТОРИЗАЦІЇ РЕГУЛЯРНИХ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ МНОГОЧЛЕНІВ І КВАЗІМНОГОЧЛЕНІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

У цій статті ми розглядаємо питання про застосування результатів теорії розкладності матричних многочленів на множники [1] до дослідження факторизацій симетричних матриць над кільцями многочленів та квазімногочленів з інволюцією [2], які мають безпосереднє застосування у теорії лінійних стаціонарних систем [3]. Для зручності будемо використовувати термінологію і позначення, наведені в [1;2].

Під інволюцією у кільцях многочленів $\mathbf{C}[x]$ і квазімногочленів $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ розумітимемо таку операцію ∇, що для довільних елементів a, b із цих кілець маємо рівності

$$(a+b)^\nabla = a^\nabla + b^\nabla, \quad (ab)^\nabla = a^\nabla b^\nabla, \quad (a^\nabla)^\nabla = a.$$

У роботі [2] доведено, що у кільці $\mathbf{C}[x]$ неперервну інволюцію можна визначити такими попарно неізоморфними способами:

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum \bar{a}_k (-x)^k, \tag{α}$$

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum a_k (-x)^k, \tag{β}$$

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum a_k x^k, \tag{γ}$$

а у кільці $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ -попарно неізоморфними способами:

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum \bar{a}_k x^{-k}, \tag{δ}$$

$$\left(\sum a_k x^k\right)^\nabla = \sum \bar{a}_k (-x)^{-k}, \tag{ε}$$

$$(\sum a_k x^k)^\nabla = \sum a_k(-x)^{-k}. \qquad (\zeta)$$

Зафіксуємо у кільці $\mathbb{C}[x]$ чи $\mathbb{C}[x,x^{-1}]$ одну з вказаних інволюцій і перенесемо її на кільця матриць $M_n(\mathbb{C}[x])$ та $M_n(\mathbb{C}[x,x^{-1}])$

$$A(x)^\nabla = ||a_{ij}(x)||^\nabla = ||a_{ji}(x)^\nabla||.$$

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x)^\nabla = A(x)$.

Факторизацією матриці $A(x)$ з кілець $M_n(\mathbb{C}[x])$ та $M_n(\mathbb{C}[x,x^{-1}])$ називають її зображення у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^\nabla, \qquad (1)$$

де $C(x) = C(x)^\nabla$ - деяка неособлива матриця. У [2] розглядаються факторизації, в яких $C = C^\nabla$ - деяка неособлива числова матриця, а у [3] показано, що для побудови синтезованого локально оптимального керування використовують факторизацію (1) многочленної матриці $A(x)$, в якій матриця $B(x) = \sum_{i=0}^r B_i x^i$ - унітальна /старший коефіцієнт $B_r = E$ - одинична матриця /. Зважаючи на це, будемо розглядати спочатку питання про існування факторизації вигляду (1), у якій $A(x)$ і $C(x)$ - регулярні симетричні матриці, а $B(x)$ - унітальна. Нагадаємо, що многочленна матриця $A(x) = \sum_{i=0}^m A_i x^i$ називається регулярною, якщо $|A_m| \neq 0$. Квазімногочленну матрицю $A(x) = \sum_{i=-l}^p A_i x^i$ назвемо регулярною, якщо $|A_{-l}| \neq 0$, $|A_p| \neq 0$. Число $s = p + l$ назвемо степенем регулярної матриці $A(x)$.

Якщо $A(x)$ -квазімногочленна матриця вигляду $A(x) = \sum_{i=-l}^p A_i x^i$, то матриця $A(x)x^l = \sum_{i=-l}^p A_i x^{i+p}$ вже многочленна, причому, зважаючи, що матриця Ex^l оборотна над $\mathbb{C}[x,x^{-1}]$, бачимо, що задача про факторизацію квазімногочленних матриць зводиться до задачі факторизації многочленних матриць. Для пошуку критеріїв факторизацій використаємо введене у [4] поняття значення многочленної матриці $G(x)$, рядками якої є $g_1(x),\ldots,g_n(x)$ на системі коренів елементів матриці

$\Phi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$:

$$M_{G(x)}(\Phi) = \begin{pmatrix} M_{g_1(x)}(\varphi_1) \\ \cdots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Тут $M_{g_i(x)}(\varphi_i)$ - значення многочленної матриці на системі коренів многочлена $\varphi_i(x) = (x-\alpha_1)^{s_1}\cdots(x-\alpha_m)^{s_m}$, введене в [1] так:

$$M_{g_i(x)}(\varphi_i) = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_m \end{pmatrix}, \quad H_k = \begin{pmatrix} g_i(\alpha_k) \\ g_i'(\alpha_k) \\ \dots \\ g_i^{(s_k-1)}(\alpha_k) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де $g_i^{(j)}(x)$ - похідні порядку j від матриці $g_i(x)$.

Надалі позначимо через S_A форму Сміта многочленної матриці $A(x)$. Отже

$$S_A = P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)). \tag{4}$$

Відомо [1], що якщо для матриці $A(x)$ має місце факторизація (1), то $S_B|S_A$ і $S_{B^\nabla}|S_A$, хоча рівність $S_A = S_B S_C S_{B^\nabla}$ виконується не завжди. У цій статті будемо розглядати тільки такі факторизації матриці $A(x)$, для яких S_A дорівнює добутку форм Сміта її співмножників і називатимемо їх допустимими.

Нехай форму Сміта матриці $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$S_A = \Phi(x)D(x)\Phi(x)^\vee, \tag{5}$$

де

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad \varphi_i|\varphi_{i+1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \deg\varphi_i = nr, \quad D(x) = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_i|d_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Із результатів роботи [2] видно, що умова (5) виконується, якщо кожний інваріантний множник $\varepsilon_i(x)$ матриці $A(x)$ або не має коренів на множині ∇ - нерухомих точок Г, або має їх, але кратність кожного такого кореня - парне число. Множина Г встановлена для кожного із вказаних типів інволюції.

ТЕОРЕМА 1. *Для регулярної симетричної матриці $A(x)$ допустима факторизація (1), у якій $B(x)$ - унітальна матриця степеня $r \geq 1$ з* *формою Сміта $S_B = \Phi(x)$, а $C(x) = C(x)^\nabla$ - деяка регулярна матриця з формою Сміта $S_C = D(x)$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\det M_{P(x)\|E, Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|}(\Phi) \neq 0, \tag{6}$$

де $P(x)$ - довільна оборотна матриця із співвідношення (4). Для кожного фіксованого розкладу (5) така допустима факторизація (1) єдина.

Доведення. Необхідність. Якщо для матриці $A(x)$ існує факторизація (1), то це означає, що матриця $A(x)$ має лівий регулярний множник $B(x)$ степеня r, причому $S_A = S_B S_{CB^\nabla}$, а тому згідно з результатами робіт [1] і [4] виконується умова (6).

Достатність. Нехай для форми Сміта матриці $A(x)$ маємо факторизацію (5). Тоді

$$A(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)D(x)\Phi(x)^\nabla Q^{-1}(x). \tag{7}$$

Оскільки $P(x)$ і $Q(x)$ оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці, то існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $S(x)$, що $P(x)^\nabla = Q(x)S(x)$, а саме $S(x) = Q^{-1}(x)P(x)^\nabla$. Для матриці $S(x)$ існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $H(x)$, що

$$H(x)\Phi(x)^\nabla = \Phi(x)^\nabla S(x), \tag{8}$$

причому матриця $H(x)$ не обов'язково є многочленною. Із рівностей (7) і (8) одержуємо:

$$A(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)D(x)H(x)\Phi(x)^\nabla (P(x)^\nabla)^{-1}.$$

Звідси, зважаючи на очевидну рівність $(P(x)^\nabla)^{-1} = P^{-1}(x)^\nabla$, маємо

$$A(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)D(x)H(x)\Phi(x)^\nabla P^{-1}(x)^\nabla. \tag{9}$$

Покажемо, що $H' = D(x)H(x)$ - многочленна матриця. Враховуючи рівність (8), бачимо, що $H' = D(x)\Phi(x)^\nabla S(x)(\Phi(x)^\nabla)^{-1}$, а тому довільний елемент h'_{ij} цієї матриці має вигляд

$$h'_{ij} = d_i(x)\varphi_i(x)s_{ij}(x)(\varphi_j(x)^\nabla)^{-1}.$$

Оскільки $s_{ij}(x) \in \mathbb{C}[x]$ і $\varphi_j(x)^\nabla | \varphi_i(x)^\nabla$ для всіх $i \geq j$, то бачимо, що елементи h'_{ij} матриці H' є многочленами при $i \geq j$. Із рівності (9), зважаючи, що $A(x)$ симетрична матриця і

$$\det P^{-1}(x)\Phi(x) \not\equiv 0,$$

видно, що $D(x)H(x)$ - симетрична матриця, а тому елементи матриці $D(x)H(x)$ є многочленами при $i < j$.

Згідно з теоремою про регуляризацію [1] умова (6) означає, що матриця $P^{-1}(x)\Phi(x)$ регуляризується справа, тобто існує така оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$, що $P^{-1}(x)\Phi(x)R(x) = B(x)$ - унітальна многочленна матриця степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$. Тоді з рівності (9) одержуємо

$$A(x) = B(x)R^{-1}(x)D(x)H(x)R^{-1}(x)^\nabla B(x)^\nabla. \tag{10}$$

Нехай $R^{-1}(x)D(x)H(x)R^{-1}(x)^\nabla = C(x)$. Оскільки $D(x)H(x)$ - симетрична многочленна матриця, то $C(x) = C(x)^\nabla$ - многочленна матриця з формою Сміта $D(x)$, а тому із рівності (10) отримуємо допустиму факторизацію вигляду (1).

Єдиність факторизації (1) випливає згідно з результатами роботи [1] з того, що ця факторизація допустима і множник $B(x)$ в ній унітальний. Теорема доведена.

Зауваження. *В умовах теореми 1 факторизацію (1) можна здійснити, знайшовши коефіцієнти многочленної матриці $B(x) = Ex^r - B_1x^{r-1} - \ldots - B_r$ за формулою:*

$$\begin{pmatrix} B_r \\ \ldots \\ B_1 \end{pmatrix} = \left(M_{P(x)\|E, Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|}(\Phi)\right)^{-1} M_{P(x)x^r}(\Phi).$$

Нехай $A(x)$ - регулярна симетрична многочленна матриця степеня $m = 2r, r \geq 1$, форму Сміта якої можна зобразити у вигляді

$$S_A = \Phi_1(x) \ldots \Phi_r(x) I \Phi_r(x)^\nabla \ldots \Phi_1(x)^\nabla, \tag{11}$$

де

$$\Phi_i(x) = \operatorname{diag}(\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{in}), \quad \varphi_{ij} | \varphi_{ij+1},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \deg \varphi_{ij} = n, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad I = \operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1).$$

Теорема 2. *Для матриці $A(x)$ існує допустима факторизація*

$$A(x) = (Ex - B_1)\dots(Ex - B_r)C(Ex - B_r)^{\nabla}\dots(Ex - B_1)^{\nabla}, \qquad (12)$$

де $S_{Ex-B_i} = \Phi_i(x)$, $C = C^{\nabla}$ - неособлива числова матриця, тоді і тільки тоді, коли

$$\det M_{P(x)\|E,Ex,\dots,Ex^{s-1}\|}(\Phi_1\dots\Phi_s) \neq 0 \qquad (13)$$

для всіх $s = \overline{1,r}$ при довільній оборотній матриці $P(x)$ із співвідношення (4). Для кожного фіксованого розкладу (11) така факторизація єдина.

Для доведення цієї теореми доведемо спочатку дві властивості матриці (2).

Твердження 1. *$M_{G(x)S}(\Phi) = M_{G(x)}(\Phi)S$ для довільної матриці $S \in M_n(\mathbb{C})$.*

Доведення. Для кожного рядка матриці (2) згідно з означенням матриці (3) і твердженням 1 із § 2, розділ 2, роботи [1], маємо:

$$M_{g_i(x)S}(\varphi_i) = M_{g_i(x)}(\varphi_i)S.$$

Тому

$$M_{G(x)S}(\Phi) = \begin{pmatrix} M_{g_1(x)S}(\varphi_1) \\ \dots \\ M_{g_n(x)S}(\varphi_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} M_{g_1(x)}(\varphi_1)S \\ \dots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n)S \end{pmatrix} = M_{G(x)}(\Phi)S.$$

Твердження 1 доведене.

Твердження 2. *Для довільних діагональних матриць $\Phi(x) = diag(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ і $\Psi(x) = \mathrm{diag}(\psi_1,\dots,\psi_n)$ і довільної $G(x) \in M_n(\mathbb{C})$ маємо рівність*

$$\operatorname{rang} M_{\Phi(x)G(x)}(\Phi\Psi) = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\Psi).$$

Доведення. За означенням матриці (2)

$$M_{\Phi(x)G(x)}(\Phi\Psi) = M_{\begin{pmatrix}\varphi_1 g_1(x)\\ \cdots \\ \varphi_n g_n(x)\end{pmatrix}}\left[\begin{pmatrix}\varphi_1\psi_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \varphi_n\psi_n\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} M_{\varphi_1 g_1(x)}(\varphi_1\psi_1)\\ \cdots \\ M_{\varphi_n g_n(x)}(\varphi_n\psi_n)\end{pmatrix}.$$

Згідно з твердженням 6 із § 2, розділ 2, роботи [1]:

$$\operatorname{rang} M_{\varphi_i g_i(x)}(\varphi_i\psi_i) = \operatorname{rang} M_{g_i(x)}(\psi_i)$$

для всіх $i = \overline{1,n}$. Тому

$$\operatorname{rang} M_{\Phi(x)G(x)}(\Phi\Psi) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} M_{g_1(x)}(\psi_1)\\ \cdots \\ M_{g_n(x)}(\psi_n)\end{pmatrix} = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\Psi),$$

що й треба було довести.

Лема. *Нехай в умовах теореми 1 форму Сміта $D(x)$ матриці $C(x)$ із співвідношення (1) можна зобразити у вигляді*

$$D(x) = \Phi_1(x)D_1(x)\Phi_1(x)^{\nabla}, \tag{14}$$

де $\Phi_1(x) = \operatorname{diag}(\varphi_{11},\ldots,\varphi_{1n})$, $\varphi_{1j}|\varphi_{1j+1}$, $D_1(x) = \operatorname{diag}(d_{11},\ldots,d_{1n})$, $d_{1j}|d_{1j+1}$, $j = \overline{1,n-1}$, $\sum_{i=1}^{n}\deg\varphi_{1i} = n$ *так, щоби*

$$\det M_{P(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{n}\|}(\Phi\Phi_1) \neq 0 \tag{15}$$

при довільній оборотній над $\mathbb{C}[x]$ *матриці* $P(x)$ *із співвідношення (4). Тоді для* $A(x)$ *маємо факторизацію*

$$A(x) = B(x)(Ex - B_1)C_1(x)(Ex - B_1)^{\nabla}B(x)^{\nabla}, \tag{16}$$

де $S_{Ex-B_1} = \Phi_1, \quad S_{C_1(x)} = D_1(x)$.

Доведення. Застосовуючи теорему 1 при $r = 1$ до симетричної матриці $C(x)$ із факторизації (1), достатньо довести, що

$$\det M_{R(x)}(\Phi_1) \neq 0, \tag{17}$$

де $R(x)$ - довільна оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця із співвідношення

$$R(x)C(x)S(x) = D(x). \tag{18}$$

Як видно із доведення теореми 1, унітальний множник $B(x)$ у факторизації (1) був одержаний регуляризацією матриці $P^{-1}(x)\Phi(x)$ домноженням справа на деяку оборотну над $\mathbb{C}[x]$ матрицю $R(x)$ і має вигляд

$$D(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)R(x), \tag{19}$$

причому із визначення матриці $C(x)$ у факторизації (1) бачимо, що при цій же матриці $R(x)$ виконується рівність (18). Позначимо цю матрицю через $R_0(x)$.

Припустимо, що при такій оборотній матриці $R(x) = R_0(x)$ із співвідношення (18) умова (17) не виконується, тобто

$$\det M_{R_0(x)}(\Phi_1) = 0.$$

Тоді стовпці матриці $M_{R_0(x)}(\Phi_1)$ лінійно залежні. Доведемо, що тоді існують матриці $P_0(x)$ із співвідношення (4) і $H \in GL_{n(r+1)}(\mathbb{C})$ такі, що у матриці

$$M_{P_0(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^r\|}(\Phi\Phi_1)H \tag{20}$$

деякі стовпці лінійно залежні, що суперечило б умові (15).

Нехай $P_0(x)$ - матриця $P(x)$ із рівності (19). Якщо матриця $D(x)$ у цій же рівності має вигляд

$$B(x) = Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_r,$$

то візьмемо

$$H = \begin{pmatrix} E & \cdots & 0 & B_r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \ldots & E & B_1 \\ 0 & \cdots & \cdot & E \end{pmatrix}.$$

При так вибраних H і $P_0(x)$ згідно з рівністю $P_0(x)B(x) = \Phi(x)R_0(x)$, яку легко одержати із (19), маємо

$$P_0(x)\|E, Ex, \dots, Ex^r\|H = P_0(x)\|E, Ex, \dots, Ex^{r-1}, B(x)\| =$$

$$= \|P_0(x), P_0(x)x, \dots, P_0(x)x^{r-1}, \Phi(x)R_0(x)\|.$$

На основі твердження 1 матриця (20) набуде вигляду

$$M_{P_0(x)\|E,Ex,\dots,Ex^r\|H}(\Phi\Phi_1) =$$

$$= \|M_{P_0(x)}(\Phi\Phi_1), \dots, M_{P_0(x)x^{r-1}}(\Phi\Phi_1, M_{\Phi(x)R_0(x)}(\Phi\Phi_1)\|$$

Згідно з твердженням 2

$$\operatorname{rang} M_{\Phi(x)R_0(x)}(\Phi\Phi_1) = \operatorname{rang} M_{R_0(x)}(\Phi_1).$$

Тому, якщо стовпці матриці $M_{R_0(x)}(\Phi_1)$ лінійно залежні, то лінійно залежними є стовпці матриці (20). Лема доведена.

Доведення теореми 2. Н е о б х і д н і с т ь . Якщо існує факторизація (12), то об"еднуючи добутки лінійних множників, одержимо допустимі факторизації

$$A(x) = B_s(x)C_s(x)B_s(x)^\nabla,$$

в яких $B_s(x)$ - унітальні матриці степеня s, $1 \le s \le r$ і згідно з теоремою 1 існують співвідношення (13) для всіх $s = \overline{1,r}$.

Д о с т а т н і с т ь проведемо індукцією за числом лінійних множників . Якщо виконується умова (13) при $s = 1$, то за теоремою 1:

$$A(x) = (Ex - B_1)C_1(x)(Ex - B_1)^\nabla, \quad C_1(x) = C_1(x)^\nabla,$$

причому така факторизація допустима. Припустимо, що маємо допустиму факторизацію

$$A(x) = (Ex - B_1)\dots(Ex - B_{r-1})C_{r-1}(x)(Ex - B_{r-1})^\nabla \dots (Ex - B_1)^\nabla, \tag{21}$$

де $S_{Ex-B_i} = \Phi_i(x)$, $i = \overline{1, r-1}$, $C_{r-1}(x) = C_{r-1}(x)^\nabla$. Зважаючи на останню із нерівностей (13) / при $s = r$ /, ми можемо до факторизації

(21) застосувати доведену вище лему і одержати факторизацію (12). Її єдиність легко проводиться індукцією по r, враховуючи теорему 1. Теорема 2 доведена.

Зауважимо, що якщо $A(x)$ - дійсна симетрична матриця, то зважаючи на реезультати роботи [4], бачимо, що коли у факторизаціях (5) і (11) усі многочлени дійсні, то теореми 1 та 2 дають необхідні і достатні умови існування відповідних допустимих факторизацій, множники в яких є дійсними многочленними матрицями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Казімірський П.С. *Розклад матричних многочленів на множники.* - К., 1981. 224 с.
2. Любачевский Б.Д. *Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией.* 1 // Сибирск. матем. журнал. 1973. Т. 14, N 2. С. 337 - 350.
3. Андреев В.А., Шепелявый А.М. *Синтез оптимальных управлений для амплитудно импульсных систем в задаче минимизации среднего значения функционала квадратичного типа.* // Там же. С. 250 -276.
4. Щедрик В.П. *Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена.* // Укр. матем. журнал. 1987. Т. 39. N 3, С. 370 - 373.

УДК 515.12

О.Р. НИКИФОРЧИН

ФУНКТОР ФАКТОР-ОБ'ЄКТІВ В КАТЕГОРІЇ НУЛЬВИМІРНИХ КОМПАКТІВ

У топології надзвичайно плідним є вивчення функтора гіперпростору замкнених множин *exp* [1] у категорії компактів *Comp*, який можна розглядати як топологізацію у випадку *Comp* варіанта функтора підоб'єктів [2] для категорій з єдиним епі-моно-розкладом. Ця стаття є спробою топологізувати дуальну до стандартного функтора підоб'єктів конструкцію функтора фактор-об'єктів для категорії нульвимірних компактів $Comp_0 \subset Comp$.

Нижче прямим (оберненим) спектром $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in \mathcal{A}\}$ називаємо діаграму, яка індексована напрямленою вниз (вгору) множиною $\mathcal{A}$, і для довільних $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}$ морфізм $\pi_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha$ єдиний при $\alpha \prec \alpha'$ і відсутній при $\alpha \succ \alpha'$, причому $\pi_{\alpha'}^{\alpha''} \circ \pi_\alpha^{\alpha'} = \pi_\alpha^{\alpha''}$ при $\alpha \prec \alpha' \prec \alpha''$, $\pi_\alpha^\alpha \equiv 1_{X_\alpha}$. Детальніше див. [1,2].

Добре відомим є такий факт (див., напр., [3]):

Лема 1 (П.С. Александров). *Нехай X – компакт і $E \subset X \times X$ – відношення еквівалентності. Рівносильні такі твердження :*

(1) *фактор-простір X/E – гаусдорфів;*
(2) *E – замкнена в $X \times X$;*
(3) *множина $\{F \overset{cl}{\subset} X \mid F \subset [x]$ для деякого $x \in X,\ F \neq \emptyset\}$ – замкнена в $exp\, X$ ($[x]$ – клас еквівалентності, який містить X).*

Назвемо епіморфізми компактів $\varphi : X \to Y_1$, $\psi : X \to Y_2$ еквівалентними (позначаємо $\varphi \sim \psi$), якщо існує такий гомеоморфізм $h : Y_1 \to Y_2$, що $\varphi = h \circ \psi$. Якщо h є лише сюр'єкцією, то пишемо $\psi \prec \varphi$. Відношення $\sim$ і $\prec$ є відповідно відношеннями еквівалентності та порядку на класі всіх епіморфізмів з простору X. По суті $\sim$ і $\prec$ – це відношення ізоморфізму та існування морфізму між об'єктами повної підкатегорії категорії $Comp^X$ об'єктів під X, яка містить лише епіморфізми. Класи еквівалентності відношення $\sim$ утворюють множину, елементи якої природно трактують як замкнені відношення еквівалентності на X. Позначимо цю множину $EQ(X)$, а відношення еквівалентності, яке відповідає $\varphi : X \to Y$ як $E(\varphi)$. Тоді $\varphi \sim \psi \iff E(\varphi) = E(\psi)$ і $\varphi \prec \psi \iff E(\varphi) \supset E(\psi)$.

Якщо класи еквівалентності відношення E збігаються з компонентами зв'язності компакта X, то умови леми 1 виконані, і фактор-простір X/E нульвимірний. Позначимо його $\Box X$. Легко бачити, що ця конструкція продовжується до функтора $\Box : Comp \to Comp_0$, і фактор-відображення $zX : X \to \Box X$ є компонентами природного перетворення $z : 1_{Comp} \to I \circ \Box$. Щобільше, $\Box$ є рефлектором для вкладення категорій I, а z – одиницею спряження (див. [2]). Це означає, що для довільного відображення компактів $f : X \to Y$, $\dim Y = 0$ існує і єдине відображення $\varphi : \Box X \to Y$ (а саме $\varphi = \Box f$), для якого $f = \varphi \circ zX$.

Важливим є той факт, що у категоріях $Comp$ і $Comp_0$ існують границі обернених спектрів і кограниці прямих спектрів з епіморфними проекціями, і функтор $\Box$ їх зберігає.

Позначимо $SR(X) \subset exp(X \times X)$ множину симетричних рефлексивних замкнених відношень на X. Маємо:

(1) $SR(X)$ – компакт;

(2) відповідність $X \mapsto SR(X)$ продовжується до функтора $SR : Comp \to Comp$, якщо покласти: $SR(f)(S) = exp(f \times f)(S) \cup \Delta_Y$, $f \in Comp(X, Y)$, $S \subset SR(X)$, Δ_Y – діагональ в $Y \times Y$;

(3) існує природне перетворення $s : exp(-,-) \to SR$, яке є ретракцією для кожного X: $sX(F) = F \cup i(F) \cup \Delta_X$, $i(x_1, i_2) = (x_2, x_1)$.

Позначимо множину відношень еквівалентності з нульвимірними фактор-просторами $EQ_0(X) \subset EQ(X)$. Для кожної підмножини $A \subset EQ_0(X)$ існують супремум та інфімум. Нехай $A = \{E(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$, де $\Phi = \{\varphi_\alpha : X \to X_\alpha \mid \dim X_\alpha = 0,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ – сім'я епіморфізмів. Тоді $\sup A$ відповідає діагональному добутку $\Delta_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha : X \to \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$, яке розглядаємо як відображення на свій образ. Нехай $\{\psi_\beta : X \to X_\beta \mid \dim X_\beta = 0,\ \beta \in B\}$ – множина, яка містить по одному представнику з кожного класу еквівалентних епіморфізмів $\psi : X \to X'$, для яких $\psi \prec \varphi$ для всіх $\varphi \in \Phi$. Аналогічно $\inf A$ відповідає діагональному добутку $\Delta_{\beta \in B} \psi_\beta : X \to \prod_{\beta \in B} X_\beta$, який розглядаємо як відображення на свій образ. Оскільки кожен нульвимірний компакт вкладається в добуток скінченних (або двоточкових) компактів, істинною є

Лема 2. *Для нульвимірного компакта X і замкненого відношення еквівалентності E на X фактор-простір X/E є нульвимірним тоді і тільки тоді, коли E є перетином в $X \times X$ деякої сім'ї $\{E_\alpha, \alpha \in A\}$ замкнених відношень еквівалентності на X, фактор-простори для яких є скінченними (двоточковими).*

Зауваження. Максимальне відношення $(X \times X) \in EQ(X)$ вважаємо перетином порожньої сім'ї.

Для нульвимірного компакта X і $S \in SR(X)$ покладемо: $eX(S) = \bigcap\{E \in EQ(X) \mid X/E$ – скінченний $\}$. Очевидно, $eX(S)$ – найменше відношення еквівалентності з нульвимірним фактор-простором, яке містить S.

Лема 3. *Для довільної сім'ї $\mathcal{E} = \{E_\alpha \mid \alpha \in A\}$ в $EQ_0(X)$ маємо: $\sup \mathcal{E} = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$, $\inf \mathcal{E} = eX(Cl(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha))$.*

Лема 4. *Нехай $S \in SR(X)$, $f : X \to Y$ – відображення нульвимірних компактів. Тоді: $eY \circ SR(f)(S) = eY \circ SR(f) \circ eX(S)$.*

Означення. Для відображення $f : X \to Y$ в $Comp_0$ означимо відображення $EQ_0(f) : EQ_0(X) \to EQ_0(Y)$ формулою: $EQ_0(f)(E) = eY \circ SR(f)(E)$. Згідно леми 3 маємо функтор $EQ_0 : Comp_0 \to Set$.

Лема 5. *Нехай $f : X_1 \to X_2$ – відображення в $Comp_0$, $E_i \in EQ_0(X)$, $\varphi_i : X_i \to X_i/E_i$ – фактор-відображення, $i = 1, 2$. Тоді $EQ_0(f)(E_1) = E_2$ тоді і тільки тоді, коли діаграму*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & X_1/E_1 \\ f\downarrow & & \\ X_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & X_2/E_2 \end{array}$$

можна доповнити відображенням $\tilde{f} : X_1/E_1 \to X_2/E_2$ (очевидно, єдиним чином) так, що діаграма стає кограничною для діаграми

$$X_2 \xleftarrow{f} X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_1/E_1 .$$

Для цього досить перевірити, що кожен комутативний коконус вигляду

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & X_1/E_1 \arrow[d] \\ X_2 \arrow[r] & D \end{tikzcd},$$

де $D = \{0,1\}$ двокрапка, єдиним чином пропускається через коконус, зображений вище.

Зауважимо, що для нульвимірного компакта X базу топології на $SR(X)$ утворюють множини вигляду $SR(f)^{-1}(S)$ для всеможливих неперервних відображень $f : X \to K$ у скінченні компакти K і $S \in SR(K)$.

Доведення наступних теорем можна відновити з використанням попередніх лем.

Теорема 1.

(1) *Множини вигляду $EQ_0(f)^{-1}(S)$, де $S \in EQ_0(K) = EQ(K)$ для скінченних K, $f : X \to K$ – неперервні, утворюють базу деякої гаусдорфової компактної нульвимірної топології на $EQ_0(X)$;*

(2) *оскільки для довільного неперервного відображення нульвимірних компактів і довільного їх розкладу в спектри зі скінченних компактів існує морфізм (не обов'язково точний, [1]) цих спектрів, який породжує це відображення, ця топологія збігається з топологією $\varprojlim EQ_0(S)$ для довільного спектра S зі скінченних компактів, в який розкладено X;*

(3) *EQ_0 (з описаною вище топологією) – епіморфний функтор в $Comp_0$, який зберігає точку, порожню множину, перетини, границі обернених спектрів і вагу нескінченних компактів. Оскільки образ $SR(Comp_0)$ лежить в $Comp_0$, вважаємо $SR\,|_{Comp_0}$ ендофунктором в $Comp_0$. Тоді $eX : SR(X) \to EQ_0(X)$ – компонента сюр'єктивного природного перетворення $e : SR\,|_{Comp_0} \to EQ_0$.*

ТЕОРЕМА 2. *Нехай X – нульвимірний компакт, $\mathcal{A}$ – напрямлена вгору множина, $\{E_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ – така індексована сім'я в $EQ_0(X)$, що $E_\alpha \prec E_{\alpha'} \iff E_\alpha \supset E_{\alpha'}$ при $\alpha \prec \alpha'$. Їй відповідає обернений спектр $S = \{X/E_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in \mathcal{A}\}$, де $\pi_\alpha^{\alpha'} : X/E_{\alpha'} \to X/E_\alpha$ – єдине відображення, яке замикає діаграму*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X/E_\alpha \\ {\scriptstyle \varphi_{\alpha'}} \downarrow & & \\ X/E_{\alpha'} & & \end{array}$$

Тоді $\varprojlim S$ збігається з X/E, де $E = \lim\limits_{\mathcal{A}} E_\alpha$ в $EQ_0(X)$ (границя береться за напрямленою множиною $\mathcal{A}$).

ТЕОРЕМА 3. *Нехай X – нульвимірний компакт, $\mathcal{A}$ – напрямлена вниз множина, $\{E_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ – така індексована сім'я в $EQ_0(X)$, що $E_\alpha \prec E_{\alpha'}$ при $\alpha \prec \alpha'$. Їй відповідає прямий спектр з епіморфними проекціями $S = \{X/E_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in \mathcal{A}\}$, де $\pi_\alpha^{\alpha'} : X/E_{\alpha'} \to X/E_\alpha$ – відображення, описане в Теоремі 2. Тоді $\varinjlim\mathrm{colim}\, S$ збігається з X/E, де $E = \lim\limits_{\mathcal{A}} E_\alpha$ в $EQ_0(X)$.*

ТЕОРЕМА 4. *$EQ_0(X)$ – компактна $\wedge$-напівгратка з неперервною операцією $\inf$, тобто $\wedge$-напівгратка Лоусона.*

Доведення спирається на розклад $EQ_0(X)$ в обернений спектр із скінченних компактів і неперервність функтора EQ_0.

Нехай $\{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \mathcal{A}\}$ – впорядкований спектр в $Comp$ або $Comp_0$ (тобто його індексна множина є впорядкованою), і найменшим і найбільшим елементом $\mathcal{A}$ є відповідно α_0 і α_1, всі проекції – епіморфізми, які не є гомеоморфізмами при $\alpha \neq \alpha'$. Позначимо $X_{\alpha_0} = X_0$, $X_{\alpha_1} = X_1$, $\pi_{\alpha_0}^{\alpha_1} = f : X_1 \to X_0$. Такі спектри при фіксованих X_0, X_1, f і змінній $\mathcal{A}$ з очевидним відношенням еквівалентності утворюють множину класів еквівалентності. Згідно леми Цорна кожен такий спектр є підспектром (у сенсі [3]) деякого спектра, максимального за включенням для даних X_0, X_1, f.

ТЕОРЕМА 5. *Впорядкований спектр $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \mathcal{A}\}$ в $Comp$ (або $Comp_0$) з епіморфними і негомеоморфними (крім тривіальних) проекціями є максимальним для даних X_0, X_1, f тоді і тільки тоді, коли:*

індексна множина має найменший і найбільший елементи α_0 і α_1 і для довільного перерізу $A = A_0 \sqcup A_1$, $\alpha \prec \alpha'$ для довільних $\alpha \in A_0$, $\alpha \in A_1$:

(1) *існують $\beta_0 = \sup A_0$, $\beta_1 = \inf A_1$;*

(2) *границя $\{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in A_0\}$, і коrраниця $\{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in A_1\}$, існують в Comp (або $Comp_0$) і збігаються з X_{β_0} і X_{β_1} відповідно (граничні проекції є проекціями початкового спектра);*

(3) *якщо $\beta_0 \neq \beta_1$, то проекція $\pi_{\beta_0}^{\beta_1}$ не може бути зображена як композиція двох епіморфізмів, які не є гомеоморфізмами.*

Зауваження. Для $Comp_0$ умови (1),(2) – це повнота індексуючої множини та неперервність в порядковій топології відповідного монотонного відображення $S : A \to EQ_0(X)$. Легко бачити, що епіморфізм (як в $Comp$, так і в $Comp_0$) не може бути зображений як композиція двох епіморфізмів, які не є гомеоморфізмами, тоді і тільки тоді, коли він "склеює певну пару точок простору в одну точку".

Зауважимо, що функтор □ зберігає максимальні у вказаному сенсі спектри. Звідси:

Наслідок. *Якщо максимальний в $Comp_0$ спектр індексовано зв'язною в порядковій топології множиною, то ця множина – одноелементна. Якщо ж зв'язною множиною індексовано максимальний спектр в Comp, то проекція, яка сполучає об'єкти з найбільшим та найменшим індексами, не "склеює" компоненти зв'язності.*

Подібний метод побудови топології може бути застосовано до простору $EQ(X)$ замкнених відношень еквівалентності на довільному компакті X (з очевидною заміною скінченних або двоточкових компактів на одиничний відрізок), але при цьому відповідні аналоги більшості доведених вище властивостей не виконуватимуться.

Список літератури

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. Barr M., Wells Ch. Toposes, triples and theories. N.Y. etc.: Springer, 1985.
3. Энгелькинг Р. Общая топология М.: Мир, 1986.

УДК 515.12

Є.Я. Пенцак

Стабільність многовидів, модельованих на деяких зліченних прямих границях абсолютних екстензорів

Властивість стабільності нескінченновимірних многовидів в одному зі своїх найпростіших варіантів означає, що існує гомеоморфізм $M \times X \cong M$ для многовида M, модельованого над простором X. Більшість теорій нескінченновимірних многовидів містять теорему стабільності (див., наприклад, [1, 2]): зокрема теореми стабільності справедливі для $\mathbb{R}^\infty$- та Q^∞-многовидів ($\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \mathbb{R}^n$, $Q^\infty = \varinjlim Q^n$.)

У праці автора ([3]; анонсовано у [4]) розвинено основи теорії многовидів, модельованих над зліченними прямими границями деяких сильно універсальних просторів ($X(C)$-многовидів, для деяких класів C). Для цього випадку, модельний простір $X(C)$, взагалі кажучи, не є гомеоморфний своєму квадратові; таку ситуацію зустрічаємо, наприклад, при $C = \mathcal{M}_1$ (клас повних сепарабельних метричних просторів), коли $X(C) = s^\infty = \varinjlim s^n$ (s означає псевдовнутрішність гільбертового куба Q). Отже, про стабільність $X(C)$ многовидів у розглянутому вище розумінні говорити не можна.

Для формулювання теореми стабільності нам треба ввести деякі допоміжні означення.

Означення. *Для $X, Y \in ANR$ відображення $f : X \to Y$ називається тонкою гомотопійною еквівалентністю, якщо для довільного відкритого покриття $\mathcal{U}$ простору Y існує таке відображення $g : Y \to X$, що $f \circ g$ є $f^{-1}(\mathcal{U})$-гомотопне до id_X.*

Означення. *Простір X називається сильно $CZ(CC)$-універсальним, якщо для довільних $A \in C$, замкненої в A підмножини B та такого відображення $f : A \to X$, що звуження $f|B : B \to X$ є Z- (замкнене) вкладення, відкритого покриття $\mathcal{U}$ простору X існує таке Z-(замкнене) вкладення $h : A \to X$, що $h|B = f|B$ і для довільного $x \in X$ $\{f(x), h(x)\} \subset U$ для деякого $U \in \mathcal{U}$.*

Через $X(C)$ ми будемо позначати простір, що задовольняє таким властивостям : 1) $X(C) \in AE(C)$; 2) $X(C) = \varinjlim X_i$, де $X_i \in C$; 3) X_i

---

є сильно CZ-універсальний ANR; 4) X_i є Z-множиною в X_{i+1} для довільного $i \in \mathbb{N}$.

На просторі $X(\mathcal{C}) \times X(\mathcal{C})$ розглянемо топологію τ з умови $(X(\mathcal{C}) \times X(\mathcal{C}), \tau) = \varinjlim(X_i \times X_i)$. Відомо [3], що для кожного $X(\mathcal{C})$-многовида M існує відкрите вкладення $f : M \to X(\mathcal{C})$. Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} pr_1^{-1}(f(M)) & \xrightarrow{h} & (X(\mathcal{C}) \times X(\mathcal{C}), \tau) \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ M & \xrightarrow{f} & X(\mathcal{C}) \end{array}$$

($f(M) \times X(\mathcal{C}) \doteq pr_1^{-1}(f(M))$ – природня рівність множин).

Означення. *Назвемо $X(\mathcal{C})$-многовид M $X(\mathcal{C})$-стабільним, якщо простори $pr_1^{-1}(f(M))$ та M гомеоморфні для деякого відкритого вкладення $f : M \to X(\mathcal{C})$.*

Теорема. *Кожен $X(\mathcal{C})$-многовид є $X(\mathcal{C})$-стабільним.*

Доведення. Оскільки $X(\mathcal{C}) \in AE(\mathcal{C})$, то $X(\mathcal{C})$ – стягуваний простір. Нехай $H : X(\mathcal{C}) \times [0,1] \to X(\mathcal{C})$ – така гомотопія, що $H(x,0) = x$ і $H(x,1) = x_0 \in X(\mathcal{C})$ (x_0 – деяка відмічена точка у $X(\mathcal{C})$). Зауважимо, що відображення $pr_1 : pr_1^{-1}(f(M)) \to f(M)$ є тонкою гомотопійною еквівалентністю. Справді, нехай відображення $i : f(M) \to (f(M) \times X(\mathcal{C}), \tau)$ задається формулою $i(x) = (x, x_0)$, тоді $pr_1 \circ i = id_{f(M)}$ і для довільного відкритого покриття $\mathcal{U}$ простору $f(M)$ тотожне відображення простору $f(M) \times X(\mathcal{C})$ є $pr_1^{-1}(\mathcal{U})$-гомотопним до відображення $i \circ pr_1$ (їх гомотопія G задається формулою $G = id \times H$).

За класифікаційною теоремою [3], простори $f(M)$ та $f(M) \times X(\mathcal{C})$ гомеоморфні.

Список літератури

1. Heisey R.E. Manifolds modelled on the direct limit of Hilbert cubes // Geometric Topology. New York, 1979. P. 609-619.
2. Sakai K. On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds // Topology Appl. 1984. Vol.18.P.69-79.
3. Pentsak E. On manifolds modeled on direct limits of C-universal ANR's //Preprint.
4. Pentsak E. On manifolds modeled on direct limits of ANR's // Міжнародна матем. конф. пам'яті Г.Гана. Тези доповідей. Чернівці, 1994. С.118.

УДК 512.64

В.М.Петричкович

ПРО РОЗКЛАДНІСТЬ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ У ДОБУТОК УНІТАЛЬНИХ МНОЖНИКІВ

Нехай $\mathbf{P}$ - поле, $\mathbf{P}_n$ і $\mathbf{P}_n[x]$ - кільця $n \times n$ - матриць відповідно над $\mathbf{P}$ і $\mathbf{P}[x]$. Через $d_k^A(x)$ будемо позначати найбільший спільний дільник мінорів k - го порядку, $\mu_k^A(x)$ - k-ий інваріантний множник, $D^A(x)$ - канонічну діагональну форму (к.д.ф.) матриці $A(x) \in \mathbf{P}_n[x]$, тобто

$$D^A(x) = diag(\mu_1^A(x), \ \ldots, \ \mu_n^A(x)), \ \mu_i^A | \mu_{i+1}^A, \ i = 1, \ldots, n,$$

$U(x), V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$. Нагадаємо, що матричний многочлен (многочленна матриця)

$$A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i, \ A_i \in \mathbf{P}_n, \ i = 0, 1, \ldots, m,$$

називається ругулярним (регулярною), якщо A_m - неособлива та унітальним (унітальною), якщо $A_m = I$ - одинична матриця.

Задача про розкладність матричного многочлена $A(x)$ на множники, тобто зображення його у вигляді добутку

$$A(x) = B_1(x) \ \ldots \ B_q(x), \tag{1}$$

унітальних множників $B_i(x)$, $i = 1, \ \ldots, \ q$, розв'язана з окремих випадках. Так, у випадку $\mathbf{P} = \mathbf{C}$ встановлено критерій зображення $A(x)$ у вигляді (1) у роботі [1], коли $(det B_i(x), \ det B_j(x)) = 1$, у [2], коли $((det B_i(x), \ det B_j(x)), \ d_{n-1}^A(x)) = 1$, $i, j = 1, \ \ldots, \ q$, $i \neq j$, і у [3], коли $\prod_{i=1}^{q} D^{B_i}(x) = D^A(x)$. Виділені також окремі класи матричних многочленів, які розкладаються на лінійні унітальні множники: простої структури [4,5]; кратності характеристичних коренів яких не більші двох [6].

В цій статті наведені умови розкладності матричних многочленів у добуток довільного числа унітальних множників, якими охоплюються ширші від вищенаведених типи розкладів. При цьому розглянуто подільність добутку матриць на матрицю та запропоновано досить простий спосіб регуляризації матричних многочленів.

1. Про подільність добутку матриць

Нехай $B(x), C(x), H(x) \in \mathbf{P}_n[x]$ неособливі матриці. Нехай, далі, $H(x)$ є лівим дільником добутку матриць $B(x)$ і $C(x)$, тобто

$$B(x)C(x) = H(x)F(x). \tag{2}$$

Виникає запитання, за яких умов $H(x)$ є лівим дільником матриці $B(x)$, тобто $B(x) = H(x)K(x)$ – ?

Необхідною умовою для цього є те, що $D^H(x) | D^B(x)$ [7]. Нехай, далі, для матриць $A(x) = B(x)C(x)$, $B(x)$ і $H(x)$ існують такі матриці $U \in GL_n(\mathbf{P})$ і $V_A(x), V_B(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$, що

$$T^A(x) = UA(x)V_A(x) = triang_S(\mu_1^A(x), \ldots, \mu_n^A(x)) =$$

$$= \begin{Vmatrix} \mu_1^A(x) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(x) & \mu_2^A(x) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & \mu_n^A(x) \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

де $deg\, a_{ij} < deg\, \mu_i^A$, якщо $deg\, \mu_i^A > 0$ і $a_{ij}(x) \equiv 0$, якщо $deg\, \mu_i^A = 0$, $i, j = 1, \ldots, i > j$ [8], і

$$T^B(x) = UB(x)V_B(x) = triang_s(\mu_1^B(x), \ldots, \mu_n^B(x)),$$

$$T^H(x) = UH(x)V_H(x) = triang_s(\mu_1^H(x), \ldots, \mu_n^H(x)) \tag{4}$$

такого ж трикутного вигляду (3). Тоді із рівності (2) одержуємо

$$UA(x)V_A(x) = UB(x)V_B(x)V_B^{-1}(x)C(x)V_A(x) = UH(x)V_H(x)V_H^{-1}(x)F(x)V_A(x),$$

або

$$T^A(x) = T^B(x)C_1(x) = T^H(x)F_1(x), \tag{5}$$

де

$$C_1(x) = V_B^{-1}(x)C(x)V_A(x) = triang(\phi_1(x),\ \ldots,\ \phi_n(x)),$$

$$F_1(x) = V_H^{-1}(x)F(x)V_A(x) = triang(\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$$

нижні трикутні матриці відповідно з елементами $\phi_i(x)$ і $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ на головних діагоналях.

Лема 1. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^B(x)$. Якщо матриця $C_1(x)$ із співвідношення (5) еквівалентна матриці $\Phi(x) = diag(\phi_1(x), \ldots$ $\ldots, \phi_n(x))$ і

$$\left(\frac{\mu_n^H(x)}{\mu_i^H(x)},\ \phi_i(x)\right) = 1,\ i = 1, \ldots, n-1, \tag{6}$$

то $H(x)|B(x)$.

Доведення. Із результатів [9] випливає, що для $C_1(x)$ існують нижні унітрикутні матриці $S(x)$ і $W(x)$ такі, що $S(x)C_1(x)W(x) = \Phi(x)$. Тому із (5) одержуємо

$$T^B(x)S^{-1}(x)S(x)C_1(x)W(x) = T^H(x)F_1(x)W(x), \tag{7}$$

або

$$T_1^B(x)\Phi(x) = T^H(x)F_2(x), \tag{8}$$

де $F_2(x) = F_1(x)W(x) = triang(\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))$. Із співвідношення (8), за умови (6), неважко одержати, що $\Phi(x)$ є правим дільником $F_2(x)$, тобто $F_2(x) = F_3(x)\Phi(x)$. Тому із (8) маємо

$$T_1^B(x) = T^H(x)F_3(x). \tag{9}$$

Враховуючи співвідношення (3), (4) і (7) між матрицями $T_1^B(x)$ і $B(x)$, $T^H(x)$ і $H(x)$ із (9) одержимо, що $H(x)|B(x)$, тобто $B(x) = H(x)G(x)$. Лема доведена.

Наслідок 1. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^Bx)$. Якщо виконується принаймні одна із двох умов

а) $D^B(x)D^C(x) = D^{BC}(x)$,

б) $\left(\dfrac{\mu_n^B(x)}{\mu_i^B(x)}, \psi_i(x)\right) = 1, \; i = 1, \dots, n-1$

і $\left(\dfrac{\mu_n^H(x)}{\mu_i^H(x)}, \psi_i(x)\right) = 1, \; i = 1, \dots, n-1$, то $H(x) | B(x)$.

Лема 2. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^B(x)$. Якщо

$$\left(\frac{\mu_i^B(x)}{\mu_j^B(x)}, (\psi_i(x), \psi_j(x))\right) = 1, \; i,j = 1, \dots, n, \; i > j$$

і

$$\left(\frac{\mu_n^H(x)}{\mu_i^H(x)}, \psi_i(x)\right) = 1, \; i = 1, \dots, n-1,$$

то $H(x)|B(x)$.

Доведення цієї леми випливає з леми 1 і теореми 1 із [13].

Наслідок 2. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$. Якщо виконується хоч би одна із умов

1. $(\det B(x), \det C(x)) = 1$,
2. $(\det H(x), \det C(x)) = 1$,
3. $((\det B(x), \det C(x)), d_{n-1}^{BC}(x)) = 1$,
4. $((\det H(x), \det C(x)), d_{n-1}^{BC}(x)) = 1$,

то $H(x)|B(x)$.

Доведення. Із того, що $H(x)|B(x)C(x)$ за умов 1,2 випливає, що $D^H(x)|D^B(x)$, а за умов 3,4 – $\mu_i^H|\mu_i^B$ для всіх $i=1, \dots, n-1$, а далі застосовуємо наслідок 1.

Лема 3. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^B(x)$. Якщо $F_1(x)$ із співвідношення (5) еквівалентна матриці $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ і $D^B(x)D^C(x) = D^{BC}(x)$, то $H(x)|B(x)$.

Доведення цієї леми аналогічне доведенню леми 1.

Наслідок 3. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^B(x)$. Якщо

$$\left(\frac{\mu_n^B(x)}{\mu_i^B(x)},\ \varphi_i(x)\right) = 1,\quad i = 1, \ldots, n-1$$

і $F_1(x)$ еквівалентна $\Phi(x)$, то $H(x) \mid B(x)$.

2. Регуляризація матричних многочленів

Будемо говорити, що матричний многочлен $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$, $A_i \in \mathbf{P}_n$, $i = 0, 1, \ldots, m$ регуляризується справа, якщо існує матриця $V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$ така, що $A(x)V(x) = \sum_{i=0}^{s} B_i x^i$ – регулярний, зокрема унітальний матричний многочлен. Відомі різні способи регуляризації матричних многочленів залежно від їхнього вигляду [10, 8] та основного поля [13, 11, 12]. Вкажемо досить простий спосіб регуляризації матричних многочленів, який використовуватиметься у наступних параграфах.

Матриця $A(x) \in \mathbf{P}_n[x]$, $\det A(x) \neq 0$ у випадку нескінченного поля $\mathbf{P}$ півскалярними еквівалентними перетвореннями зводиться до спеціального трикутного вигляду $T(x)$ (3). Якщо ж $\mathbf{P}$ – скінченне, то у роботі [8] наведені умови, за яких таке зведення матриці $A(x)$ можливе. Очевидно, якщо трикутна форма $T^A(x) = UA(x)V(x)$, $U \in GL_n[\mathbf{P}]$, $V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$, регуляризується справа, то і $A(x)$ регуляризується і навпаки.

Нехай $T(x) = triang_s(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$ – нижня трикутна матриця вигляду (3), $\deg \mu_i = m_i$, $i = 1, \ldots, n$. Оскільки $\mu_i \mid \mu_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, то $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$. Запишемо $T(x)$ у вигляді матричного многочлена $T(x) = T_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} T_j x^j$, при цьому покладаємо $m_0 = 0$. Зауважимо, що деякі суми можуть дорівнювати нулю, то-

ОТО при $m_k = m_{k-1}$ $\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} T_j x^j = 0$. Тепер неважко бачити, що у кожній матриці $T_{m_k+1}, T_{m_k+2}, \ldots, T_{m_{k+1}}$, $k = 1, \ldots, n-1$ перші k рядки є нульовими. Надалі через $T_r^{(n-k)}$ позначатимемо $(n-k)\times n$-матрицю, одержану із матриці T_r, викресленням II k перших рядків.

Нехай $\sum_{i=1}^{n} m_i = sn$. Запишемо матрицю M_T, яка відповідає многочлену $T(x)$:

$$M_T = \| G_n \quad G_{n-1} \quad \ldots \quad G_1 \quad G_0 \|^{t_B},$$

де t_B – символ блочного транспонування і

$$G_0 = \| T_0 \quad T_1 \quad \ldots \quad T_s \|,$$

$$G_k = \begin{Vmatrix} T_{m_k}^{(n-(k-1))} & T_{m_k+1}^{(n-(k-1))} & \ldots & T_{m_k+s}^{(n-(k-1))} \\ T_{m_k-1}^{(n-(k-1))} & T_{m_k}^{(n-(k-1))} & \ldots & T_{m_k+(s-1)}^{(n-(k-1))} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{m_{k-1}+1}^{(n-(k-1))} & T_{m_{k-1}+2}^{(n-(k-1))} & \ldots & T_{m_{k-1}+(s+1)}^{(n-(k-1))} \end{Vmatrix},$$

$k = 1, \ldots, n$. При цьому покладаємо $m_0 = 0$ і при $m_j + l > m_n$ $T_{m_j+i}^{(n-l)} = 0$ – нульова матриця розмірів $(n-l)\times n$. При $m_k = 0$ G_k – порожня матриця, тобто матриця розміру $0\times n$. Матриця G_k розмірів $(m_k-m_{k-1})(n-(k-1))\times(s+1)n$, M_T – квадратна матриця порядку $(s+1)n$.

<u>Лема 4.</u> Матричний многочлен $T(x) = triang_s(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$ трикутного вигляду (3) регуляризується справа тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^{n} deg\,\mu_i = ns$ і відповідна йому матриця M_T неособлива.

<u>Доведення</u> випливає із леми 1 з роботи [8], оскільки матрицю M_T одержують із матриці

$$\tilde{M}_T = \left\| \begin{array}{cccc} T_{m_n} & 0 & \dots & 0 \\ T_{m_n-1} & T_{m_n} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{m_n-s} & T_{m_n-(s-1)} & \dots & T_{m_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_0 & T_1 & \dots & T_s \end{array} \right\|,$$

побудованої як і M_F у роботі [8], викресленням відповідних нульових рядків.

Лема 5. Нехай відповідна матричному многочлену $T(x)$ вигляду (3) матриця M_T неособлива і $M_T^{-1} = \|M_{ij}\|$, $i,j = 0,1, \dots, s$, $M_{ij} \in P_n$ її обернена матриця, записана в блочному вигляді. Тоді коефіцієнти унітального матричного многочлена

$$L(x) = T(x)V(x) = Ix^s + L_{s-1}x^{s-1} + \dots + L_1 x + L_0, \qquad (10)$$

$V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$, до якого $T(x)$ регуляризується справа, обчислюються за формулою

$$L_k = \sum_{i=0}^{k} T_i M_{(s-k)+i,s}, \quad k = 0,1, \dots, s-1. \qquad (11)$$

Доведення. На основі леми 4 існує матриця $V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$ така, що має місце співвідношення (10), причому $\deg V \le s$, тобто $V(x) = \sum_{i=0}^{s} V_i x^i$. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності (10), неважко бачити, що V_i, $i = 0,1, \dots, s$ задовольняють рівняння

$$\tilde{M}_T \|V_s \;\; V_{s-1} \;\; \dots \;\; V_1 \;\; V_0\|^{t_*} = \|0 \;\; \dots \;\; 0 \;\; I\|^{t_*},$$

яке еквівалентне рівнянню

$$M_T\|V_s \;\; V_{s-1} \;\; \dots \;\; V_1 \;\; V_0\|^{t_*} = \|0 \;\; \dots \;\; 0 \;\; I\|^{t_*}.$$

Звідси одержуємо, що

$$\|V_s \;\; V_{s-1} \;\; \dots \;\; V_1 \;\; V_0\|^{t_*} = \|M_{0s} \;\; M_{1s} \;\; \dots \;\; M_{s-1,s} \;\; M_{ss}\|^{t_*},$$

де $\|M_{0s}\ \ M_{1s}\ \ \ldots\ \ M_{s-1,s}\ \ M_{ss}\|^{t}$ – останній блочний стовпець матриці $M_T^{-1} = \|M_{ij}\|$, $i, j = 0, 1, \ldots, s$, $M_{ij} \in P_n$. Тепер формули (11) випливають зі співвідношення (10). Лема доведена.

3. Розклад матричних многочленів у добуток унітальних множників.

Нехай матричний многочлен $A(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} A_i x^i$, $A_i \in P_n$ зображений у вигляді добутку

$$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x). \tag{12}$$

Позначимо $C_p(x) = \prod\limits_{i=1}^{p} B_i(x)$, $F_{q-p}(x) = \prod\limits_{i=1}^{q-p} B_{p+i}(x)$, $p = 1, \ldots, q-1$. Тоді із (12) можна записати

$$A(x) = C_p(x) F_{q-p}(x), \quad p = 1, \ldots, q-1.$$

Тому к.д.ф. $D^{C_p}(x)$ матриці $C_p(x)$ ділить к.д.ф. $D^A(x)$ матриці $A(x)$ для всіх $p = 1, \ldots, q-1$. Отже, розкладові (12) матричного многочлена $A(x)$ відповідає розклад $D^A(x) = \prod\limits_{i=1}^{q} \Phi_i(x)$ його к.д.ф. $D^A(x)$ такий, що кожна матриця

$$\Psi_p(x) = \prod_{i=1}^{p} \Phi_i(x) = diag(\psi_{p1}(x), \ldots, \psi_{pn}(x)), \quad p = 1, \ldots, q-1$$

є d - матрицею, тобто $\psi_{pi} | \psi_{p,i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Нехай тепер к.д.ф. $D^A(x) = diag(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$ матричного многочлена $A(x)$, $det A(x) \neq 0$ зображена у вигляді добутку

$$D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} \Phi_i(x), \tag{13}$$

де $\Phi_i(x) = diag(\varphi_{i1}(x), \ldots, \varphi_{in}(x))$, причому $deg\, det\Phi_i = s_i n$, $i = 1, \ldots, q-1$ і кожна матриця

$$\Psi_p(x) = \prod_{i=1}^{p} \Phi_i(x) = diag(\psi_{p1}(x), \ldots, \psi_{pn}(x)), \quad p = 1, \ldots, q-1$$

є d - матрицею. Через $\Lambda_{q-p}(x)$ позначимо діагональну матрицю

$$\Lambda_{q-p}(x) = \prod_{i=1}^{q-p} \Phi_{p+i}(x) = diag(\lambda_{q-p,1}(x), \ldots, \lambda_{q-p,n}(x)), \quad p = 1, \ldots, q-1,$$

а через $K_p(x)$, аналогічно, як у [14] матрицю

$$K_p(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \dfrac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} k_{21}(x) & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\mu_n(x)}{\mu_1(x)} k_{n1}(x) & \dfrac{\mu_n(x)}{\mu_2(x)} k_{n2}(x) & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $k_{ij}(x) = k_{ij}^{(0)} + k_{ij}^{(1)} x + \ldots + k_{ij}^{(r_{ij})} x^{r_{ij}}$, причому $k_{ij}(x) \equiv 0$, якщо $\psi_{pi} | \psi_{pj}$, 1 $r_{ij} = deg\, \psi_{pi} - deg\, \psi_{pj} - 1$, якщо $\psi_{pj} \nmid \psi_{pi}$, $i > j$, $k_{ij}^{(r_{ij})}$ - незалежні змінні, тобто $K_p(x)$ - матриця над кільцем $\mathbf{P}(k)[x]$, де $\mathbf{P}(k)$ - розширення поля $\mathbf{P}$, одержане приєднанням $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$ до поля $\mathbf{P}$.

Нехай, далі,

$$T^A(x) = UA(x)V(x) = triang_s(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)),$$

$U \in GL_n(\mathbf{P})$, $V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$ трикутна форма (3) матричного многочлена $A(x)$, яку запишемо так

$$T^A(x) = H(x) diag(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)), \tag{14}$$

$H(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$. Тепер розглянемо добуток матриць $H(x)K_p(x)\Phi_p(x)$. Правими елементарними перетвореннями зведемо цю матрицю до вигляду (3), тобто для деякої матриці $S(x) \in GL_n(\mathbf{P}(k)[x])$

$$T_p(x) = H(x)K(x)\Phi_p(x)S(x) = triang_s(\psi_{p1}, \ldots, \psi_{pn}(x)).$$

__Теорема.__ Нехай к.д.ф. $D^A(x)$ матричного многочлена $A(x)$, $det A(x) \neq 0$ зображена у вигляді добутку (13) і

$$\left(\lambda_{q-p,i}(x), \frac{\psi_{p-1,n}(x)}{\psi_{p-1,i}(x)} \right) = 1, \tag{15}$$

або

$$(\lambda_{q-p,1}(x), \frac{\varphi_{pn}(x)}{\varphi_{pl}(x)}) = 1 \qquad (16)$$

$l = 1, \ldots, n-1$, $p = 2, \ldots, q-1$. Тоді матричний многочлен $A(x)$ зображається у вигляді добутку

$$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x), \qquad (17)$$

де $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, q-1$ унітальні многочлени степенів s_i і $C_p(x) = \prod_{i=1}^{p} B_i(x)$ еквівалентна $\Phi_p(x)$ і $F_{q-p}(x) = \prod_{i=1}^{q-p} B_{p+i}(x)$ еквівалентна $\Lambda_{q-p}(x)$, $p = 1, \ldots, q-1$, у тому і тільки у тому випадку, коли кожний матричний многочлен $T_p(x)$, $p = 1, \ldots, q-1$ регуляризується справа над кільцем $P(k)[x]$, тобто відповідні їм матриці M_{T_p}, $p = 1, \ldots, q-1$ неособливі.

Доведення теореми проводимо за індукцією.

При $q = 2$ теорема випливає із теореми 2 з роботи [15] та леми 4. Припустимо її справедливість для $q-1$ і доведемо теорему для q.

Нехай матриці $T_{q-2}(x)$ і $T_{q-1}(x)$ регуляризуються справа. Це означає, що $A(x) = C_{q-2}(x)F_2(x)$, і $A(x) = C_{q-1}(x)F_1(x)$, де $C_{q-2}(x)$ і $C_{q-1}(x)$ - унітальні многочлени і, очевидно, $D^{C_{q-2}} | D^{C_{q-1}}$. Тоді на основі леми 1 або наслідку 3, залежно від виконання умов (15) або (16) теореми, матимемо, що $C_{q-1}(x) = C_{q-2}(x)B_{q-1}(x)$. Згідно з припущенням індукції $C_{q-2}(x) = B_1(x), \ldots, B_{q-2}(x)$, тобто $A(x) = B_1(x) \ldots B_{q-1}(x)F_1(x)$, $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, q-1$ - унітальні многочлени. Теорема доведена.

Зауважимо, що унітальні множники розкладу (17) матричного многочлена $A(x)$ можна знайти на основі формул (11), при цьому змінним $k_{ij}^{(r_i)}$ надаючи допустимих значень, одержуватимемо розклади вигляду (17) на унітальні множники матричного многочлена $A(x)$.

Наслідок 4. Якщо в умовах сформульованої теореми

$$((\varphi_{pi}(x),\ \varphi_{pj}(x)),\ \frac{\psi_{p-1,i}(x)}{\psi_{p-1,j}(x)}) = 1,\ i,j = 1,\ \ldots,\ n,\ i > j$$

для всіх $p = 2, \ldots, q-1$, то розклад (17) матричного многочлена $A(x)$ паралельний розкладові (13) його к.д.ф. $D^A(x)$, тобто такий, що матриці $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, q$ еквівалентні $\Phi_i(x)$.

Наслідок 5. Нехай елементарні дільники матричного многочлена $A(x)$ прості. Тоді $A(x)$ зображається у вигляді добутку (17), відповідно розкладові (13) його к.д.ф. $D^A(x)$, у тому і тільки у тому випадку, коли кожний многочлен $T_p(x)$, $p = 1, \ldots, q-1$ регуляризується справа над кільцем $\mathbf{P}(k)[x]$, при цьому розклад (17) матричного многочлена $A(x)$ паралельний розкладові (13) його к.д.ф. $D^A(x)$.

Тепер розглянемо матрицю $H(x)\Phi_p(x)$, де $H(x)$ із співвідношення (14). Правими елементарними перетвореннями зведемо її до трикутного вигляду (3), тобто

$$\tilde{T}_p(x) = H(x)\Phi(x)S(x) = triang_s(\psi_{p1}(x),\ \ldots,\ \psi_{pn}(x)),$$

$S(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$.

Наслідок 6. Нехай к.д.ф. $D^A(x)$ матричного многочлена $A(x)$ зображається у вигляді добутку

$D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} \Phi_i(x)$, де $\Phi_i(x) = diag(\varphi_{i1}(x), \ldots, \varphi_{in}(x))$, $\varphi_{ij} | \varphi_{i,j+1}$, $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, n-1$ і $deg\ det\Phi_i = s_i n$. Тоді $A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x)$, де $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, q-1$ – унітальні многочлени степенів s_i і $D^{B_i}(x) = \Phi_i(x)$, $i = 1, .., q$ у тому і тільки у тому випадку, коли кожний матричний многочлен $T_p(x)$, $p = 1, \ldots, q-1$ регуляризується справа, тобто відповідні їм матриці $M_{\tilde{T}_p}$ неособливі.

Доведення випливає із теореми, враховуючи, що у цьому випадку $K_p(x) = I$ – одинична матриця для всіх $p = 1, \ldots, q-1$.

Зауважимо, якщо $A(x)$ унітальний матричний многочлен, то можна сформулювати аналогічні умови його розкладності у добуток

$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x)$, де всі множники $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, q$ – унітальні, зокрема лінійні унітальні многочлени.

Список літератури

1. Казімірський П.С. Про розклад поліноміальної матриці на лінійні множники // Вестн. Львов. политехн. ин-та. 1965. № 8. С. 53 - 60.

2. Казімірський П.С. Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники // Укр. мат. журнал. 1977. Т. 5. № 5. С. 653 - 658.

3. Зелиско В.Р. О разложении матричного многочлена в произведение линейных множителей // Укр. мат. журнал. 1980. Т. 32. № 6. С. 807 - 810.

4. Казимирский П.С. Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теор. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. Киев, 1976. С. 29 - 40.

5. Маркус А.С., Мереуца И.В. О некоторых свойствах простых λ-матриц // Мат. исследования. 1975. Т. 10. № 3 С. 207 - 214.

6. Казимирский П.С., Петричкович В.М. Разложимость полиномиальной матрицы на линейные множители // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1978. Вып. 8. С. 3 - 9.

7. Ingraham M.N. Rational metods in matrix equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1941. vol. 47. P. 61 - 70.

8. Петричкович В.М. Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42. № 5. С. 644 - 649.

9. Feinberg R.B. Equivalence of partitioned matrices // J. Res.

Bur. Stand. Sect. 1976. vol. 80, N 1. P. 89 - 97.

10. Bell J.H. Left assotiates of monic matrices with an application to unilateral matrices equations // Amer. Jorn. Math. 1949. vol. 71. P. 249 - 257.

11. Петричкович В.М., Прокип В.М. О факторизации многочленных матриц над произвольным полем // Укр. мат. журнал. 1986.Т. 38. № 4. С. 478 - 483.

12. Прокип В.М. О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42. № 9. С. 1213 - 1219.

13. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К. 1981. 224 с.

14. Зелиско В.Р. О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1980. Вып. 12. С. 14 - 21.

15. Петричкович В.М. Паралельні факторизації многочленних матриць // Укр. мат. журнал. 1992. Т. 44. № 9. С. 1228 - 1233.

УДК 512.64

В.М. Прокіп

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ДІЛЬНИКІВ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

В статті досліджуються властивості дільників многочленних матриць над полем P. Запропоновано застосування здобутих результатів до розв'язування матричних многочленних рівнянь.

1. Нехай P – довільне поле, P[x] кільце многочленів над P, $P_{m,n}$, $P_{m,n}[x]$ – множини $m\times n$-матриць над P і P[x] відповідно. Нехай, далі, многочленні матриці $D_1(x)$, $D_2(x) \in P_{m,m}[x]$ – ліві дільники многочленної матриці $A(x)$, тобто

$$A(x) = D_1(x)F_1(x), \; A(x) = D_2(x)F_2(x).$$

Яким умовам повинні задовольняти матриці $D_1(x)$ і $D_2(x)$, щоб матриця $A(x)$ ділилась зліва на матрицю $D(x) = D_1(x)D_2(x)$ (або на матрицю $D(x) = D_2(x)D_1(x)$) ?

Часткову відповідь на це питання дає теорема 1.

Теорема 1. Нехай многочленна матриця $A(x)$ допускає зображення $A(x) = D_1(x)\, F_1(x) = D_2(x)F_2(x)$, причому $D_i(x) \in P_{m,m}[x]$, $i = 1, 2;$ – неособливі матриці. Якщо $(\det D_1(x), \det D_2(x)) = 1$ і $D_1(x)D_2(x) = D_2(x)D_1(x)$, тоді матриця $D(x) = D_1(x)D_2(x)$ – лівий дільник матриці $A(x)$, тобто $A(x) = D_1(x)D_2(x)F(x)$.

Доведення. Нехай неособливі многочленні матриці $D_1(x)$ і $D_2(x)$ – ліві дільники многочленної матриці $A(x)$:
$A(x) = D_1(x)F_1(x)$, $A(x) = D_2(x)F_2(x)$, ($\det D_1(x) = d_1(x)$, $\det D_2(x) = d_2(x)$). Позначимо через $D_1^*(x)$ і $D_2^*(x)$ – взаємні матриці до матриць $D_1(x)$ і $D_2(x)$ відповідно. Помножимо тепер першу рівність зліва на $D_1^*(x)$, а другу зліва на $D_2^*(x)$ здобуваємо

$$D_1^*(x)A(x) = d_1(x)F_1(x), \qquad D_2^*(x)A(x) = d_2(x)F_2(x).$$

Тепер здобуті рівності домножимо зліва першу на $D_2^*(x)$, а другу на $D_1^*(x)$:

$$D_2^*(x)D_1^*(x)A(x) = d_1(x)D_2^*(x)F_1(x), \qquad (1)$$

$$D_1^*(x)D_2^*(x)A(x) = d_2(x)D_1^*(x)F_2(x). \qquad (2)$$

Оскільки $D_1(x)D_2(x) = D_2(x)D_1(x)$, то неважко переконатись у тому, що $D_1^*(x)D_2^*(x) = D_2^*(x)D_1^*(x)$. На основі цього зауваження отримуємо, що праві частини рівностей (1) і (2) рівні, тобто

$$d_1(x)D_2^*(x)F_1(x) = d_2(x)D_1^*(x)F_2(x). \qquad (3)$$

Оскільки $(\det D_1(x), \det D_2(x)) = 1$, то з (3) випливає, що усі елементи матриці $D_1^*(x)F_2(x)$ діляться на $d_1(x)$, а всі елементи матриці $D_2^*(x)F_1(x)$ діляться на $d_2(x)$, тобто

$$D_1^*(x)F_2(x) = d_1(x)G_2(x), \qquad D_2^*(x)F_1(x) = d_2(x)G_1(x).$$

Врахувавши (3) та останні дві рівності маємо

$$d_1(x)d_2(x)G_1(x) = d_1(x)D_2^*(x)F_1(x),$$

$$d_1(x)d_2(x)G_2(x) = d_2(x)D_1^*(x)F_2(x).$$

Приймаючи до уваги (3) та останні дві рівності легко бачити, що $G_1(x) = G_2(x)$. Тепер (1) запишемо так

$$D_2^*(x)D_1^*(x)A(x) = d_1(x)D_2^*(x)F_1(x) = d_1(x)d_2(x)G_1(x),$$

або

$$D_2^*(x)D_1^*(x)A(x) = d_1(x)d_2(x)G_1(x) = D_2^*(x)D_1^*(x)D_1(x)D_2(x)G_1(x).$$

Звідси випливає, що $A(x) = D_1(x)D_2(x)F(x)$, тобто матриця $D(x) = D_1(x)D_2(x)$ – лівий дільник матриці $A(x)$. Очевидно також, що і матриця $D(x) = D_2(x)D_1(x)$ є лівим дільником матриці $A(x)$, тобто

$A(x) = D_2(x)D_1(x)F(x)$. Теорема доведена.

Відзначимо, що цілком аналогічно доводиться наступна

Теорема 2. Нехай многочленна матриця $A(x)$ допускає зображення $A(x) = D_i(x)F_i(x)$, де $D_i(x) \in P_{m,m}[x]$, $i = 1, 2, \ldots, k$; - неособливі многочленні матриці. Якщо $(\det D_i(x), \det D_j(x)) = 1$ і $D_i(x)D_j(x) = D_j(x)D_i(x)$, для всіх $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$; то матриця $D(x) = D_1(x)D_2(x)\ldots D(x)_k$ - лівий дільник матриці $A(x)$, тобто $A(x) = D_1(x)D_2(x)\ldots D(x)_k F(x)$.

Зауважимо, що теорема 1 узагальнює добре відомий результат для многочленів над полем P (див. [1]): Нехай многочлен $a(x) \in P[x]$ ділиться на многочлени $d_1(x)$ і $d_2(x)$. Якщо $(d_1(x), d_2(x)) = 1$, тоді $a(x)$ ділиться і на їх добуток.

2. Нехай R, C - поля дійсних і комплексних чисел, $R[x]$ і $C[x]$ - кільця многочленів над R і C відповідно. Надалі через $R_{m,n}$ і $C_{m,n}$ та $R_{m,n}[x]$ і $C_{m,n}[x]$ позначатимемо множини $m\times n$-матриць над R і C та $R[x]$ і $C[x]$ відповідно. Нехай $A \in C_{m,n}$. Через $\bar{A}$ позначатимемомо $m\times n$ матрицю з комплексно спряженими елементами (див. [2], с. 18). Розглянемо многочленну матрицю $A(x) \in C_{m,n}[x]$, яку запишемо у вигляді

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad A_i \in C_{m,n}, \; i = 0, 1, \ldots, s.$$

Через $\bar{A}(x)$ позначимо комплексно спряжену многочленну матрицю:

$$\bar{A}(x) = \bar{A}_0x^s + \bar{A}_1x^{s-1} + \ldots + \bar{A}_s, \quad \bar{A}_i \in C_{m,n}, \; i = 0, 1, \ldots, s.$$

В цій частині роботи встановається звязок між дільниками матриць $A(x)$ і $\bar{A}(x)$.

Неважко переконатись у справедливості наступного твердження.

Твердження . Якщо матричне рівняння $XA = B$ ($A \in C_{m,n}$, $B \in C_{k,n}$, X - невідома $k\times m$ матриця) розв'язне і матриця $X_0 = D$

розв'язок цього рівняння, то матриця $\bar{D}$ (з комплексно спряженими елементами) розв'язок комплексно спряженого рівняння $X\bar{A} = \bar{B}$.

Наслідок 1. Якщо матриця $D \in C_{k,m}$ розв'язок матричного рівняння $XA = B$ ($A \in R_{m,n}$, $B \in R_{k,n}$, X – невідома $k\times m$ матриця), то матриця $\bar{D}$ також розв'язок цього ж рівняння.

Тепер приступимо до встановлення зв'язків між дільниками многочленних матриць $A(x)$ і $\bar{A}(x)$.

Теорема 3. Нехай многочленна матриця $D(x) \in C_{m,n}[x]$ – лівий дільник многочленної матриці $A(x) \in C_{m,k}[x]$, тобто $A(x) = D(x)F(x)$. Тоді матриця $\bar{D}(x) \in C_{m,n}[x]$ – лівий дільник многочленної матриці $\bar{A}(x)$, тобто $\bar{A}(x) = \bar{D}(x)\bar{F}(x)$.

Доведення. Матриці $A(x)$, $D(x)$ та $F(x)$ запишемо у вигляді:

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad A_i \in C_{m,k}, \quad i = 0,1, \ldots, s;$$

$$D(x) = D_0x^r + D_1x^{r-1} + \ldots + D_r, \quad D_j \in C_{m,n}, \quad j = 0,1, \ldots, r;$$

$$F(x) = F_0x^t + F_1x^{t-1} + \ldots + F_t, \quad F_l \in C_{n,k}, \quad l = 0,1, \ldots, s.$$

Враховуючи тепер доведення твердження 1 роботи [3] співвідношення $A(x) = D(x)F(x)$ рівносильне рівності

$$\left\| D_0\ D_1 \ldots D_r \right\| \left\| \begin{array}{cccccc} F_0 & F_1 & \ldots & F_t & & \\ & F_0 & F_1 & \ldots & F_t & \\ \ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots \\ & & & F_0 & F_1\ \ldots & F_t \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| 0 \ \ldots \ 0 \ A_0 \ A_1 \ldots \ A_s \right\|$$

(0 – нульова $m\times k$ матриця). Оскільки $D_j \in C_{m,n}$, $j = 0,1, \ldots, r$, то застосувавши до останньої рівності доведене вище твердження, отримуємо

$$
\| \bar{D}_0 \ \bar{D}_1 \ \dots \ \bar{D}_r \| \begin{Vmatrix} \bar{F}_0 & \bar{F}_1 & \dots & \bar{F}_t & & \\ & \bar{F}_0 & \bar{F}_1 & \dots & \bar{F}_t & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & \bar{F}_0 & \bar{F}_1 \ \dots & \bar{F}_t \end{Vmatrix} =
$$

$$
= \quad \| 0 \ \dots \ 0 \ \bar{A}_0 \ \bar{A}_1 \ \dots \ \bar{A}_s \|
$$

Із здобутої рівності, на основі твердження 1 із [3], випливає, що для многочленних матриць

$\bar{A}(x) = \bar{A}_0 x^s + \bar{A}_1 x^{s-1} + \dots + \bar{A}_s$, $\bar{D}(x) = \bar{D}_0 x^r + \bar{D}_1 x^{r-1} + \dots + \bar{D}_r$,

та $\bar{F}(x) = \bar{F}_0 x^t + \bar{F}_1 x^{t-1} + \dots + \bar{F}_t$ виконується рівність

$\bar{A}(x) = \bar{D}(x)\bar{F}(x)$, тобто матриця $\bar{D}(x) \in C_{m,n}[x]$ – лівий дільник многочленної матриці $\bar{A}(x)$. Теорема доведена.

Із теореми 3 випливає

Наслідок 2. Нехай многочленна матриця $D(x) \in C_{m,n}[x]$ – лівий дільник многочленної матриці $A(x) \in P_{m,k}[x]$, тобто $A(x) = D(x)F(x)$. Тоді матриця $\bar{D}(x) \in C_{m,n}[x]$ також лівий дільник многочленної матриці $A(x)$, тобто $A(x) = \bar{D}(x)\bar{F}(x)$

Оскільки задача про розв'язність матричного рівняння

$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \dots + XA_{s-1} + A_s = 0$, $A_i \in C_{m,n}$, $i = 0, 1, \dots, s$.

рівносильна задачі про виділення із многочленної матриці

$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s$, $A_i \in C_{m,n}$, $i = 0, 1, \dots, s$.

лівого унітального дільника $D(x) = Ix - D$, $D \in C_{m,m}$, I – одинична матриця порядку m [4], то із здобутих результатів отримуємо:

Наслідок 3. Нехай матриця $D \in C_{m,m}$ – розв'язок матричного рівняння

$$X^{s}A_{o} + X^{s-1}A_{1} + \ldots + XA_{s-1} + A_{s} = 0,\ A_{i} \in C_{m,n},\ i = 0,1,\ \ldots,s.$$

Тоді матриця $\bar{D} \in C_{m,m}$ - розв'язок матричного рівняння

$$X^{s}\bar{A}_{o} + X^{s-1}\bar{A}_{1} + \ldots + X\bar{A}_{s-1} + \bar{A}_{s} = 0.$$

Наслідок 4. Нехай матриця $D \in C_{m,m}$ - розв'язок матричного рівняння

$$X^{s}A_{o} + X^{s-1}A_{1} + \ldots + XA_{s-1} + A_{s} = 0,\ A_{i} \in R_{m,n},\ i = 0,1,\ \ldots,s.$$

Тоді матриця $\bar{D} \in C_{m,m}$ - також розв'язок цього матричного рівняння.

Список літератури

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1977. 432 с.
2. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989. 655 с.
3. Прокип В.М. О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц // Укр. мат. журнал. 1990. т. 42, № 9. С.1213 - 1219.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1966. 576 с.

УДК 512.552.12

О.М. Романів

Одночасне зведення пари матриць до спеціального трикутного виду над адекватним дуо-кільцем

Основним результатом роботи є теорема, яка доводить можливість одночасного зведення пари матриць над адекватним дуо-кільцем до спеціального трикутного виду з елементарними дільниками по головній діагоналі, використовуючи тотожні односторонні перетворення.

Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце з одиницею. Дуо-кільцем називається кільце, в якому кожен односторонній ідеал є двостороннім. Позначимо через $U(R)$ групу одиниць кільця R, а через R_n – кільце квадратних матриць порядку n. Кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо для будь-якої матриці M розміру $m \times n$ є обернені матриці $P \in R_n$ і $Q \in R_m$ такі, що $PMQ = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$, де ε_i – елементарні дільники $(i = 1, \ldots, r)$, тобто $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ [3].

Означення. Елемент a кільця R називається адекватним справа, якщо для кожного елемента $b \in R$ є такі елементи $r, s \in R$, що: 1) $a = rs$; 2) $rR + bR = R$; 3) для будь-якого $s' \in R$ з включення $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що правий ідеал $s'R + bR$ властивий.

Означення. Кільце, в якому кожний елемент адекватний справа, називається правим адекватним.

Теорема 1. *Нехай R – адекватне справа дуо-кільце і $aR + bR + cR = R$, тоді існує елемент $r \in R$ такий, що $(a + rb)R + rcR = R$.*

Доведення. Оскільки R – адекватне справа, тоді $c = ms$, де $mR + aR = R$ і $s'R + aR \neq R$ для довільного правого дільника s елемента s. Приймемо $m = r$. Нехай $(a + rb)R + rcR = hR$, звідси $rcR \subset hR$. Розглянемо $rR + hR = \delta R$, $r = \delta r_0$, $h = \delta h_0$. Тоді $(a + rb)R \subset hR \subset \delta R$, а отже, $aR \subset \delta R$, що можливо, коли $\delta \in U(R)$, оскільки $aR + rR = R$. Отже, $rcR \subset hR$ і $rR + hR = R$. Звідси $r^2 s = hx$, $x \in R$, $r^2 u + hv = 1$, $u, v \in R$. Тоді $r^2 su' + hvs = s$, де $us = su'$, $u \in R$ (оскільки R – дуо-кільце). Звідси $h(xu' + vs) = s$, тобто $sR \in hR$. Згідно з адекватністю

R маємо $hR + aR = \delta R$, $a = \delta a_0$. Тоді $(ar + rb)R \subset hR \subset \delta R$, $a + rb = \delta y$, $y \in R$. Звідси $\delta a_0 + rb = \delta y$, $rbR \subset \delta R$, $rb = \delta t$, $t \subset R$. Оскільки $rR + aR = R$, тоді $rR + \delta R = R$, тобто $rn + \delta m = 1$, $m, n \in R$. Звідси $rbn' + \delta mb = b$, де $nb = bn'$, $n' \in R$, а тому $\delta tn' + \delta mb = \delta(tn' + mb) = b$. Отже, $bR \subset \delta R$.

Як ми показали $aR \subset \delta R$, $cR \subset \delta R$, $bR \subset \delta R$, що можливе, коли $\delta \in U(R)$. Оскільки $aR + bR + cR = R$, то $h \in U(R)$. Отже, $(a + rb)R + rcR = R$, що й потрібно було довести.

ТЕОРЕМА 2. *Нехай A_1, A_2 – матриці розміром $2 \times k_1$, $2 \times k_2$ над адекватним дуо-кільцем R, тоді існують такі зворотні матриці P, Q_i $(i = 1,2)$, що*

$$PA_iQ_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \varepsilon_2^i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де ε_1^i, ε_2^i – елементарні дільники матриці A_i.

Доведення. Оскільки над R справедлива теорема про елементарні дільники (теорема доведена в [1]), то існують зворотні матриці S, M_1, M_2 над R_2 такі, що

$$SA_1M_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$SA_2M_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $R\varepsilon_2^1 R \subseteq \varepsilon_1^1 R \cap R\varepsilon_1^1$.

Припустимо, що $aR + bR + cR = R$. Згідно з теоремою 1 для елементів a, b, $c \in R$ існує елемент $r \in R$, що $(a + rb)R + rcR = R$.

Розглянемо матрицю $T = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, що $T \in U(R_2)$. Тоді

$$TSA_1M_1 = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & r\varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$TSA_2M_2 = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + rb & rc & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $(a+rb)u+rcv=1$, то

$$\begin{pmatrix} a+rb & rc & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & * & 0 & \dots & 0 \\ v & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \begin{pmatrix} u & * & 0 & \dots & 0 \\ v & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in U(R_{k_2}).$$

Тепер розглянемо зворотну матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Маємо

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & r\varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ бо } \varepsilon_2^1 = x\varepsilon_1^1 \text{ і } r\varepsilon_2^1 = y\varepsilon_1^1.$$

Врахувавши, що $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, де $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \in U(R_2)$, отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x\varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема доведена.

Індукція по розмірах матриць і теорема 2 дають нам таку теорему:

Теорема 3. *Нехай A_i $(i = 1,2)$ — матриці розміром $m \times k_i$ над адекватним дуо-кільцем R, тоді існують такі зворотні матриці P, Q_i $(i = 1,2)$ над R, що*

$$PA_iQ_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^i & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & \varepsilon_t^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де ε_j^i $(j = 1,\dots,t$ $(t \leq m))$ — елементарні дільники матриці A_i.

Наслідок. *Нехай $A = B \cdot C$ і B, C — матриці над адекватним дуо-кільцем R. Тоді елементарні дільники матриці A діляться на відповідні елементарні дільники матриць B і C.*

Доведення. Оскільки над R справедлива теорема про елементарні дільники [1], то існують зворотні матриці P, Q_1, Q_2 над R_2 такі, що $PAQ_1 = PBQ_2Q_2^{-1}C$, тобто

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^A & 0 \\ * & \varepsilon_2^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^B & 0 \\ * & \varepsilon_2^B \end{pmatrix} \cdot X,$$

де $X = Q_2^{-1}C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix}$.

Тоді

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^A & 0 \\ * & \varepsilon_2^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^B & 0 \\ * & \varepsilon_2^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\varepsilon_1^A = \varepsilon_1^B c_1$, $\varepsilon_2^A = \varepsilon_2^B c_2$, що й треба було довести.

Список літератури

1. *Забавський Б.В.* Про PP-квазідуокільця елементарних дільників // **Алгебра і топологія.** К.: ІСДО. 1993. С.40–49.
2. *Забавский Б.В., Казимирский П.С.* Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных преобразований // Укр. мат. журн. 1984. Т.36. Вып.2. С.256–258.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1966 (1949). P.464–491.

УДК 511.364

Я.М.Холявка

Наближення чисел, зв'язаних з $\wp(z)$ та $\mathrm{sn}(z)$

Нехай $\wp(z)$ - еліптична функція Вейєрштрасса, g_2, g_3 - її інваріанти, $2\omega_0, 2\omega_1$ - деяка фіксована пара її основних періодів. Відомо [1], що існує еліптична функція $\mathrm{sn}\, z$, для якої $4\omega_0$, $2\omega_1$ є основними періодами. Через $\varkappa$ позначимо модуль $\mathrm{sn}\, z$, $\xi_0, \ldots, \xi_4$ - наближаючі числа, n_i та L_i - їх степені та довжини, $n = \deg \mathbf{Q}(\xi_0, \ldots, \xi_4)$.

ТЕОРЕМА. *Нехай*

$$P = n\left[\frac{\ln L_0}{n_0} + \frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_4}{n_4} + \min(n_2, n_3)(1 + \frac{\ln L_2}{n_2} + \frac{\ln L_3}{n_3}) + \ln n\right]. \quad /1/$$

Тоді $|\omega_0 - \xi_0| + |\omega_1 - \xi_1| + |g_2 - \xi_2| + |g_3 - \xi_3| + |\varkappa - \xi_4| > \exp(-\Lambda P^3)$, *де* Λ *- деяка ефективна стала.*

Доведення теореми. Припустимо, що для достатньо великого $\lambda \in \mathbf{N}$

$$|\omega_0 - \xi_0| + |\omega_1 - \xi_1| + |g_2 - \xi_2| + |g_3 - \xi_3| + |\varkappa - \xi_4| < \exp(-\lambda^6 P^3). /2/$$

Позначимо через $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ твірні елементи поля $\mathbf{Q}(\xi_0, \ldots, \xi_4)$,

$$K = \lambda^4 P^2,\ S = \lambda^3 P,\ N = \lambda P,\ L = \lambda^2 P,\ N_1 = 2\lambda N, \qquad /3/$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} C_{k,l} z^k (\wp(z)\, \mathrm{sn}\, z)^l, \qquad /4/$$

$$C_{k,l} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l,\tau} \zeta_\tau,\ C_{k,l,\tau} \in \mathbf{Z}. \qquad /5/$$

З [2], с.256, [3] та (4) отримаємо

$$f^{(s)}(4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0) = \sum C_{k,l,r}\zeta_r \frac{s!}{s_1!s_2!s_3!}\frac{k!}{(k-s_1)!}\times$$ /6/

$$\times (4p\omega_0 + \omega_0 + 2t\omega_1)^{k-s_1} P_{l,s_2}(\wp(\omega_0), 0, \wp''(\omega_0)) D_{l,s_3}(\varkappa, 1, 0) =$$

$$= B_{s,p,t}(\omega_0, \omega_1, g_2, \varkappa, \wp(\omega_0)).$$

Надалі завжди $s \le S$; межі для $p, t \in \mathbb{Z}$ будемо вказувати окремо. Розглянемо $f^{(s)}(4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0)$ як $(S+1)(2N+1)^2$ лінійних форм від $n(K+1)(L+1)$ змінних $C_{k,l,r}$. Згідно (3) (6) та принципу Діріхле ([4], с. 18), $C_{k,l,r}$ можна вибрати такими, щоб виконувались умови

$$|f^{(s)}(4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0)| < \exp(-\lambda^5 P^3),$$ /7/

$$0 < \max |C_{k,l,r}| < \exp(n^{-1}\lambda^4 P^3).$$ /8/

Нехай ξ_5 – найближчий до $\wp(\omega_0)$ корінь рівняння $4v^3 - g_2 v - g_3 = 0$, (див.[9]). Розглянемо $B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)$, $|p|, |t| < 2N_1$, як значення многочленів з алгебраїчними коеффіціентами в алгебраїчній точці. З [2], с. 46, (1), (3), (5), (6) та (8) отримаємо

$$L(B_{s,p,t}) \le \exp(n^{-1}\lambda^4 P^3 + \lambda^4 P^2 \ln P),$$ /9/

$$|B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)| > \exp(-(n\lambda^4 P^2 \ln P + \lambda^4 P^3)).$$ /10/

Оскільки для $|p|, |t| < 2N_1$ з (1), (3), (6) та (8) отримаємо

$$|f^{(s)}(4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0) - B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)| < \exp(-2^{-1}\lambda^5 P^3),$$ /11/

то з (7) та (11) отримаємо для $|p|, |t| < N$ оцінку

$$|B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)| < \exp(-2^{-1}\lambda^5 P^3).$$ /12/

З (10) та (12) для $|p|, |t| < N$

$$B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5) = 0.$$ /13/

Але тоді з (11) та (13) для $|p|, |t| < N$ отримаємо оцінку

$$|f^{(s)}(4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0)| < \exp(-2^{-1}\lambda^5 P^3).$$ /14/

Покажемо, що (14) виконується для $|p|, |t| < 2N_1$.

Основна лема. *Нехай* $\overline{N}_q = 2^q N$, $2^q < 2\lambda$. *Якщо (14) виконується для* $|p|, |t| < \overline{N}_q$, *то воно виконується і для* $|p|, |t| < \overline{N}_{q+1}$.

Доведення леми. Нехай $\sigma(z)$ – асоційована з $\wp(z)$ σ–функція,

$$F(z) = f(z)\sigma^{2L}(z)\sigma^{L}(\sqrt{e_1 - e_3}(z + \omega_1)). \qquad /15/$$

Позначимо через r найменше натуральне число, для якого круг радіуса $\frac{r}{2}$ лежить в паралелограмі з вершинами $C(\pm 8\overline{N}_q\omega_0 \pm 4\overline{N}_q\omega_1)$, $C = \max(1, (e_1 - e_3)^{-0.5})$. Тоді з (3), (4), (15), та теореми 3 [5] отримаємо

$$|F(z)|_{|z| \le R} < \exp(2^{2q}\lambda^4 P^3). \qquad /16/$$

Згідно з теоремою [7], стр.58, та припущення основної леми, отримаємо

$$|F(z)|_{|z| \le 2r} < \exp(-2^{2q}\lambda^5 P^3). \qquad /17/$$

З теореми [6], стр.78, теореми 4 ([5]) та вибору параметрів для λ^{-1}-околів точок $4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0$, $|p|, |t| < \overline{N}_{q+1}$ отримаємо оцінки

$$|\wp(z)\sigma^2(z)|^L, \quad |\mathrm{sn}\, z\sigma(\sqrt{e_1 - e_3}(z + \omega_1))|^L > \exp(-4^q\lambda^4 P^3). \; /18/$$

З (17) та (18) отримаємо для $|p|, |t| < \overline{N}_{q+1}$

$$|f(z)|_{z \in V_{\lambda^{-1}}(4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0)} < \exp(-2^{2q-1}\lambda^5 P^3). \qquad /19/$$

З (19) для $|p|, |t| < \overline{N}_{q+1}$ отримаємо

$$|B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)| < \exp(-2^{2q-2}\lambda^5 P^3). \qquad /20/$$

Оцінки (10) та (20) суперечливі, що й доводить основну лему.

Оцінимо $|C_{k,l}|$ зверху за допомогою леми 3 ([8]). Виберемо

$$\alpha_t = (1 + (k+1)(\lambda L)^{-1})((2\omega_0 + \omega_1)(4^{-1})), \; t = 0, \ldots, L,$$

Позначимо $\Delta = \det((\operatorname{sn}\alpha_t\wp(\alpha_t))^l)_{t,l=0,\dots,L}$; $\Delta_{t,l}$ – алгебраїчне доповнення елемента $(\operatorname{sn}\alpha_t\wp(\alpha_t))^l$; $\Delta(t) = \det((4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0 + \alpha_t)^k)$, $\Delta_{h_1,h_2,k}(t)$ – алгебраїчне доповнення елемента $(4h_1\omega_0 + 2h_2\omega_1 + \omega_0 + \alpha_t)^k$. Згідно з лемою в [2], стр. 107,

$$\left|\frac{\Delta_{t,l}}{\Delta}\right| < \exp(\lambda^3 P \ln P), \quad \left|\frac{\Delta_{h_1,h_2,k}(t)}{\Delta(t)}\right| < \exp(\lambda^5 P^2 \ln P),$$

що разом з основною лемою дає

$$|C_{k,l}| < \exp(-\lambda^7 P^3). \qquad /21/$$

Розглянемо в (5) $C_{k,l}$ як значення відповідного многочлена у точці $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Згідно з теоремою [2], стр.46, $|C_{k,l}| > \exp(-\lambda^5 P^3)$. Отримана оцінка суперечить (21), тому $C_{k,l} \equiv 0$, що суперечить (8) і доводить теорему.

Список літератури

1. Маркушевич А.И., Теория аналитических функций. М., 1968, Т.2.
2. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М., 1982. 311 с.
3. Холявка Я.М. Деякі властивості еліптичних функцій Якобі.- Деп.в ДНТБ України. 17.10.1992. N 1677-УК92. 1-13 стр.
4. Гельфонд А.О., Трансцендентные и алгебраические числа. М., 1952. 256с.
5. Холявка Я.М. Деякі властивості еліптичних функцій Якобі.(II).- Деп. в ДНТБ України. 28.10.1993, N 2144-УК93, 1-10 стр.
6. Masser D. Elliptic functions and transcendence // Lect. Notes Math. 1975. Vol.437. P.1–143
7. Reyssat E. Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp // Bull. Soc. Math. France. 1980. N1, P.47–79.
8. Фельдман Н.И., Эллиптический аналог одного неравенства А.О.Гельфонда., Труды Моск. мат. о-ва. 1968, т.18, с.65-76.
9. Холявка Я.М. О совместных приближениях инвариантов эллиптической функции алгебраическими числами.- Диофантовы приближения, ч.2, Изд. МГУ, 1986, с.114-121.

УДК 512.64

В.П. Щедрик

ЗВЕДЕННЯ ОДНОСТОВПЦЕВОЇ МАТРИЦІ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ІЗ ДЕЯКОЇ МАТРИЧНОЇ ГРУПИ ДО ПРОСТІШОГО ВИГЛЯДУ

Нехай R - комутативна область головних ідеалів і A - матриця із $M_n(R)$, яка має канонічну діагональну форму (к.д.ф.) $\Phi = diag(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$, $det\Phi \neq 0$. В.Р. Зеліско [1], досліджуючи перетворюючі матриці, які зводять матрицю A до її к.д.ф. Φ, вперше розглянув матричну групу G_Φ, яка складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{array}{ccccc} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} h_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n,n-1} & h_{nn} \end{array} \right\| .$$

Подальші дослідження [2,3] показали, що ця група безпосередньо пов'язана з питанням про асоційованість та розкладність матриць на множники. У цьому зв'язку виникла потреба вивчити властивості цієї групи, дослідити її дію на матриці, зокрема на одностовпцеві. Цій проблематиці і присвячена наша стаття.

Нехай $a_1, \ldots, a_k$ набір взаємно простих елементів із R. Надалі нам буде потрібно скористатись деякими властивостями цієї множини елементів.

<u>Властивість 1.</u> У кільці R можна підібрати такі $u_2, \ldots, u_{k-1}$, що

$$(a_1 + u_2 a_2 + \ldots + u_{k-1} a_{k-1}, a_k) = 1.$$

Доведення. Нехай спочатку k = 3, тобто

$$(a_1, a_2, a_3) = 1.$$

Тоді шукане u_2, згідно з результатом роботи [4], може бути знайдено з рівності

$$a_3 = u_2 d,$$

де $d = p_1^{t_1} \dots p_s^{t_s}$, p_i – нерозкладні дільники a_1, i = 1, ... , s, причому $(u_2, a_1)=1$.

Тепер розглянемо загальний випадок. Нехай

$$(a_2, \dots, a_{k-1}) = \gamma.$$

Тоді можна відшукати такі $v_2, \dots, v_{k-1}$, що

$$v_2 a_2 + \dots + v_{k-1} a_{k-1} = \gamma.$$

Оскільки

$$(a_1, \gamma, a_k) = 1,$$

то тоді, як було показано вище, знайдеться таке r, що

$$(a_1 + r\gamma, a_k) = 1.$$

Отже,

$$(a_1 + (rv_2)a_2 + \dots + (rv_{k-1})a_{k-1}, a_k) = 1.$$

Тобто $u_i = rv_i$, i = 2, ..., k-1 ∎

Властивість 2. У кільці R існують такі $u_1, \dots, u_k$, що матриця

$$\left\| \begin{matrix} u_k & 0 & \dots & 0 & 0 & u_{k-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & u_{k-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & u_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \end{matrix} \right\| = U \qquad (1)$$

є оборотна.

Доведення. Згідно з властивістю 1 у кільці R можна вибрати такі $u_1, \dots, u_{k-2}$, що

$$(a_k - u_1 a_{k-1} - \dots - u_{k-2} a_2, a_1) = 1.$$

Розкладемо визначник матриці U по елементах її першого стовпця:

$$\det U = u_k \gamma_{k-1} - u_{k-1} a_1 ,$$

де $\gamma_{k-1} = a_k - u_1 a_{k-1} - \ldots - u_{k-2} a_2$. Врахувавши попередню рівність, бачимо, що можна підібрати такі u_{k-1} і u_k при яких $\det U = 1$ ■

Позначимо через G_Φ^i підгрупу групи G_Φ матриць вигляду

$$\left\| \begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & E_{n-i} \end{array} \right\| ,$$

$i = 1, \ldots, n$. E_0 – порожня матриця, тобто $G_\Phi^n = G_\Phi$.

Наслідок. Якщо

$$\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_1} a_{k1} , \ldots , \frac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}} a_{k.k-1} , a_k \right) = 1,$$

$k \le n$, то у групі G_Φ^k знайдеться матриця в якої k-й рядок буде:

$$\left\| \frac{\varphi_k}{\varphi_1} a_{k1} \ \ldots \ \frac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}} a_{k.k-1} \ \ a_k \ \ a_{k+1} \ldots a_n \right\| = a,$$

де $a_{k+1}, \ldots, a_n$ – довільні елементи кільця R.

Доведення. Згідно з властивістю 2 рядок a може бути доповнений до оборотної матриці U вигляду (1). Тоді, очевидно, що матриця

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \ldots & 0 \\ & U & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \ldots & 0 \\ & & & a_{k+1} & \cdots & a_n \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right\|$$

буде шуканою ■

Властивість 3. Нехай $k \times k$ матриця

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k & * & \ldots & * \end{array} \right\| = A$$

є оборотною і $A^{-1} = \| b_{ij} \|_1^k$. Тоді для того, щоб набір елементів

$u_1, \ldots, u_k$ задавольняв рівність

$$u_1 a_1 + \ldots + u_k a_k = 1 \qquad (2)$$

необхідно і достатньо, щоб радок $\| u_1 \ \ldots \ u_k \|$ можна було представити у вигляді

$$\| u_1 \ \ldots \ u_k \| = \| 1 \ x_2 \ \ldots \ x_k \| A^{-1}, \qquad (3)$$

де x_i – довільні елементи із R.

<u>Доведення. Необхідність.</u> Розглянемо матрицю

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{Vmatrix} = U.$$

Тоді

$$UA = \begin{Vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_k \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Звідси безпосередньо випливає рівність (3).

<u>Достатність.</u> Якщо маємо рівність (3), то

$$\| u_1 \ \ldots \ u_k \| \, \| a_1 \ \ldots \ a_k \|^{\mathrm{T}} = \| 1 \ x_2 \ \ldots \ x_k \| A^{-1} \| a_1 \ \ldots \ a_k \|^{\mathrm{T}} =$$
$$= \| 1 \ x_2 \ \ldots \ x_k \| \, \| 1 \ 0 \ \ldots \ 0 \|^{\mathrm{T}} = 1.$$

Тобто виконується рівність (2) ∎

<u>Властивість 4.</u> Нехай φ деякий ненульовий елемент кільця R. Тоді знайдеться такий набір елементів $u_1, \ldots, u_k$, що

1) $u_1 a_1 + \ldots + u_k a_k = 1$,

ii) $(u_1, \ldots, u_i) = 1$,

для довільного фіксованого $2 \le i \le k$,

iii) $(u_i, \varphi) = 1$.

<u>Доведення.</u> Доповнимо стовпець $\| a_1 \ \ldots \ a_k \|^{\mathrm{T}}$ до оборотної матриці

$$\begin{Vmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k & * & \dots & * \end{Vmatrix} = A.$$

I нехай $A^{-1} = \| b_{ij} \|_1^k$. Тоді згідно з властивістю 3, довільний набір $u_1, \dots, u_k$, який задовольняє умову 1), отримується так

$$\| u_1 \ \dots \ u_k \| = \| 1 \ x_2 \ \dots \ x_k \| A^{-1},$$

де x_j – довільні елементи із R. Розглянемо матрицю, яка складається з перших i стовпців матриці A^{-1}:

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1i} \\ b_{21} & . & . & . & b_{2i} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{k1} & . & . & . & b_{ki} \end{Vmatrix} = S.$$

Тоді для доведення нашого твердження достатньо показати, що знайдуться такі $x_2, \dots, x_k$, що

$$\| 1 \ x_2 \ \dots \ x_k \| S = \| q_1 \ \dots \ q_i \|,$$

де $(q_1, \dots, q_i) = 1 = (q_i, \psi)$.

Якщо $b_{2i} = \dots = b_{ki} = 0$, то із того, що матриця A^{-1} є оборотною випливає, що $b_{1i} \in U(R)$. Отже, шуканим набором буде $b_{11}, \dots, b_{1i}$. Нехай тепер серед $b_{2i}, \dots, b_{ki}$ є принаймні одне ненульове. I нехай

$$(b_{2i}, \dots, b_{ki}) = \gamma.$$

Тоді в $GL_{k-1}(R)$ знайдеться така матриця D, що

$$D \| b_{2i} \ \dots \ b_{ki} \|^T = \| \gamma \ 0 \ \dots \ 0 \|^T.$$

Отже,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{Vmatrix} S = \begin{Vmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1.i-1} & b_{1i} \\ c_{21} & . & . & . & c_{2.i-1} & \gamma \\ c_{31} & . & . & . & c_{3.i-1} & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{k1} & . & . & . & c_{k.i-1} & 0 \end{Vmatrix} = S_1.$$

Виділимо підматрицю

$$M = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1.i-1} & b_{1i} \\ c_{21} & \dots & c_{2.i-1} & \gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i1} & \dots & c_{i.i-1} & 0 \end{vmatrix}$$

матриці S_1. Нехай $\det M \in U(R)$. Оскільки $(b_{1i}, \gamma) = 1$ тому і $(b_{1i}, \gamma, \phi) = 1$. Тоді з властивості 1 випливає, що знайдеться таке r для якого

$$(b_{1i} + r\gamma, \phi) = 1.$$

Розглянемо тепер наступну рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix} M = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1.i-1} & b_{1i} + \gamma r \\ c_{21} & \dots & c_{2.i-1} & \gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i1} & \dots & c_{i.i-1} & 0 \end{vmatrix} = M_1.$$

Оскільки $\det M = \det M_1$, тому $(c_{11}, \dots, c_{1.i-1}, b_{1i} + \gamma r) = 1$. Тобто і в цьому випадку ми знайшли шуканий набір: $c_{11}, \dots, c_{1.i-1}$, $b_{1i} + \gamma r$.

Насамкінець розглянемо випадок коли $\det M \notin U(R)$. Легко переконатись, що у цьому разі серед елементів матриці

$$\begin{vmatrix} c_{i+1.1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{i+1.i-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{k.i-1} & 0 \end{vmatrix}$$

можна вибрати принаймні один ненульовий елемент c_{tj}. Тоді маємо рівність $(b_{1i}, \gamma, \phi c_{tj}) = 1$. Знову ж таки у кільці R можна відшукати таке l, що

$$(b_{1i} + l\gamma, \phi c_{tj}) = 1. \tag{4}$$

Розглянемо тепер добуток

$$\begin{Vmatrix} 1 & l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & 1 \end{Vmatrix} S_1 = \begin{Vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1j} & \dots & d_{1.i-1} & d_{1i} \\ c_{21} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2.i-1} & \gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{t1} & \dots & c_{tj} & \dots & c_{t.i-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & \dots & c_{kj} & \dots & c_{k.i-1} & 0 \end{Vmatrix} = S_2,$$

де $d_{1i} = b_{1i} + l\gamma$. З рівності (4) випливає, що $(d_{1j}, c_{tj}, d_{1i}) = 1$, а також

$$(d_{1i}, \phi) = 1. \qquad (5)$$

Отже, знайдеться таке m, що

$$(d_{1j} + mc_{tj}, d_{1i}) = 1.$$

Зваживши на рівність (5), приходимо до висновку, що елементи першого рядка матриці

$$\begin{Vmatrix} 1 & \overbrace{0 \dots 0 \; m}^{t} & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \quad 0 \quad 0 & 0 \dots 0 \\ & \cdot & \\ & \quad\cdot & \\ & \qquad\cdot & \\ 0 & & 1 \end{Vmatrix} S_2 = \begin{Vmatrix} * & \dots & * & d_{1j}+mc_{tj} & * \dots * & d_{1i} \\ c_{21} & . & . & .c_{2j} & . \; . \; . & c_{2i-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & . & . & .c_{kj} & . \; . \; . & c_{ki-1} & 0 \end{Vmatrix}$$

будуть задовольняти усі три вимоги нашого твердження ■

Позначимо $\Phi_i = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} \; \dots \; \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \; 1 \; \dots \; 1\right)$, $i = 2, \dots, n$.

<u>Лема.</u> Нехай $H \in G_\Phi$ і A – довільна $n\times m$ матриця. Тоді маємо таку еквівалентність:

$$\Phi_i A \sim \Phi_i HA,$$

$i = 2, \dots, n$.

<u>Доведення.</u> Розглянемо j-й стовпець матриці H:

$$h_j = \left\| h_{1j} \; \dots \; h_{jj} \; \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} h_{j+1.j} \; \dots \; \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^{T}.$$

Тоді $\Phi_i h_j = \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_1} h_{1j} \ \dots \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{j-1}} h_{j-1.j} \ \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{jj} \ \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{j+1.j} \ \dots \ \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{ij}\right.$

$$\left. \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_j} h_{i+1.j} \ \dots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^{\tau} = \frac{\varphi_i}{\varphi_j} \left\| \frac{\varphi_j}{\varphi_1} h_{1j} \ \dots \ \frac{\varphi_j}{\varphi_{j-1}} h_{j-1.j} \right.$$

$$\left. h_{jj} \ \dots \ h_{ij} \ \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} h_{i+1.j} \ \dots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_i} h_{nj} \right\|^{\tau}.$$

Отже, маємо рівність

$$\Phi_i H = K\Phi_i,$$

$i = 2, \dots, n$, де матриця K є частка від ділення справа матриці $\Phi_i H$ на Φ_i. З цієї рівності випливає, що

$$\det K\Phi_i = \det\Phi_i \det H.$$

Оскільки $\det H \in U(R)$, то приходимо до висновку, що $K \in GL_n(R)$. Це означає, що є справедливою така еквівалентність

$$\Phi_i HA = K\Phi_i A \sim \Phi_i A \blacksquare$$

Теорема. Якщо $a_1, \dots, a_n$ – взаємно прості елементи із R і

$$\Phi_i \| a_1 \ \dots \ a_n \|^{\tau} \sim \| \delta_i \ 0 \ \dots \ 0 \|^{\tau},$$

$i = 2, \dots, n$, то у групі G_Φ знайдеться така матриця H, що

$$H \| a_1 \ \dots \ a_n \|^{\tau} = \| * \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n \|^{\tau},$$

де $\delta_{i+1} = \delta_i d_{i+1.i}$, причому $d_{i+1.i} \mid \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Доведення. Із властивості 4 випливає, що в R можна вибрати такі $u_1, \dots, u_n$, що

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_1 a_1 + \dots + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n-1} a_{n-1} + u_n a_n = \delta_n,$$

причому

$$\left(u_n, \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \right) = 1.$$

З останньої рівності випливає, що

$$(u_n, \frac{\varphi_n}{\varphi_j}) = 1,$$

$j = 1, \ldots, n-1$. Тому

$$(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1, \ldots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1}, u_n) = 1.$$

Тоді з наслідку випливає, що в групі G_Φ знайдеться така матриця H_n, яка матиме своїм n-тим рядком рядок

$$\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1 \ \ldots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1} \ \ u_n \right\|.$$

Отже,

$$H_n \| a_1 \ \ldots \ a_n \|^T = \| \ b_1 \ \ldots \ b_{n-1} \ \ \delta_n \ \|^T.$$

Із леми отримуємо таку еквівалентність

$$\Phi_{n-1} H_n \| a_1 \ \ldots \ a_n \|^T \sim \| \ \delta_{n-1} \ \ 0 \ \ \ldots \ 0 \ \|^T.$$

Використовуючи знову властивість 4 і наслідок, будуємо таку матрицю $H_{n-1} \in G_\Phi^{n-1}$ для рядка $\| \ b_1 \ \ldots \ b_{n-1} \ \ \delta_n \ \|^T$, що

$$H_{n-1} H_n \| a_1 \ \ldots \ a_n \|^T \sim \| \ d_1 \ \ldots \ d_{n-2} \ \ \delta_{n-1} \ \ \delta_n \ \|^T.$$

Продовжуючи описаний процес, на $(n-1)$-у кроці отримаємо таку матрицю, що $H = H_2 \ldots H_n \in G_\Phi$, що

$$H \| a_1 \ \ldots \ a_n \|^T = \| \ * \ \ \delta_2 \ \ldots \ \delta_n \|^T.$$

Обчислимо тепер δ_{i+1}:

$$\delta_{i+1} = (\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_1}a_1, \ \ldots, \ \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}a_i, \ a_{i+1}, \ \ldots, \ a_n) =$$

$$= (\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} \ (\frac{\varphi_i}{\varphi_1}a_1, \ \ldots, \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}a_{i-1}, \ a_i), \ a_{i+1}, \ \ldots, \ a_n) =$$

$$= \delta_i (\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \ \frac{a_{i+1}}{\delta_i}, \ \ldots, \ \frac{a_n}{\delta_i}) = \delta_i d_{i+1,i}.$$

Отже, $\delta_{i+1} = \delta_i d_{i+1,i}$, де $d_{i+1,i} \mid \dfrac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$ $\blacksquare$

Список літератури

1. Зелиско В.Р. О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.- мех. поля. 1990. № 12. С. 14 - 21.
2. Щедрик В.П. Про факторизацію матричних многочленів // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1989. № 10. С. 41 - 43.
3. Щедрик В.П. О разложении матричных многочленов на множители. - Львов, 1990. 22 с. (Препринт АН УССР. Ин- т прикл. пробл. мех. и мат.; № 22 - 90).
4. Helmer O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. Vol.49 P. 236 - 255.

ЗМІСТ

Збірник наукових праць

АЛГЕБРА І ТОПОЛОГІЯ

За ред. М.М.Зарічного, М.Я.Комарницького

Редактор Я.В.Прихода

Підп. до друку 27.02.96. Формат 60х84/16. Папір друк. № 3.
Офс.друк. Умовн.друк.арк. 8,4. Умовн.фарбовідб. 8,4.
Обл.-вид.арк. 9,3. Тираж 100 прим. Зам. 67.

Машинно-офсетна лабораторія Львівського держуніверситету
ім.Івана Франка. 290602 Львів, вул.Університетська, 1.