УДК 512.74

В.І.Андрійчук

ПРО КОГОМОЛОГІЇ ГАЛУА АЛГЕБРАЇЧНИХ ТОРІВ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Нехай x псевдоскінченне [1] поле, тобто поле, що має такі властивості:

а) x - досконале;

б) x - псевдо алгебраїчно замкнуте, тобто кожний абсолютно незвідний алгебраїчний многовид, визначений над полем x, має x-раціональну точку;

в) поле x має точно одне розширення степеня n для кожного натурального n.

Псевдоскінченні поля є нескінченними моделями скінченних полів: кожна властивість, що формулюється мовою першого порядку і справедлива для всіх скінченних полів справедлива і для псевдоскінченних полів.

Нехай K -поле алгебраїчних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним полем констант x. Виявляється [2], що для поля K справедливий аналог глобальної теорії полів класів. Це означає, що поле K дуже подібне на звичайні глобальні поля. Назвемо поле K псевдоглобальним полем. Можна сподіватися, що значна частина результатів арифметичної теорії алгебраїчних груп, визначених над глобальним полем, залишається справедливою і для алгебраїчних груп, визначених над псевдоглобальним полем. Мета цієї статті - довести деякі з таких результатів для випадку алгебраїчних торів.

Наведені в роботі результати суттєво використовують аналог теорії полів класів для псевдоглобальних полів.

1. Для G-модуля M через $H^n(G,M)$ $(n \in \mathbb{Z})$ будемо позначати Тейтівські когомології групи G з коефіцієнтами в M. Нехай K - поле, K_s - сепарабельне замикання поля K, $\mathfrak{G} = Gal(K_s/K)$ - відповідна група Галуа, M - $\mathfrak{G}$-модуль. Тоді $H^n(K,M)$ означає $H^n(\mathfrak{G},M)$. Якщо L - розширення Галуа поля K, то $H^n(Gal(L/K),M)$ позначаємо через $H^n(L/K,M)$.

Далі K означає псевдоглобальне поле, L/K - його скінченне розширення Галуа, V - множина всіх нормувань поля K. Для $v \in V$ через K_v позначаємо поповнення поля K за номуванням v. C_L - група класів іделів поля L. BrK - група Брауера поля K, BrK_v - група Брауера відповідного загального локального поля K_v.

У роботі [2] доведені такі теореми 1 і 2.

<u>Теорема 1</u>. а) $H^1(L/K,C_L)=0$,

б) $H^2(L/K,C_L)$ - циклічна група порядку $|Gal(L/K)|$ з канонічною твірною $u_{L/K}$. Якщо H - підгрупа групи $Gal(L/K)$, то $H^2(H,C_L)$ - циклічна група порядку $|H|$, породжена обмеженням твірної $u_{L/K}$ на підгрупу H.

<u>Теорема 2</u>. Існує точна послідовність

$$0 \longrightarrow BrK \longrightarrow \sum_{v \in V} BrK_v \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

З теореми 2 випливає, що для скінченного розширення Галуа L/K відображення

$$Br(L/K)=H^2(L/K,L^*) \longrightarrow \sum_{v \in V} Br(L_w/K_v)=H^2(L/K,J_L)$$

(тут w - продовження на поле L нормування v, J_L - група іделів поля L) є ін'єктивним. Це означає, що для псевдоглобального поля K

справедливе твердження Хассе-Брауера-Нетер про норми.

2. Теорема 1 дає змогу довести теорему Тейта-Накаями для алгебраїчних торів, визначених над псевдоглобальним полем K.

Сформулюємо локальний і глобальний варіанти теореми Тейта-Накаями.

<u>Теорема</u> <u>3</u>. а) Нехай k - загальне локальне поле, T - тор, визначений над k, який розщеплюється над скінченним розширенням Галуа l/k, $X(T)$ - група характерів тору T. Тоді для всіх цілих чисел n існують ізоморфізми

$$H^n(l/k,T) \cong H^{2-n}(l/k,X(T)).$$

б) Нехай K - псевдоглобальне поле, T - тор, визначений над K, який розщеплюється над скінченним розширенням Галуа L/K, $C_L(T)$ - група класів іделів тора T над полем L і $X(T)$ - група характерів тора T. Тоді для всіх цілих чисел n існують ізоморфізми

$$H^n(L/K,C_L(T)) \cong H^{2-n}(L/K,X(T)).$$

<u>Доведення</u>. Обмежимося доведенням глобального варіанту теореми. Доведення локального варіанту нічим не відрізняється від наведеного в [3] доведення для торів, визначених над локальним полем. Потрібно тільки врахувати, що локальна теорія полів класів поширюється на загальні локальні поля [4]. Зауважимо також, що доведення глобального варіанту теореми теж стандартне. Проведемо його, використовуючи міркування з [3], де розглянуто випадок алгебраїчних торів, визначених над глобальним полем.

Нехай T_L і T_{A_L}, відповідно групи L - раціональних точок і аделів тору T. $C_L(T)=T_{A_L}/T_L$, $X_*(T)$ - модуль кохарактерів тора T. Як і у [3] переконуємося, що $Gal(L/K)$-модулі $X_*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}C_L$ і $C_L(T)$

ізоморфні. За теоремою 1 і теоремою Тейта [5,p.4] множення на $u_{L/K}$ індукує ізоморфізм

$$H^n(L/K,X_*(T)) \cong H^{n+2}(L/K,X_*(T)\otimes_{\mathbb{Z}}C_L) \cong H^{n+2}(L/K,C_L(T)).$$

Використовуючи дуальність скінченних груп $H^n(L/K,X_*(T))$ і $H^{-n}(L/K,X(T))$ [6], одержуємо потрібні ізоморфізми.

$$H^n(L/K,C_L(T)) \cong H^{2-n}(L/K,X(T)).$$

Виведемо деякі наслідки з теореми Тейта-Накаями для торів над псевдоглобальними полями, тобто, по суті, наслідки з аналогу глобальної теорії полів класів для псевдоглобальних полів.

Теорема 4. Нехай T - алгебраїчний тор, визначений над полем K і розкладний над його скінченним розширенням Галуа. Тоді

1) групи $H^n(L/K,T)$ скінченні, якщо K - загальне локальне поле;

2) групи $P^n(L/K,T)=Ker(H^n(L/K,T) \longrightarrow \prod_{v\in V} H(L^n_w/K_v,T))$ скінченні, якщо K - псевдоглобальне поле.

Доведення. Група $X(T)$ характерів тору T є скінченно породженим $Gal(L/K)$-модулем. Тому всі групи $H^n(L/K,X(T))$ скінченні для всіх цілих n. З твердження а) теореми 3 випливає тоді скінченність груп $H^n(L/K,T)$, що і стверджує перша частина теореми.

Друга частина теореми випливає з точної послідовності когомологій

$$H^{n-1}(L/K,T_{A_L}) \longrightarrow H^{n-1}(L/K,C_L(T)) \longrightarrow H^n(L/K,T) \longrightarrow H^n(L/K,T_{A_L})$$

відповідної точній послідовності $Gal(L/K)$-модулів (у позначеннях попереднього пункту).

$$1 \longrightarrow T_L \longrightarrow T_{A_L} \longrightarrow C_L(T) \longrightarrow 1.$$

Ця точна послідовність когомологій показує, що $P^n(L/K,T)$ є факторгрупою групи $H^{n-1}(L/K,C_L(T))$, яка за теоремою 3 ізоморфна скінченній групі $H^{3-n}(L/K,X(T))$ і, отже, скінченна.

<u>Наслідок</u>. Група Шафаревича-Тейта

$Ш(T)=Ker(H^1(K,T)) \longrightarrow \prod_{v\in V} H^1(K_v,T))$ скінченна для тора T, визначеного над псевдоглобальним полем K.

Для доведення наслідку досить використати той факт, що для тора T, визначеного над полем K і розкладного над розширенням Галуа L існує ізоморфізм $H^1(K,T) \cong H^1(L/K,T)$ і застосувати теорему 4.

Сформулюємо ще декілька теорем про когомології алгебраїчних торів над псевдоглобальними полями, які є аналогами відомих фактів [3] про алгебраїчні тори, визначені над глобальними полями.

<u>Теорема 5</u>. У позначеннях попередньої теореми 4 для тору, визначеного над псевдоглобальним полем K, існують ізоморфізми

$$P^n(L/K,T) \cong Ker(H^{3-n}(L/K,X(T)) \longrightarrow \prod_{v\in V} H^{3-n}(L_v/K_v,X(T)).$$

<u>Теорема 6</u>. Нехай $T=R^1_{L/K}(\mathbb{G}_m)$ норменний тор, відповідний розширенню Галуа L/K псевдоглобального поля K, $G=Gal(L/K)$. Тоді група Шафаревича-Тейта тора T ізоморфна ядру канонічного гомоморфізму

$$H^3(G,Z) \longrightarrow \prod_{v\in V} H^3(G_v,Z),$$

де G_v - група розкладу нормування v.

<u>Теорема 7</u>. Нехай L - будь-яке розширення простого степеня псевдоглобального поля K, $T=R^1_{L/K}(\mathbb{G}_m)$ - норменний тор. Тоді група Шафаревича-Тейта тора T тривіальна.

Доведення теорем 5, 6 і 7 майже не відрізняються від доведень відповідних фактів для торів над глобальним полем. Зауважимо лише, що у доведенні теореми 5 потрібно використати тривіальність групи $H^1(\lambda,T)$ для псевдоскінченного поля λ, а це випливає з означення псевдоскінченного поля. (У випадку скінченного поля λ тривіальність $H^1(\lambda,A)$ для зв'язної алгебраїчної групи A є твердженням відомої теореми Ленга.) Теорема 6 стандартно виводиться з теореми 5. Це можна зробити, наслідуючи, наприклад, міркування з розділу 6 книги [3], де вивчаються тори над глобальним полем. Для доведення теореми 7 потрібно застосувати міркування, наведені в [7] і використати теорему Хассе про норми, яка є наслідком теореми 2.

Список літератури

1. Ax J., The elementary theory of finite fields // Ann. Math. 1968. Vol.88. N2, P. 239-271.
2. Андрійчук В.І. Псевдоскінченні поля і закон взаємності // Математичні студії. 1993. Вип.2, С.14-20.
3. Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел. М., 1991.
4. Serre J.-P. Corps locaux // Act.Sci.Ind. N1296. Paris, 1962
5. Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж.Кассела и А.Фрелиха. М., 1969.
6. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М., 1960.
7. Платонов В.П. Арифметическая теория алгебраических групп // Успехи мат. наук, 1982. Т.37, N3. С.3-54.