УДК 512.55

О.Д.Артемович

НЕПЕРІОДИЧНІ ПРАВІ ГАМІЛЬТОНОВІ КІЛЬЦЯ

У цій праці охарактеризовані праві гамільтонові кільця з неперіодичною адитивною групою, а також праві гамільтонові ніль-p-кільця характеристики 0 та періодичні праві гамільтонові неніль-кільця. Згідно з [1, задача 1.147] кільце називається правим гамільтоновим, якщо всі його підкільця є праві ідеали.

Багато авторів [2-14] описали кільця, усі підкільця яких – двосторонні ідеали. Такі кільця за аналогією з гамільтоновими групами, тобто групами з нормальними власними підгрупами /див., наприклад, [15]/, отримали назву гамільтонових.

У роботі розглядаються тільки асоціативні кільця, і, як правило, вони не містять одиниці. Підкільце – це непорожня множина кільця, замкнена стосовно двох кільцевих операцій.

Якщо R – кільце, x /відповідно M_α, M та N/ – його елемент /відповідно його підкільця/, то

R^+ – адитивна група кільця R;

$\langle x\rangle = gr(x)$ – циклічна підгрупа групи R^+, породжена елементом x;

$\{x\}$ – підкільце кільця R, породжене елементом x;

$\{X,Y\}$ – підкільце кільця R, породжене підмножинами X, та Y;

MN – множина скінченних сум вигляду $\sum x_iy_i$, де $x_i \in M$, $y_i \in N$;

$XR = \{xr |\ x \in X, r \in R\}$ для підмножини X кільця R;

$|x|$ – порядок елемента x у групі R^+;

$\exp(M^+)$ – максимальний порядок елементів адитивної групи M^+;

$\mathbf{Z}$ – кільце цілих чисел;

$\mathbf{Z}^*$ – множина ненульових цілих чисел;

$\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ – кільце класів лишків кільця цілих чисел $\mathbf{Z}$ за модулем числа n;

$\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел;

$\operatorname{Ann} R = \{x \in R |\ xR = Rx = 0\}$ – анулятор кільця R; $\operatorname{Ann}_l(R) = \{x \in R | xR = 0\}$ – лівий анулятор кільця R;

$Z(R) = \{x \in R |\ xy = yx$ для всіх елементів $y \in R\}$ – центр кільця R;

$\mathcal{L}(R)$ - радикал Левицького кільця R;

$\mathcal{F}(R)$ – періодична частина кільця R;

$\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_p(R)$ – p-частина кільця R, тобто $\mathcal{F}_p^+$ – силовська p-підгрупа адитивної групи $\mathcal{F}(R)^+$;

$\mathcal{L}_p = \mathcal{F}_p(\mathcal{L}(R)$ – p-частина радикала Левицького $\mathcal{L}(R)$;

$M+N = \{m+n | \ m \in M, n \in N\}$ – сума адитивних груп M^+ та N^+ підкілець M та N;

$M \oplus N$ – пряма сума підкілець M та N, тобто $M \oplus N = M+N, MN = NM = 0, M \cap N = 0$;

$\sum_\alpha^\oplus M_\alpha$ – пряма сума підкілець M_α.

Надалі p, q завжди означають прості числа, а букви грецького алфавіту – цілі числа. Запис $\alpha|\beta$ означає, що число β ділиться на число α без остачі, а (α, β) – найбільший спільний дільник чисел α та β.

Кільце R називається періодичним /відповідно неперіодичним, p-кільцем, кільцем без скруту або змішаним/, якщо такою є його адитивна група R^+.

Решта позначень та термінів, що ми використовуємо, стандартні; їх можна знайти, наприклад, у [9 ,15 – 17]

Наша робота підсумовує цикл робіт автора [18 – 22].

1. Елементарні властивості правих гамільтонових кілець

Для зручності викладу спочатку наведемо теорему із [6].

ТВЕРДЖЕННЯ 1.1. *Кільце K тоді і лише тоді буде гамільтоновим кільцем, породженим одним елементом, коли K ізоморфне одному із кілець таких десяти типів:*

1) кільця $K_1 \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ /$n \in \mathbb{N}$/;

2) кільцю K_2, породженому елементом a порядку p^n /$n > 1$/, причому $a^2 - \alpha a = 0$ для деякого $\alpha \in \mathbb{Z}$ і α ділиться на p;

3) кільцю K_3, породженому елементом a порядку p^n /$n > 1$/, причому $a^3 - \alpha a^2 = 0$ для деякого $\alpha \in \mathbb{Z}$, $a^2 - \gamma a \neq 0$ для кожного $\gamma \in \mathbb{Z}$, $p(a^2 - \gamma a) = 0$ та α ділиться на p;

4) кільцю $K_4 = K_1 \oplus K_3$, яке є прямою сумою кілець K_1 та K_3, причому $K_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ та K_4^+ – p-група;

5) кільцю $K_5 = K_1 \oplus K_3$, яке є прямою сумою кілець K_1 та K_3, причому $K_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ та K_5^+ – p-група;

6) кільцю $K_6 = K^{(1)} \oplus K^{(2)} \oplus \ldots \oplus K^{(s)}$ / $s \geqslant 2$ /, *яке є прямою сумою кілець* $K^{(j)}$ $j = \overline{1,s}$, *причому* $K^{(j)}$ /$i = 1,2,3,4,5$/ *і адитивні групи кілець* $K^{(j)}$ *є p-групи для попарно різних простих чисел p;*

7) кільцю K_7, *породженому елементом a нескінченного порядку, причому* $a^2 - \alpha a = 0$ *для деякого* $\alpha \in \mathbf{Z}$;

8) кільцю K_8, *породженому елементом a нескінченного порядку, причому* $a^3 - \alpha a^2 = 0$, $|a^2 - \alpha a| = \pi$ *для деяких* $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\pi \in \mathbf{N}$, α *ділиться на* π *та* π, *вільне від квадратів;*

9) кільцю $K_9 \cong A \oplus K_7$, *яке є прямою сумою кілець* K_7 *та* $A \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, *де* $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$, α *ділиться на* m *та* m *вільне від квадратів;*

10) кільцю $K_{10} \cong A \oplus K_8$, *яке є прямою сумою кілець* K_8 *та* $A \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, *де* $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$, α *ділиться на* m *та* m *вільне від квадратів.*

Очевидно, що будь-яке підкільце і будь-який гомоморфний образ правого гамільтонового кільця також праве гамільтонове кільце. Крім того, праве гамільтонове кільце R є кільце з правою ідеалізаторною умовою /у розумінні [23]/, а тому його радикал Левицького R збігається з множиною всіх його нільпотентних елементів [23, наслідок 8]. Зрозуміло, що будь-яке підкільце правого гамільтонового кільця, породжене одним елементом, є комутативним гамільтоновим кільцем одного з наведених вище десяти типів K_1 — K_{10}. Щоб кільце R було правим гамільтоновим, необхідно і досить, щоб кожне підкільце із R, породжене одним елементом, було правим ідеалом в R.

Лема 1.2. *Нехай* R *– праве гамільтонове кільце. Тоді:*

1) $ara = a^2r$ *для будь-яких елементів* $a, r \in R$;

2) якщо R *містить хоч би один ненульовий недільник нуля, то кільце* R *– комутативне.*

Доведення. Нехай a – який-небудь ненульовий елемент кільця R, $C(a) = \{r \in R | \; ra = ar\}$ – централізатор елемента a у кільці R. Тоді для будь-якого елемента r кільця R добуток ar також належить централізатору, а отже,

$$a^2r = a(ar) = (ar)a \; .$$

Нехай $c \neq 0$ і c – недільник нуля у кільці R. Тоді із $c^2r - crc = 0$ отримуємо, що $cr - rc = o$ для будь-якого $r \in R$, а отже, $c \in Z(R)$. Але

тоді добуток ct також буде центральним елементом для будь-якого елемента $t \in R$, отже

$$c(tr) = (ct)r = r(ct) = c(rt),$$

звідси $tr = rt$. Лема доведена.

НАСЛІДОК 1.3. *Якщо d – внутрішнє диференціювання правого гамільтонового кільця R, то $d(R) \subseteq \mathcal{L}(r)$; і, крім того, $(dr)^2 = 0$ для будь-якого елемента $r \in R$.*

Справді, для довільних $a, b \in R$

$$(ab - ba)^2 = abab - ab^2a - ba^2b + baba = 0.$$

Тепер, зважаючи на лему 1.2, наслідок 1.3 та результати із [23], легко отримати такі твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4. *Для кільця R з одиницею рівносильні такі умови:*
1) R – праве гамільтонове кільце;
2) R – гамільтонове кільце
3) $R \cong \mathbf{Z}$ або $R \cong \mathbf{Z}_n$ /$n \in \mathbf{N}$/.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.5. *[23, теорема 6]. Нехай R – кільце з нульовим радикалом Левицького. Тоді наступні твердження рівносильні:*
1) R – праве гамільтонове кільце;
2) R – гамільтонове кільце;
3) кільце R належить до одного із типів:
а) R ізоморфне підкільцю кільця цілих чисел $\mathbf{Z}$;
б) $R \cong A \oplus R_1$ де $A \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, $m > 1$, m вільне від квадратів, а R_1 – кільце, породжене цілим числом $z \neq 0$, причому m ділиться на z;
в) $R \cong \sum_i^{\oplus} \mathbf{Z}/p_i\mathbf{Z}$ – пряма сума полів $\mathbf{Z}/p_i\mathbf{Z}$ за різними простими p_i.

Наведемо також ряд допоміжних тверджень; їх доведення аналогічні [10 – 12].

ЛЕМА 1.6. *Якщо кільце R – пряма сума правих гамільтонових кілець R_α, тобто $R = \sum_\alpha^{\oplus} R_\alpha$, і для кожного підкільця Q із R*

$$Q = \sum_\alpha^{\oplus} (Q \cap R_\alpha),$$

то R – праве гамільтонове кільце.

Доведення. Досить довести, що кожне підкільце з одним твірним елементом є правим ідеалом. Для цього розглянемо яке-небудь підкільце $\{a\} \leqslant R$; тоді

$$R = (\sum_{i=1}^{n} \oplus R_i) \oplus (\sum_{\alpha'} \oplus R_{\alpha'}) ,$$

де $R_{\alpha'} \cap \{a\} = 0$. Справді, оскільки $a \in \sum_{\alpha} \oplus R_{\alpha}$, то

$$a = a_1 + ... + a_{\alpha} + ... , \text{ де } a_{\alpha} \in R_{\alpha},$$

і всі елементи a_{α}, крім, можливо, їх скінченної кількості, дорівнюють нулю. Для певності вважаємо, що $a_i \neq 0$ $/i = \overline{1,n}/$, $a_{\alpha'} = 0$ для всіх $\alpha' > n$. І тоді $\{a\} \subseteq \sum_{i=1}^{n} \oplus R_i$, $\{a\} \cap R_{\alpha'} = 0$, Отже,

$$\{a\} = (\sum_{i=1}^{n} R_i) \cap \{a\} = \sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{R}_i,$$

де $\overline{R}_i = R_i \cap \{a\}$, і

$$\{a\}R = \sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{R}_i (\sum_{i=1}^{n} \oplus R_i \oplus \sum_{\alpha'} \oplus R_{\alpha'}) =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{R}_i)(\sum_{i=1}^{n} \oplus R_i) \subseteq (\sum_{i=1}^{n} \oplus \overline{R}_i) = \{a\}.$$

Лема доведена.

НАСЛІДОК 1.7. *Якщо R – пряма сума правих гамільтонових p-кілець, тобто $R = \sum_{p}^{\oplus} R_p$, причому суму беруть за різними простими p, то R також є правим гамільтоновим кільцем.*

Доведення. Розглянемо підкільце $\{a\} \leqslant R$. Нехай $a = a_1 + ... + a_n$, де $a_i \in R_{p_i}$ $/i = \overline{1,n}/$. Тоді

$$\{a\} = \{a_1\} \oplus ... \oplus \{a_n\} = \sum_{i=1}^{n} \oplus (\{a\} \cap R_{p_i})$$

і можна застосувати лему 1.6.

ЛЕМА 1.8. *Якщо $R = K \oplus R_0$ – пряма сума кілець, причому K – праве гамільтонове ніль-кільце, а $R_0 \cong \sum_\alpha^\oplus R_\alpha$, $R_\alpha \cong \mathbf{Z}/p_\alpha\mathbf{Z}$ і пряма сума береться за різними простими p_α, то R також праве гамільтонове кільце.*

Доведення. Нехай Q – власне підкільце кільця R. Покажемо, що $Q = (K \cap Q) \oplus (R_0 \cap Q)$. Включення $(K \cap Q) \oplus (R_0 \cap Q) \subseteq Q$ очевидне. Нехай

$$a = r + k_1 + \ldots + k_n \text{ ---}$$

довільний елемент із Q, де $r \in R_0$, $k_i \in R_{p_i}$ $/i = \overline{1,n}/$. Оскільки підкільце R_0 локально нільпотентне [23], то для деякого натурального m маємо

$$(k_1 + \ldots + k_n)^m = k_1^m + \ldots + k_n^m \ ,$$

тобто $\sum_{i=1}^n k_i^m \in Q$. Звідси також випливає, що $k_i \in Q$ $/i = \overline{1,n}/$. Отже, $r \in Q$.

$$\sum_{i=1}^n k_i \in (K \cap Q) \oplus (R_0 \cap Q) \text{ та } Q = (K \cap Q) \oplus (R_0 \cap Q) \ .$$

Отже, на основі леми 1.6 R – праве гамільтонове кільце. Лема доведена.

Звідси з урахуванням [24, лема 9] випливає

НАСЛІДОК 1.9. *Нехай R – періодичне ніль-кільце. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо $R = \sum_p^\oplus R_p$ – пряма сума нільпотентних правих гамільтонових p-кілець R_p, яка береться за різними простими p.*

2. Праві гамільтонові кільця без скруту

ТЕОРЕМА 2.1. *Нехай R – кільце без скруту. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо воно кільце із наступних типів:*

1) R – кільце з нульовим множенням;

2) R ізоморфне кільцю, породженому ненульовим цілим числом z, тобто $R \cong \{z\}$, $z^2 = \alpha z$ для деякого $\alpha \in \mathbf{Z}^*$;

3) $R = J + \{t\}$, $J^2 = 0$, $tJ = 0$, $J \cap \{t\} = 0$, $t^2 = \beta t$, β – *ненульове ціле число, причому* $it = \beta i$ *для кожного елемента* $i \in J$.

Доведення. Необхідність. Припустимо спочатку, що R – ніль-кільце. Нехай r – який-небудь елемент кільця R. Тоді $r^2 = 0$ внаслідок гамільтоновості підкільця $\{r\}$. Якщо t – довільний ніль-елемент кільця R, то $rt = \beta r$ для деякого цілого числа β та $\beta rt = rt^2 = 0$, звідси, як легко довести, $rt = 0$. Якщо R – праве гамільтонове ніль-кільце без скруту, то $R^2 = 0$.

Припустимо, що $R \neq \mathcal{L}(R) = 0$. Тоді внаслідок твердження 1.5 R – кільце типу 2 із умови теореми.

Нехай надалі $R \neq \mathcal{L}(R) \neq 0$. Тоді, зрозуміло, $\mathcal{L}(R)^2 = 0$ та $R/\mathcal{L}(R) = \{\bar{a}\}$, $\bar{a}^2 = \theta\bar{a}$ для деякого $\theta \in \mathbf{Z}^*$ та деякого $\bar{a} \in R/\mathcal{L}(R)$. Якщо a – прообраз елемента $\bar{a}$ у кільці R, то за твердженням 1.1 $a^2 = \mu a$ для деякого $\mu \in \mathbf{Z}^*$. Нехай j – довільний елемент із $\mathcal{L}(R)$. Якщо $k \in \{j\} \cap \{a\}$, то $k = \nu j = \xi a$ для деяких $\nu, \xi \in \mathbf{Z}$, а тому $\xi^2 a^2 = \nu^2 j^2 = 0$, звідки $a^2 = 0$, що неможливо. Отже, $\{j\} \cap \{a\} = 0$ та $aj = 0$.

Окрім того, усі елементи із $R \backslash \mathcal{L}(R)$ мають тип K_7 /див. твердження 1.1/. Тому для $j \in \mathcal{L}(R)$ маємо $(j + a)^2 = \delta(j + a)$ де $\delta \in \mathbf{Z}$. Звідси випливає, що $ja - \delta j = \delta a - a^2 \in \{a\} \cap \{j\}$, а отже, $ja = \delta j$, $\delta a = a^2 = \mu a$ та $\delta = \mu$. Тому $ja = \delta j$, $\delta a = a^2$ і R – кільце типу 3). Необхідність доведена.

Достатність. Кільце R типу 1, та 2, – гамільтонове. Нехай R – кільце типу 3, x – який-небудь його елемент. Тоді $x = i + \nu t$ для деяких $i \in J$, $\nu \in \mathbf{Z}$; і для довільного елемента $j + \rho t$, де $j \in J$, $\rho \in \mathbf{Z}$, маємо

$$x(j + \rho t) = \rho\beta(i + \nu t) = \rho\beta x \in \{x\},$$

тобто R – праве гамільтонове кільце. Теорема доведена.

3. Періодичні праві гамільтонові неніль-кільця

ТЕОРЕМА 3.1. *Нехай* R – *періодичне неніль-кільце. Тоді* R – *праве гамільтонове, якщо і тільки якщо воно належить до одного із типів:*

1) $R \cong \sum_{\alpha}^{\oplus} \mathbf{Z}/p_{\alpha}^{n_\alpha}\mathbf{Z}$ – *пряма сума кілець* $\mathbf{Z}/p_{\alpha}^{n_\alpha}\mathbf{Z}$ /$n_\alpha \in \mathbf{N}$/, *яку беруть за різними простими* p_α;

2) $R = T + \Phi$, $T = \sum^{\oplus}_{p \in I_1} \mathcal{L}_p$ – *пряма сума правих гамільтонових кіль-p-кілець,* $\Phi = \sum^{\oplus}_{p \in I_2} \{e_p\}$, $\{e_p\} \cong \mathbf{Z}/p^{n_p}\mathbf{Z}$ /$n_p \in \mathbf{N}$/, *кожна із прямих сум береться за різними простими* $p, T \cap \Phi = 0, \Phi T = 0$ *причому для* $q \in I_1 \cap I_2$ $n_q = 1$ *і або* $\mathcal{L}_q e_q = e_q \mathcal{L}_q = 0$ *або* $\mathcal{L}_q^2 = 0$ *та* $te_q = t$ *для кожного елемента* $t \in \mathcal{L}_q$.

Доведення. Необхідність. Нехай R – праве гамільтонове кільце. Якщо радикал Левицького $\mathcal{L}(R)$ кільця R є ненульовий, то R – кільце типу 1.

Тому надалі вважаємо, що $\mathcal{L}(R) \neq 0$. Припустимо спочатку також, що адитивна група R^+ є p-група для деякого простого p. Якщо r – нільпотентний елемент із R, то підкільце $\{r\}$ – скінченне [25, лема 1]. Тоді внаслідок [25, наслідок 1] підкільце $\{r\}$ містить ідемпотент e. Крім того, знайдеться такий ідеал M [23, наслідок 3], що $R = M + \{e\}$, $M \cap \{e\} = 0$. Якщо в M міститься нільпотентний елемент, то, міркуючи аналогічно, отримаємо, що M містить ідемпотент $e_1 \neq 0$. Але тоді сума $\{e\} + \{e_1\}$ – пряма. Справді, оскільки $eM \subseteq \{e\} \cap M$, то $eM = 0$ та $ee_1 = 0, e_1 e = e_1^2 e = e_1 e e_1 = 0$. І тому $\{e\} \oplus \{e_1\}$ – комутативне гамільтонове кільце, а отже, U – кільце, що суперечить [25, лема 7]. Отже, M містить тільки нільпотентні елементи. Внаслідок [24, лема 9] M – нільпотентне кільце. Окрім того, $\{e\} \cong \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ /$n \in \mathbf{N}$/.

Уточнимо будову кільця $M + \{e\}$. Якщо $Me = 0$ та M – праве гамільтоновпе кільце, то $R = M \oplus \{e\}$ – праве гамільтонове кільце при $n = 1$. Тому припустимо, що $Me \neq 0$. Тоді для деякого елемента $m \in M$ індекса нільпотентності s /$s > 1$/ маємо $me = \gamma_1 m + \gamma_2 m^2$, де γ_1, γ_2 – деякі цілі числа. Оскільки $me \neq 0$ та $me = me^2 = \gamma_1 me$ то $(\gamma_1, p) = 1$. Припустимо, що $s > 2$. Тоді

$$0 = mem^{s-2} = \gamma_1 m^{s-1} + \gamma_2 m^s = \gamma_1 m^{s-1}.$$

звідки $m^{s-1} = 0$ всупереч припущенню. Отже, $s = 2$ і тоді для будь-якого $t \in M$ $\gamma_1 mt = met = 0$, звідки $mt = 0$ та $M^2 = 0$. Але тоді $m = me$. І якщо $de = 0$ для деякого $d \in M$, то $0 \neq me = (m + d)e$ і, як і вище, $(m + d)e = \kappa(m + d)$ для деякого $\kappa \in \mathbf{Z}^*$, а звідси $d = 0$. Крім того, легко бачити, що $n = 1$.

Нехай тепер R – довільне періодичне кільце. Тоді його адитивна група R^+ є прямою сумою силовських p_i-підгруп R_{p_i}. Очевидно, R_{p_i} – ідеал кільця R, причому $R_{p_i} = \mathcal{L}(R_{p_i})$, або $R_{p_i} = \{e_{p_i}\} \cong$

$\mathbf{Z}/p_i^{n_i}\mathbf{Z}$ $/n_i \in \mathbf{N}/$, або $R_{p_i} = \mathcal{L}(R_{p_i}) + \{e_{p_i}\}$ $/i$ тоді $n_i = 1/$. В останньому випадку також на основі доведеного вище $\mathcal{L}(R_{p_i}) \cap \{e_{p_i}\} = 0, e_{p_i}\mathcal{L}(R_{p_i}) = 0, \{e_{p_i}\} \cong \mathbf{Z}/p_i\mathbf{Z}$, причому або $\mathcal{L}(R_{p_i})e_{p_i} = 0$, або $\mathcal{L}(R_{p_i})^2 = 0$ та $te_{p_i} = t$ для кожного елемента $t \in \mathcal{L}(R_{p_i})$. Покладемо $T = \sum_{p_i \in I_1}^{\oplus} \mathcal{L}_{p_i}$, $\Phi = \sum_{p_i \in I_2}^{\oplus} \{e_{p_i}\}$, де $I_1 \cup I_2$ – множина всіх тих простих чисел, для яких R^+ володіє ненульовою силовською p-підгрупою. Тоді, очевидно, $\Phi T = 0$, і оскільки $R \neq \mathcal{L}(R)$, то I_1 та I_2 непорожні множини. Необхідність доведена.

Достатність. Легко бачити, що кільце типу 1 – гамільтонове. Тому нехай R – кільце типу 2. Очевидно, $R = \mathcal{F}(R) = \sum_i^{\oplus} R_{p_i}$ – пряма сума p_i-кілець. Тому за наслідком 1.7 досить довести, що R_{p_i} – праве гамільтонове кільце.

Якщо $R_{p_i} = \mathcal{L}(R_{p_i})$, або $R_{p_i} \cong \mathbf{Z}/p_i^{n_i}\mathbf{Z}$ $/n_i \in \mathbf{N}/$, або $R_{p_i} = \mathcal{L}(R_{p_i}) \oplus \{e_{p_i}\}$ $/n_i = 1/$, то R_{p_i} – праве гамільтонове кільце. Тому нехай $R_{p_i} = \mathcal{Z}(R_{p_i}) + \{e_{p_i}\}$; і ця сума непряма, а отже, $\mathcal{L}(R_{p_i})^2 = 0$.

Якщо x – довільний елемент із R_{p_i}, то $x = l + f$ для деяких $l \in \mathcal{L}(R_{p_i})$, $f \in \{e_{p_i}\}$, а тому $xe_{p_i} = le_{p_i} + fe_{p_i} = l + f \in \{x\}$, $xl_1 = ll_1 + fl_1 = 0 \in \{x\}$, де $l_1 \in \mathcal{L}(R_{p_i})$. Це означає, що R_{p_i} – праве гамільтонове кільце. Теорема доведена.

4. Змішані праві гамільтонові ніль-кільця

Теорема 4.1. *Нехай R – змішане ніль-кільце. Тоді R – праве гамільтонове, якщо і тільки якщо $R^2 = \sum_p^{\oplus} R_p$, $R_p^2 = 0$, $pR_p = 0$, пряма сума береться за різними простими p, $\operatorname{Ann}_l R = \{i \in R \mid i^2 = 0\}$.*

Доведення. Необхідність. Нехай R – праве гамільтонове ніль-кільце зі змішаною адитивною групою R^+. Тоді фактор-кільце $R/\mathcal{F}(R)$ без скруту і внаслідок теореми 2.1 $R^2 \subseteq \mathcal{F}(R)$. Крім цього, $\mathcal{F}(R) = \sum_p^{\oplus} \mathcal{F}_p$ – пряма сума така, що $\mathcal{F}_p^+$ – силовська p-підгрупа групи $\mathcal{F}(R)^+$.

Нижче всюди в доведенні k, t – довільні p-елементи із R^+, b – довільний елемент нескінченного порядку, причому $b^2 = 0$. Тоді зі співвідношень $b \notin \mathcal{F}(R)$, $bt = \delta b$, де δ – деяке ціле число, отримуємо, що $bt = 0$. Тепер на підставі твердження 1.1 $(k + b)^3 = 0$ та $\theta(k + b)^2 = 0$ для деякого ненульового цілого θ, а тому $\theta(k + b)t = \theta\xi(k + b)$, $\theta kt + \theta bt - \theta\xi k = \theta\xi b$ для деякого $\xi \in \mathbf{Z}$. І оскільки ліва частина останньої рівності – це елемент скінченного порядку, то $\xi = 0$

Але тоді $\theta kt = 0$, і оскільки θ вільне від квадратів, а $k, t \in \mathcal{F}_p$, то

$$pkt = 0 .$$

Аналогічно доводиться, що $pka = 0$ для будь якого елемента a нескінченного порядку.

Нехай надалі ω - довільний елемент кільця R. Оскільки знайдеться таке вільне від квадратів ціле число π, що $\pi a^2 = 0$, і такі цілі числа α, β, що $a\omega = \alpha a + \beta a^2$, то $\pi\alpha a = \pi a\omega$ - елемент скінченного порядку, а отже, $\alpha = 0$. Це показує, що $a\omega = \beta a^2$ та $\pi aR = 0$. І $b\omega = \gamma b$, де $\gamma \in \mathbb{Z}$, $b\omega \in \mathcal{F}(R)$ та $b \notin \mathcal{F}(R)$ також маємо $b\omega = o$ та $bR = 0$.

Нехай тепер d - такий елемент скінченного порядку, що $d^2 = 0$. Тому знайдуться такі $\kappa \in \mathbb{Z}$ та $\rho \in \mathbb{Z}^*$, що $\rho(d + b)^2 = \rho\kappa(d + b)$ /можливо, $\rho = 1$/. І взявши до уваги, що $db = \mu_1 d$ для деякого цілого μ_1, отримуємо

$$(d + b)b = \xi_1(d + b) + \eta_1(d + b)^2$$

для певних $\xi_1, \eta_1 \in \mathbb{Z}$ та

$$\rho(d + b)b = \rho(\xi_1 + \kappa\eta_1)(d + b).$$

звідки $\rho(\xi_1 + \kappa\eta_1) = 0$ та $\rho db = 0$. Далі, аналогічно

$$(d + \rho b)b = \xi_2(d + \rho b) + \eta_2(d + \rho b)^2$$

для певних $\xi_2, \eta_2 \in \mathbb{Z}$, звідки

$$\xi_2(d + \rho b) = db \in \mathcal{F}(R),$$

а отже, $\xi_2 = 0$, $db = 0$. Тоді, враховуючи доведене вище, із рівності

$$(d + b)\omega = \xi_3(d + b) + \eta_3(d + b)^2,$$

де $\xi_3, \eta_3 \in \mathbb{Z}$, отримуємо $\xi_3(d+b) = d\omega \in \mathcal{F}(R)$, звідки $\xi_3 = 0$ та $d\omega = 0$. Ми довели, що $\mathrm{Ann}_l R = \{i \in R |\ i^2 = 0\}$.

Далі, оскільки

$$(k + pa)t = \mu(k + pa) + \lambda(k + pa)^2$$

для певних цілих μ та λ, то $\mu pa \in \mathcal{F}(R)$, а тому $\mu = 0$. Звідси також випливає, що

$$kt = \lambda k^2 \in \{k^2\}.$$

Використовуючи цей факт, доведемо, що $|\mathcal{F}_p^2| \leqslant p$. Справді, припустимо, що $\mathcal{F}_p^2 \neq 0$ і знайдуться такі елементи $k, t \in \mathcal{F}_p$ для яких $k^2 \neq 0$, $t^2 \neq 0$ та $\{k^2\} \cap \{t^2\} = 0$. Тоді $tk = \phi t^2$, $(k+t)t = \psi(k+t)^2$ для певних $\phi, \psi \in \mathbb{Z}$, а отже,

$$(\lambda - \psi - \psi\lambda)k^2 = (-1 + \phi\psi + \psi)t^2,$$

звідки внаслідок доведеного раніше і зроблених припущень маємо систему конгруенцій

$$\begin{cases} \lambda - \psi - \psi\lambda \equiv 0 (mod p), \\ -1 + \psi + \psi\phi \equiv 0 (mod p). \end{cases}$$

з другої конгруенції цієї системи випливає, що $\psi \not\equiv 0 (mod p)$, а отже, $\lambda \not\equiv 0 (mod p)$. Окрім цього, із системи конгруенцій також маємо $\psi(\phi\lambda - 1) \equiv 0 (mod p)$, звідки випливає $\phi\lambda \equiv 1 (mod p)$. Але тоді $(\lambda k - t)^2 = (1 - \lambda\phi)t^2 = 0$, а тому також $\lambda kt - t^2 = (\lambda k - t)t = 0$, і звідси $t^2 = \lambda^2 k^2 \neq 0$, що суперечить припущенню. Отже, якщо $k^2 \neq 0$, $t^2 \neq 0$, то $\{k^2\} = \{t^2\}$, а отже, $|\mathcal{F}_p^2| = p$. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай t, r – довільні елементи кільця R. Якщо $t^2 = 0$, то $tR \leqslant \{t\}$. Тому нехай надалі $t^2 \neq 0$.

Для елемента t із $\mathcal{F}_p$, очевидно, $\{t^2\} = \mathcal{F}_p^2$ і $tr = 0$ або $0 \neq tr \in R^2 \cap \mathcal{F}_p = R_p = \{t^2\} \leqslant \{t\}$. Звідси легко випливає, що для будь-якого елемента скінченного порядку t маємо $tr \in \{t^2\}$.

Тому нехай $|t| = \infty$. Оскільки $t^2 \in \mathcal{F}(R)$, то за умовою теореми $|t^2| = \pi$ для деякого вільного від квадратів $\pi \in \mathbb{Z}^*$. Тоді, очевидно, $(\pi t)^2 = 0$ та $\pi tR = 0$. Нехай $\pi = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ – канонічний розклад числа π у добуток простих чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тоді із умови $|t^2| = \pi$ випливає, що

$$\{t^2\} = \mathcal{F}_{p_1}^2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{F}_{p_n}^2, \ \mathcal{F}_{p_i}^2 \neq 0 \ /i = \overline{1,n}/.$$

А з співвідношення $\pi tR = 0$, тобто

$$tR \leqslant \sum_{i=1}^{n} \oplus \mathcal{F}_{p_i}^2,$$

також випливає, що $tR \leqslant \{t\}$.

Будь-яке підкільце із R, породжене одним елементом, є правим ідеалом. Це означає, що R – праве гамільтонове кільце. Теорема доведена.

5. Змішані праві гамільтонові кільця з періодичним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ та радикалом Левицького $\mathcal{L}(R)$

Теорема 5.1. *Нехай R – змішане кільце з періодичним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ за радикалом Левицького $\mathcal{L}(R)$. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо $R = T \oplus \Phi$ – пряма сума неперіодичного правого гамільтонового ніль кільця T та кільця $\Phi = \sum_p^{\oplus} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, де пряма сума береться за різними простими p.*

Доведення. Достатність випливає внаслідок леми 1.8.

Необхідність. Нехай r – довільний елемент кільця R. За теоремою 3 [25]

$$\{r\} = S \oplus P,$$

де S – нільпотентне кільце, породжене одним елементом, а $P \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ для певного $m \in \mathbb{Z}^*$. На основі цього

$$R = \mathcal{F}(R) + \mathcal{L}(R)$$

і оскільки $R/\mathcal{F}(R)$ – ніль-кільце без скруту, то внаслідок теореми 2.1 $R^2 \subseteq \mathcal{F}(R)$. Якщо $\mathcal{F}(R) \cap \mathcal{L}(R) = 0$, то $R = \mathcal{F}(R) \oplus \mathcal{L}(R)$ та $\mathcal{L}(R)^2 = 0$, і за твердженням 1.5 $\mathcal{F}(R) = \sum_p^{\oplus} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – пряма сума за різними простими p. Але тоді $\mathcal{F}(R)$ та $\mathcal{L}(R)$ гамільтонові кільця, а тому кільце також гамільтонове.

Припустимо, що $\mathcal{F}(R) \cap \mathcal{L}(R) \neq 0$. Тоді $\mathcal{F}(R) \neq \mathcal{L}(\mathcal{F}(R)) \neq 0$ і будова кільця $\mathcal{F}(R)$, описана теоремою 3.1 /див. тип 2/, із якої випливає, що

$$R = \mathcal{F}(R) + \mathcal{L}(R) = M + \Phi,$$

$M \cap \Phi = 0$, $\Phi M = 0$, де M – змішане праве гамільтонове ніль-кільце, $\Phi \cong \sum_p^{\oplus} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – пряма сума за різними простими p.

Якщо a – елемент нескінченного порядку із M, e – одиниця кільця Φ, то очевидно, $ae = \delta a^2$ для певного $\delta \in \mathbb{Z}$ і, як наслідок,

$$ae = ae^2 = \delta a^2 e = \delta aea,$$

Але тоді для будь-якого елемента $t \in \mathcal{F}(R)$ маємо $|a+t| = \infty$, а тому $te = (e+t)e = 0$. Це означає, що $R = M \oplus \Phi$. Теорема доведена.

6. Змішані праві гамільтонові кільця R з фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ без скруту

Нагадаємо: якщо порядок кожного періодичного елемента змішаного кільця є степінь простого числа p, то таке кільце називається $\bar{p}$-кільцем.

Якщо конгруенція $x^2 \equiv a(mod p)$ має хоч би один розв'язок, то a називається квадратичним лишком за модулем p; в іншому разі a називається квадратичним нелишком за модулем p.

ТЕОРЕМА 6.1. *Нехай R – змішане кільце з фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ без скруту. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо*

$$R = \mathcal{L}(R) + \{a\},$$

$a^3 = \nu a^2$, $|a^2 - \nu a| = \pi$, $\pi, \nu \in \mathbf{Z}^*$, π *вільне від квадратів і ділить* ν

$$\mathcal{L}(R) = \sum_p{}^{\oplus} \mathcal{L}_p$$

змішане або періодичне ніль-кільце, яке є прямою сумою ідеалів за різними простими p, кожен з яких є p-кільце або змішане $\bar{p}$-кільце, ізоморфне одному з кілець:

1) кільцю K, де $K^2 = 0$, $aK = 0$ та $la = \nu l$ для кожного елемента $l \in K$;

2) кільцю K, де $K = \{u\} + \operatorname{Ann} K$, $u^3 = pu^2 = 0$, $a \operatorname{Ann} K = 0$, $u^2 \neq 0$, $la = \nu l$ для кожного елемента $l \in \operatorname{Ann} K$ і виконуються умови:

а) якщо p не ділить π, то $au = 0$;

б) якщо p ділить π, то

$$u^2 = x\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a);$$

$$au = \epsilon\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a);$$

$$ua = \delta\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a) + \nu u;$$

$x, \epsilon, \delta \in \mathbb{Z}$, причому

$б_1$) $(x, p) = 1$;

$б_2$) якщо $p > 2$, то $\frac{x}{p}(\frac{x}{p}(\delta + \epsilon)^2 - 4x)$ квадратичний нелишок за модулем p;

$б_3$) якщо $p = 2$, то число $\delta + \epsilon$ непарне;

3) кільцю K, де $K = \{u, w\} + \operatorname{Ann} K$, $u^3 = pu^2 = 0$, $w^3 = pw^2 = 0$, $w^2 = \delta u^2 \neq 0, uw = \delta_1 u^2$, $wu = \delta_2 u^2$, $\delta, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}$, p не ділить π /а отже, $aK = 0$/, $la = \nu l$ для кожного елемента $l \in K$, причому виконуються умови:

а) $(\delta, p) = 1$;

б) якщо $p > 2$, то $(\delta_1 + \delta_2)^2 - 4\delta$ квадратичний нелишок за модулем простого p;

в) якщо $p = 2$, то число $\delta_1 + \delta_2$ непарне.

Доведення. Необхідність. Нехай R – змішане праве гамільтонове кільце з фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ без скруту. Тоді за наслідком 1.3 $R/\mathcal{L}(R)$ комутативне, а тому $R/\mathcal{L}(R) = \{\bar{a}\}$ для деякого елемента $\bar{a}$ нескінченного порядку. Звідси

$$R = \{\mathcal{L}(R), a\} = \mathcal{L}(R) + \{a\},$$

де a – прообраз елемента $\bar{a}$ в кільці R. За твердженням 1.1 елемент a має тип K_7 або K_8. Крім того, очевидно, $\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{L}(R)$ та $R^2 \not\subseteq \mathcal{F}(R)$. Оскільки для довільного елемента $c \in \mathcal{L}(R)$

$$ac = \alpha_1 a + \beta_1 a^2 \ ,$$

де α_1, β_1 – деякі цілі числа, та

$$\pi\alpha_1 a + \pi\beta_1 \nu a = \pi ac \in \mathcal{L}(R),$$

то $\alpha_1 + \beta_1 \nu = 0$ та $ac = \beta_1(a^2 - \nu a) \in \{a^2 - \nu a\}$.

Нехай f – довільний елемент із $\mathcal{F}(R)$. Тоді

$$(f + \nu|f|a)a = \xi(f + \nu|f|a) + \eta(f + \nu|f|a)^2$$

для деяких $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$, а звідси

$$fa - \xi f - \eta f^2 = -|f|\nu^2 a + \xi|f|\nu a + \eta|f|^2\nu^3 a,$$

і, як наслідок, $\xi = \nu - \eta\nu^2|f|$ та $fa = \nu f + \eta f^2$.
Аналогічно, якщо d – довільний елемент нескінченного порядку із $\mathcal{L}(R)$, то внаслідок теореми 2.1 /див. тип 3/ також

$$da = \nu d + \eta_1 d^2$$

для деякого $\eta_1 \in \mathbf{Z}$. Крім того, для довільних $l \in \mathcal{F}_p$ та $t \in \mathcal{L}(R)$ із рівності

$$(l + \nu a)t = \alpha(l + \nu a) + \beta(l + \nu a)^2,$$

де $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, одержуємо

$$-(\alpha\nu a + \beta\nu^2 a^2) = -lt + \alpha l + \beta l^2 + \beta\nu^2 l + \beta\beta_2 \nu l^2 \in \mathcal{L}(R),$$

де $la = \nu l + \beta_2 l^2$, $\beta_2 \in \mathbf{Z}$, звідки випливає, що

$$lt \in \{l^2\}. \qquad (6.1)$$

Покладемо $u = \mu a - c$, де $\mu \in \mathbf{Z}$. Припустимо, що π не ділить μ. Враховуючи, що $ca = \nu c + \theta c^2$ для деякого $\theta \in \mathbf{Z}$, маємо

$$u^2 = \mu\nu u + (1 - \mu\theta)c^2$$

і на підставі цього для деякого $\gamma \in \mathbf{Z}$

$$uc = \gamma(1 - \mu\theta)c^2 \in \{c^2\}. \qquad (6.2)$$

$ac \in \{c^2\}$, а отже, якщо $c^2 = 0$, то $ac = 0$. Із (6.1) та (6.2) також випливає, що кожне підкільце із $\mathcal{L}(R)$ є двосторонній ідеал кільця R та $\mathcal{L}(R)$ – змішане /або періодичне/ гамільтонове ніль-кільце.

Припустимо, що $a^2 = \nu a$. Оскільки $ca = \nu c + \theta c^2$, то покладемо $u_1 = a - \theta c$; тоді із рівностей

$$u_1^2 = a^2 - \theta ac - \theta ca + \theta^2 c^2 = \nu u_1$$

випливає, що $u_1 t = 0$ для будь-якого $t \in \mathcal{L}(R)$, а отже, $\theta ct = at = 0$, звідки /при $t = c$/ маємо $ca = \nu c$. Тому, $ca - \nu c \in \{a^2 - \nu a\}$ для будь-якого елемента $c \in \mathcal{L}(R)$.

Розглянемо два можливі випадки.

1°. Нехай $\mathcal{L}(R)$ – змішане кільце. Тоді згідно з [11]

$$\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}_{\bar{p}_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\bar{p}_\alpha} \oplus \ldots \text{ ——}$$

/кільцева/ пряма сума $\bar{p}_\alpha$-ідеалів /принаймні один з яких змішаний/, причому кожний змішаний $\bar{p}_\alpha$-ідеал $\mathcal{L}_{\bar{p}_\alpha}$ ізоморфний одному з кілець:

A_1) змішаному $\bar{p}$-кільцю T, де $T^2 = 0$;

$Б_1$) змішаному $\bar{p}$-кільцю T, де $T = \{u\} + \operatorname{Ann} T$, $u^3 = pu^2 = 0$, причому якщо $|u| < \infty$, то $\operatorname{Ann} T$ – змішане підкільце;

B_1 змішаному $\bar{p}$-кільцю T, де $T = \{u, w\} + \operatorname{Ann} T$, $u^3 = pu^2 = 0$, $w^3 = pw^2 = 0$, $w^2 = \delta u^2 \neq 0$, $uw = \delta_1 u^2$, $wu = \delta_2 u^2$, $\delta, \delta_1, \delta_2 \in \mathbf{Z}$, причому

а) $(\delta, p) = 1$;

б) якщо $p > 2$, то число $(\delta_1 + \delta_2)^2 - 4\delta$ квадратичний нелишок за модулем простого числа p;

в) якщо $p = 2$, то число $\delta_1 + \delta_2$ непарне. Зрозуміло, що в усіх випадках, якщо $l^2 = 0$, то $la = \nu l$ та $a \cdot \operatorname{Ann} T = 0$.

Розглянемо тип $Б_1$. Якщо p не ділить π, то $au = 0$. Тому припустимо, що p ділить π. Тоді

$$u^2 = x\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a);$$

$$au = \epsilon\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a);$$

$$ua = \nu u + \delta\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a)$$

для деяких цілих чисел x, ϵ, δ, причому $(x, \delta) = 1$. Припустимо, $t = sa + u$, де $s \in \mathbf{Z}$, $s > 1$, $(s, p) = 1$. Тоді $t^2 - s\nu t = t_0$, де

$$t_0 = s^2(a^2 - \nu a) + \frac{\pi}{p}(\delta s + \epsilon s + x)(a^2 - \nu a).$$

Якщо силовська p-підгрупа адитивної групи $\{t^2 - s\nu t\}^+$ нульова, то $\frac{\pi}{p}t_0 = 0$, звідси випливає конгруенція

$$s^2 + \frac{\pi}{p}s(\delta + \epsilon) + \frac{\pi}{p}x \equiv 0 (mod p).$$

Але тоді із

$$ta = \nu t + s(a^2 - \nu a) + \delta\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a)$$

та

$$tu = \frac{\pi}{p}(s\epsilon + x)(a^2 - \nu a)$$

також випливають конгруенції

$$s + \frac{\pi}{p}\delta \equiv 0(mod p);$$

$$s\epsilon + x \equiv 0(mod p),$$

а це, як легко бачити, одночасно для всіх $s > 1$ неможливо. Тому

$$\frac{\pi}{p}(\frac{\pi}{p}(\delta + \epsilon))^2 - 4x)$$ —

квадратичний нелишок за модулем p; якщо ж $p = 2$, то $\delta + \epsilon$ непарне число. Отже, T – кільце типу 2, із умови теореми.

Перейдемо до розгляду типу B_1. Припустимо, що p ділить π. Тоді

$$\frac{\pi}{p}(a^2 - \nu a) = \delta_0 u^2;$$

$$au = \theta_1 u^2;$$

$$aw = \theta_2 u^2, \ ua = \theta_3 u^2 + \nu u, \ wa = \theta_4 u^2 + \nu w,$$

для деяких цілих $\delta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, а отже,

$$(\phi a + \psi u + \rho w)^2 = \nu\phi(\phi a + \psi u + \rho w) + \phi^2 p\epsilon_2(a^2 - \nu a) + t_1,$$

де $t_1 = t_1(\phi, \psi, \rho) = \phi^2\delta_0\epsilon_1 + \psi^2 + \rho^2\delta + \phi\psi(\theta_1 + \theta_3) + \phi_\rho(\theta_2 + \theta_4) + \psi_\rho(\delta_1 + \delta_2)$, а ϵ_1 та ϵ_2 такі цілі числа, що $\frac{\pi}{p}\epsilon_1 + p\epsilon_2 = 1$. Оскільки за теоремою Шевалле /див., наприклад, [27, с. 13] або [28, с. 176]/ конгруенція $t_1 \equiv 0(mod p)$ має ненульовий розв'язок $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, то $t_1(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \equiv 0$ та адитивна підгрупа

$$\{(\alpha_0 a + \beta_0 u + \gamma_0 w) - \nu\alpha_0(\alpha_0 a + \beta_0 u + \gamma_0 w)\}^+$$

має нульову силовську p-підгрупу, що, очевидно, неможливо. Отже, p не ділить π та $au = aw = 0$, і T – кільце типу 3 із умови теореми.

2°. Припустимо тепер, що $\mathcal{L}(R)$ – періодичне. Нехай t – який-небудь елемент із $\mathcal{L}_p$. Тоді оскільки

$$(a+t)t = \xi_2(a+t) + \eta_2(a+t)^2$$

для деяких $\xi_2, \eta_2 \in \mathbf{Z}$ та для деякого вільного від квадратів числа $\mu_1 \in \mathbf{Z}$ знайдеться таке число $\omega \in \mathbf{Z}^*$, що

$$\mu_1(a+t)^2 = \mu_1\omega(a+t),$$

то, приймаючи μ_2 рівним найменшому спільному кратному чисел μ_1 та π, одержуємо

$$\mu_2(at + t^2) = (\mu_2\xi_2 + \mu_2\omega\eta_2)(a+t),$$

звідси випливають рівності

$$\mu_2(\xi_2 + \omega\eta_2) = 0;$$

$$\mu_2 t^2 = 0.$$

Отже, $p\mathcal{L}_p^2 = 0$. Внаслідок доведеного вище та результатів із [13] $\mathcal{L}_p$ кільце типу R_1 /у розумінні [13]/, тобто воно ізоморфне одному із кілець:

A_2) p-кільцю K, де $K^2 = 0$, причому $aK = 0$ та $la = \nu l$ для кожного $l \in K$;

B_2) p-кільцю K, де $K = \{k\} + \operatorname{Ann} K$, $k^3 = pk^2 = 0$, причому $a \cdot \operatorname{Ann} K = 0$ та $la = \nu l$ для кожного $l \in \operatorname{Ann} K$;

B_2) p-кільцю K, де $K = \{k_1, k_2\} + \operatorname{Ann} K$, $k_i^3 = pk_i^2 = 0$, $k_ik_j = \alpha_{ij}k_i^2/i,j = 1,2/, \alpha_{ij} \in \mathbf{Z}, a \cdot \operatorname{Ann} K = 0$ та $la = \nu l$ для кожного $l \in \operatorname{Ann} K$, причому при $p > 2$ число $(\alpha_{12} + \alpha_{21})^2 - 4\alpha_{22}$ – квадратичний нелишок за модулем p, а при $p = 2$ числа $\alpha_{12} + \alpha_{21}$ та α_{22} непарні. Міркуваннями, аналогічними як і у випадку змішаного підкільця $\mathcal{L}(R)$, показано, що $\mathcal{L}_p$ є p-кільце одного із типів 1–3. Необхідність доведена.

Достатність. Очевидно, досить показати, що $R = \mathcal{L}_p + \{a\}$ – праве гамільтонове кільце для підкілець $\mathcal{L}_p$ типів 1–3. Оскільки для кільця

$\mathcal{L}_p$ типу 1) це очевидно, то нехай спочатку $\mathcal{L}_p$ – кільце типу 2), $t = sa + ku + l$ – довільний елемент із R, де $s, k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathrm{Ann}(\mathcal{L}_p)$. Тоді

$$t^2 = svt + s^2(a^2 - va) + sk\frac{\pi}{p}(\epsilon + \delta)(a^2 - va) + k^2x\frac{\pi}{p}(a^2 - va).$$

Нехай p ділить s, а тому, $s(a^2 - va) \in \{t\}$. Тоді, якщо p ділить k, то $ta = vt + s(a^2 - va)$, $tu = 0$, а отже, $\{t\}$ – правий ідеал. Якщо ж p не ділить k, то $k^2x\frac{\pi}{p}(a^2 - va) \neq 0$, а отже, $\{\frac{\pi}{p}(a^2 - va)\} \leqslant \{t\}$. І оскільки

$$ta = vt + s(a^2 - va) + k\delta\frac{\pi}{p}(a^2 - va);$$

$$tu = (s\epsilon + kx)\frac{\pi}{p}(a^2 - va),$$

то і в цьому випадку $\{t\}$ – правий ідеал.

Тому нехай p не ділить s. Тоді із $б_1$) та $б_2$) випливає, що

$$\{\frac{\pi}{p}(a^2 - va)\} = \{\frac{\pi}{p}(s^2 + sk\frac{\pi}{p}(\epsilon + \delta) + k^2x\frac{\pi}{p})(a^2 - va)\} \leqslant \{t\}$$

та $\{ps(a^2 - va)\} \leqslant \{t\}$, на основі чого

$$ta = vt + s(a^2 - va) + k\delta\frac{\pi}{p}(a^2 - va) \in \{t\},$$

$$tu = (s\epsilon + kx)\frac{\pi}{p}(a^2 - va) \in \{t\}$$

і $\{t\}$ – правий ідеал.

Тепер розглянемо підкільце $R = \mathcal{L}_p + \{a\}$, де $\mathcal{L}_p$ – кільце типу 3). Нехай $t = sa + ku + mw + l$ – довільний елемент із R, де $s, k, m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathrm{Ann}(\mathcal{L}_p)$. Аналогічними міркуваннями неважко показати, що $\{t\}$ –правий ідеал. Теорема доведена.

7. Змішані праві гамільтонові кільця зі змішаним фактор-кільцем за радикалом Левицького

ТЕОРЕМА 7.1. *Нехай R – змішане кільце зі змішаним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ за радикалом Левицького $\mathcal{L}(R)$. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо $R = R_1 \oplus R_2$ – пряма сума кільця $R_2 \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ та змішаного правого гамільтонового кільця $R_1 = \mathcal{L}(R_1) + \{a\}$ з фактор-кільцем $R_1/\mathcal{L}(R_1)$ без скруту, причому $|a| = \infty$, $a^3 = \nu a^2$, $|a^2 - \nu a| = \pi$, де π, m – ненульові цілі числа, вільні від квадратів, $\nu \in \mathbf{Z}^*$ та π ділить ν.*

Доведення. Необхідність. За наслідком 1.3 фактор-кільце $R/\mathcal{L}(R)$ комутативне. Із [10, 12] випливає, що $R/\mathcal{L}(R) = \{\overline{a}\}$, де $|\overline{a}| = \infty$, $\overline{a}^2 \neq 0$. Тому $R = \mathcal{L}(R) + \{a\}$, де a – прообраз елемента $\overline{a}$ у кільці R, причому, як випливає із твердження 1.1 /див. типи K_9 та K_{10}/,

$$\{a\} = \{a_1\} \oplus R_2,$$

$|a_1| = \infty$, $R_2 \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, m > 1$, $a_1^3 = \nu a_1^2$, $|a_1^2 - \nu a_1| = \pi$ /можливо, $\pi = 1$/, $\pi \in \mathbf{Z}^*$, $\nu \in \mathbf{Z}^*$, числа m та π вільні від квадратів і діляться ν. Позначимо через R_1 підкільце $\{\mathcal{L}(R), a_1\}$. Зрозуміло, що $R = R_1 + R_2$ та $R_1/\mathcal{L}(R_1)$ – праве гамільтонове кільце без скруту. Крім цього, очевидно, $R_2 R_1 = 0$.

Нехай t – довільний елемент із $\mathcal{L}(R)$ індекса нільпотентності n. Тоді для одиничного елемента e кільця R_2 маємо $te = \alpha t + \beta t^2$, де $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$. Якщо $|t| = \infty$, то $\alpha t = te - \beta t^2$ /див. теорему 4.1/, а отже, $te = \beta t^2$ та $te = te^2 = \beta t^2 e = 0$. Тому нехай $t \in \mathcal{F}(R)$. І оскільки

$$(t + \pi a_1)e = \xi(t + \pi a_1) + \eta(t + \pi a_1)^2$$

для деяких $\xi, \eta \in \mathbf{Z}$, а отже,

$$\pi(\xi + \nu\eta)a_1 = te - \xi t - \eta t^2 - \eta\pi t a_1 - \eta\pi a_1 t \in \mathcal{F}(R),$$

то $\xi + \nu\eta = 0$,

$$te = -\nu\eta t + \eta t^2 + \eta\pi t a_1 + \eta\pi a_1 t,$$

і звідси, зважаючи на те, що m ділить ν,

$$te = te^2 = -\nu\eta te = 0.$$

Також $R_1R_2 = 0$ і $R = R_1 \oplus R_2$. Необхідність доведена.

Достатність. майже очевидна. Теорема доведена.

8. Праві гамільтонові ніль-p-кільця характеристики 0

Оскільки кожне праве гамільтонове кільце, очевидно, володіє однією із властивостей:

1) R – періодичне ніль-кільце;
2) R – періодичне неніль-кільце /див. теорему 3.1/;
3) R – кільце без скруту /див. теорему 2.1/;
4) R – змішане ніль-кільце /див. теорему 4.1/;
5) R – змішане неніль-кільце з періодичним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ /див. теорему 5.1/;
6) R – змішане неніль-кільце з фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ без скруту /див. теорему 6.1/;
7) R – змішане неніль-кільце зі змішаним фактор-кільцем $R/\mathcal{L}(R)$ /див. теорему 7.1/,

то для опису будови правих гамільтонових кілець залишається /див. також наслідок 1.9/ дослідити праві гамільтонові ніль-p-кільця B у випадках, коли

а) B – кільце характеристики 0;
б) B – кільце скінченної характеристики p^k /$k \in \mathbf{N}$/.

У цій роботі, використовуючи [9], ми охарактеризуємо тільки випадок 1а .

Дві наступні леми є легкими посиленнями лем 4.6.6 та 4.6.7 [9].

Лема 8.1. *Якщо R – праве гамільтонове p-кільце, то $x^3 \in \{x^2\}$.*

Лема 8.2. *Якщо R – праве гамільтонове кільце, x, y – елементи кільця R такі, що*

$$|y| \geqslant p^{2m}, \quad \text{де } p^m = |x|,$$

то $px^2 = 0$.

Доведення. Нехай $|y| = p^{2m+r}$ для деякого $r \in \mathbf{N}$. Оскільки

$$(px)x = \alpha px + \beta p^2 x^2$$

для деяких $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, то

$$(1 - \beta p)px^2 = \alpha px,$$

звідки випливає, що $px^2 \in \langle px \rangle$.

Припустимо, що $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 0$. Тоді оскільки

$$(px + p^m y)x = \xi(px + p^m y) + \eta(px + p^m y)^2$$

для деяких $\xi, \eta \in \mathbf{Z}$, то

$$px^2 - \xi px - \eta p^2 x^2 = \xi p^m y + \eta p^{2m} y^2,$$

причому ліва частина цієї рівності належить підгрупі $\langle px \rangle$, а права – підгрупі $\langle py \rangle$. Отже,

$$px^2 = \xi px + \eta p^2 x^2;$$

$$\xi p^m y + \eta p^{2m} y^2 = 0$$

і, як наслідок, p^m ділить ξ. Але тоді з першого рівняння випливає, що $px^2 = 0$

Тому тепер припустимо, що $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq 0$. Нехай

$$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \langle p^s x \rangle = \langle p^{r+m+s} y \rangle$$

для деякого $s \in \mathbf{Z}$ такого, що $0 \leqslant s < m$. Тоді для певних $r, \delta \in \mathbf{Z}$

$$p^{r+m+s} y = \delta p^s x,$$

причому $\delta \not\equiv 0 (mod p)$, і звідси

$$p^{s-1}(\delta px - p^{r+m+1} y) = 0.$$

Далі, оскільки

$$(\delta px - p^{r+m+1} y)x = \xi_1(\delta px - p^{r+m+1} y) + \eta_1(\delta px - p^{r+m+1} y)^2$$

для певних $\xi_1, \eta_1 \in \mathbf{Z}$, то

$$\delta px^2 = \xi_1(\delta px - p^{r+m+1} y) + \eta \delta^2 p^2 x^2, \qquad (7.1)$$

звідки

$$\xi_1 p^{r+m+1} y = \eta \delta^2 p^2 x^2 + \xi_1 \delta px - \delta px^2 \in \langle px \rangle \leqslant \langle x \rangle,$$

а отже, p^{s-1} ділить ξ_1. Але тоді із (7.1) випливає рівність

$$\delta px^2 = \eta \delta^2 p^2 x^2,$$

яка можлива тільки якщо $px^2 = 0$. Лема доведена.

ТЕОРЕМА 8.3. *Ніль-p-кільце R характеристики 0 є праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо R – майже нульове справа, тобто для всіх елементів $x \in R$ $x^3 = px^2 = 0$, $xR \leqslant \{x^2\}$.*

Доведення. Необхідність. Нехай R – праве гамільтонове ніль-p-кільце характеристики нуль. За лемою 8.2 $px^2 = 0$ для всіх елементів $x \in R$. Для певності нехай

$$|x| = p^r, \ |y| = p^s$$

для деяких $r, s \in \mathbf{N}$ та $t = \max\{r, s\} + 1$.

Виберемо в кільці R такий елемент z, щоб $|z| = p^{2t}$. Розглянемо можливі три випадки.

1. Нехай $\langle z \rangle \cap \{x\} = 0$. Покладемо $w = x + p^t z$. Тоді

$$xy = (x + p^t z)y = wy \in \{w\},$$

і оскільки для певних $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbf{Z}$

$$wy = \alpha_1 w + \beta_1 w^2 = \alpha_1(x + p^t z) + \beta_1 x^2,$$

то

$$xy - \alpha_1 x - \beta_1 x^2 = \alpha_1 p^t z \in \{x\} \cap \langle z \rangle,$$

а отже, p^t ділить α_1, і на підставі цього

$$xy = \beta_1 x^2 \in \{x^2\} \ .$$

2. Нехай $\langle x \rangle \cap \langle z \rangle = \langle p^k x \rangle \neq 0$. Тоді

$$p^{2t+k-r} z = \alpha p^k x \ ,$$

причому $\alpha \not\equiv 0 (mod p)$. Підставимо $w = \alpha x - p^{2t-r} z$. Маємо для певних $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbf{Z}$

$$\alpha xy = (\alpha x - p^{2t-r-1} z)y = wy = \alpha_2 w + \beta_2 w^2 =$$

$$= \alpha_2(\alpha x - p^{2t-r-1} z) + \beta_2 \alpha^2 x^2,$$

і звідси

$$p\alpha xy - p\alpha_2 \alpha x = -\alpha_2 p^{2t-r} z \in \langle x \rangle \cap \langle z \rangle,$$

а отже, p^k ділить α_2 та $\alpha_2(\alpha x - p^{2t-r}z) = 0$ Тому $\alpha xy = \beta_2\alpha^2x^2$ та $xy \in \{x^2\}$.

3.. Нехай $\langle z\rangle \cap \{x\} \neq 0$ та $\langle z\rangle \cap \langle x\rangle = 0$. Тоді для деяких цілих μ та θ маємо

$$p^{2t-1}z = \mu p^{r-1}x + \theta x^2.$$

Розглянемо два можливі підвипадки.

а) Спочатку припустимо, що $\mu \equiv 0(modp)$, $w = x + p^tz$. Тоді для деяких $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbf{Z}$

$$xy = (x + p^tz)y = wy = \alpha_3(x + p^tz) + \beta_3(x + p^tz)^2,$$

а отже,

$$pxy - p\alpha_3x = \alpha_3p^{t+1}z \in \langle x\rangle \cap \langle z\rangle,$$

і, як наслідок, p^{t-1} ділить α_3. На підставі цього для певного $\gamma \in \mathbf{Z}$

$$xy - \beta_3x^2 = \alpha_3p^tz = \gamma p^{2t-1}z = \gamma(\mu p^{r-1}x + \theta x^2) = \gamma\beta x^2,$$

звідки $xy \in \{x^2\}$.

б) Тепер нехай $\mu \not\equiv 0(modp)$. Підставимо $w = \mu x - p^{2t-r}z$. Тоді для деяких $\alpha_4, \beta_4 \in \mathbf{Z}$ маємо

$$\mu xy = (\mu x - p^{2t-r}z)y = wy = \alpha_4(\mu x - p^{2t-r}z) + \beta_4(\mu x - p^{2t-r}z)^2$$

та

$$p\mu xy - p\alpha_4\mu x = -\alpha_4p^{2t-r+1}z \in \langle px\rangle \cap \langle z\rangle,$$

а отже, p^{r-1} ділить α_4, а тому для деякого $\nu \in \mathbf{Z}$

$$\mu xy = \nu(\mu p^{r-1}x - p^{2t-1}z) + \beta_4\mu^2x^2 = (\beta_4\mu^2 - \theta\nu)x^2,$$

звідки $xy \in \{x^2\}$. Отже, $xy \in \{x^2\}$ для будь-яких елементів $x, y \in R$. Теорема доведена.

Твердження 8.4. *Нехай R – нільпотентне p-кільце, причому $|R^2| \leqslant p$. Тоді R – праве гамільтонове кільце, якщо і тільки якщо R належить до одного із типів:*

1) R – майже нульове справа;

2) R^+ містить такий елемент x нульової висоти та підгрупу N, що

$$R^+ = \langle x \rangle \oplus N$$

/групова/ пряма сума, $NR = \{p^{k-1}x\}$, $|x| = p^k$, $x^2 = 0$, $\{y \in N | y^2 = 0\} \leqslant \operatorname{Ann}_l R$, $\exp N \leqslant p^k$, $\exp(\operatorname{Ann} R) < p^k$, $\exp(N \cap \operatorname{Ann}_l R) < p^k$. Якщо крім того, $\exp N = p^k$, то $xy = -yx$ для всіх елементів $y \in R$.

Доведення. Необхідність. Нехай R – праве гамільтонове нільпотентне p-кільце, причому R не є майже нульове справа. Тоді внаслідок теореми 8.3 знайдеться такий елемент $x \in R$, що $x^2 = 0$ та $xR \neq 0$. Оскільки $pR \leqslant \operatorname{Ann}_l R$, то x має нульову висоту [17], а тому $R^+ = \langle x \rangle \oplus N$ – /групова/ пряма сума для деякої підгрупи N. Зрозуміло, що $R^2 \leqslant \{x\}$, а отже, $R^2 = \{p^{k-1}x\}$, де $p^k = |x|$.

Нехай $y \in N$. Якщо $y^2 \neq 0$, то $\langle y^2 \rangle = R^2 = \langle p^{k-1}x \rangle$, а тому $yR \subseteq \langle y^2 \rangle$. Якщо ж $y^2 = 0$, то $yR \subseteq \langle y \rangle \cap R^2 = 0$, а отже, $y \in \operatorname{Ann}_l R$. Отже, $NR = \{p^{k-1}x\}$ та $\{y \in N | y^2 = 0\} \subseteq \operatorname{Ann}_l R$.

Припустимо, що $\exp N > p^k$. Тоді знайдеться такий елемент $y \in N$, що $|y| > p^k$, і для кожного такого елемента маємо

$$(x + py)y = \alpha_1(x + py) + \beta_1(x + py)^2,$$

де $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Z}$, звідки

$$xy - \alpha_1 x = \alpha_1 py \in \langle x \rangle \cap N,$$

а тому p^k ділить α_1 і $xy = 0$.

Оскільки $x \notin \operatorname{Ann}_l R$, то $xz \neq 0$ для деякого z, причому, як тільки що доведено, $|z| \leqslant p^k$. Але тоді $|z + y| > p^k$, а отже, $xz = x(z + y) = 0$. Отримана суперечність показує, що $\exp N \leqslant p^k$.

Тепер припустимо, що $\exp N = p^k$ та y – деякий елемент із N порядку p^k. Тоді для деяких $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$y^2 = ap^{k-1}x,$$

$$xy = bp^{k-1}x,$$

$$yx = cp^{k-1}x.$$

Якщо $c \not\equiv -b(mod p)$, то або $b \not\equiv 0(mod p)$, або $c \not\equiv 0(mod p)$. Нехай, наприклад, $c \not\equiv 0(mod p)$. Покладемо

$$w = ax - (b + c)y.$$

Оскільки $wx = \alpha_2 w + \beta_2 w^2$ для деяких $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbf{Z}$, то

$$\alpha_2 ax + (b + c)cp^{k-1}x = -\alpha_2(b + c)y \in N \cap \langle x \rangle,$$

а тому $(b + c)cp^{k-1}x = 0$ і $c \equiv 0(mod p)$, що суперечить припущенню. Отже, $xy = -yx$. Якщо тепер u – довільний елемент із N, причому $|u| < p^k$, то $|u + y| = p^k$, а отже, $x(u + y) = -(u + y)x$, звідки $xu = -ux$. Отже, $xv = -vx$ для всіх $v \in R$.

Розглянемо тепер двосторонній анулятор $\operatorname{Ann} R$ кільця R. Нехай $t \in \operatorname{Ann} R$ та $|t| = p^k$. Тоді $t = \mu x + m_0$ для деяких $\mu \in \mathbf{Z}$, $m_0 \in n$. Оскільки $m_0^2 = t^2 = 0$, $tx = m_0 x = 0$, і для довільного $l \in N$ $tl = 0$, а отже,

$$\mu xl = -m_0 l \in \langle x \rangle \cap N,$$

то $m_0 \in \operatorname{Ann}_l R$, звідки $\mu x \in \operatorname{Ann}_l R$. Зважаючи на те, що $\{x\} \cap \operatorname{Ann}_l R = \{px\}$, одержуємо, що $|m_0| = p^k$ та $m_0 \in \operatorname{Ann} R$. І тоді оскільки для певних $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbf{Z}$

$$(x + m_0)z = \alpha_3(x + m_0) + \beta_3(x + m_0)^2,$$

то

$$xz - \alpha_3 x = \alpha_3 m_0 \in \langle x \rangle \cap N,$$

а отже, p^k ділить α_3 і, як наслідок, $xz = 0$, що неможливо. Тому $\exp(\operatorname{Ann} R) < p^k$.

Нехай $m \in N \cap \operatorname{Ann}_l R$ та $|m| = |x|$. Тоді із $xR = (x+m)R \leqslant \{m+x\}$ та $(m+x)^2 = 0$ випливає, що $p^{k-1}x = \theta(m+x)$ для деякого $\theta \in \mathbf{Z}$, звідки p^k ділить θ та $p^{k-1}x = 0$, що неможливо. Отже, $\exp(\mathrm{T} \cap \operatorname{Ann}_l R) < p^k$. Необхідність доведена.

Достатність. Очевидно, що кільце типу 1 є правим гамільтоновим. Тому нехай надалі R – кільце типу 2 і $t = \lambda x + m \ / \lambda \in \mathbf{Z}, m \in N /$

– довільний його елемент. Оскільки $tR = 0$ означає, що $\{t\}$ – правий ідеал, то нехай надалі $tR \neq 0$. Якщо при цьому $t^2 \neq 0$, то, очевидно, $tR \leqslant R^2 = \{t^2\} \leqslant \{t\}$.

Припустимо, що $t^2 = 0$ та $t \notin \mathrm{Ann}_l R$. Тоді при $(\lambda, p) \neq 1$ маємо $mR = tR \neq 0$ у той час як $m^2 = (m + \lambda x)^2 = 0$, а це суперечить умові. Отже, $(\lambda, p) = 1$, і або $|m| < |x|$ /а тому $\lambda p^{k-1} x \in \{t\}$ та $tR \leqslant \{t\}$/, або $|m| = |x|$ /і тоді $mx = -xm, m^2 = 0$, що неможливо/. Теорема доведена.

Список літератури

1. Днестровская тетрадь: 3-е изд. Новосибирск, 1982.
2. Шперлинг М. *О кольцах, каждое подкольцо которых является идеалом* // Мат. сборник. 1945.Т.17. N3. С.371-384.
3. Redei L. *Vollidealringe in weiteren Sinn* // Acta Math. Acad. Hung. 1952.№3. S.243-268.
4. Redei L. *Die Vollidealringe* // Monatsch. Math. 1952.№56. S.89-95.
5. Jones A., Schafferäffer J.J. *Concerning the structure of certain rings* // Bol.Fac.Inden. Agrimens. Montevideo, 1958.V.6. P.327-335.
6. Фрейдман Н.А. Письмо в редакцию /по поводу статьи М.Шперлинга// Мат. сборник. 1960.V.52. N3. С.915-916.
7. Kruse R.L. A characterization of rings in which all subrings are ideals // Notices Amer.Math.Soc. 1964.V.11. N7. P.780.
8. Kruse R.L. *Rings in which all subrings are ideals*, I// Canad.J.Math., 1968.V.20. N4. P.862-871.
9. Kruse R.L., Price D.I. Nilpotent rings. N.Y., 1969. 130p.
10. Андрианов В.И., Фрейдман Н.А. *О гамильтоновых кольцах* // Уч. зап. Свердлов.гос.пед.ин-та. 1965. Вып.31. С.3-23.
11. Андрианов В.И. *Смешанные гамильтоновы нилькольца* // Мат. зап. Урал. ун-таю 1966. Т.5. 3. С.15-30.
12. Андрианов В.И. *Смешанные Г-кольца* // Уч.зап. Свердлов. гос.пед. ин-та. 1967. Вып.51. С.12-21.
13. Андрианов В.И. *Периодические гамильтоновы кольца* // Мат. сборник. 1967. Т.74. N2. С.241-261.
14. Liu S.-X. *On algebras in which every subalgebras is an ideal (chinese)*// Acta Math. Sinica. 1964.V.14. P.532-537.
15. Холл М. Теория групп. М. 1962.
16. Джекобсон Н. Строение колец. М. 1961.
17. Курош А.Г. Теория групп, М., 1967.

18. Артемович О.Д. *Про праві гамільтонові кільця* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип. 34. С.70-73.

19. Артемович О.Д. *О правых гамильтоновых кольцах* // Симпозиум по теории колец, алгебр и модулей: Тез. сообщений. Львов, 1990. С.11.

20. Артемович О.Д. *Про праві гамільтонові кільця, II* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип.36. С.43-45.

21. Артемович О.Д. О правых гамильтоновых кольцах // Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И.Ширшова /Барнаул, 20-25 августа 1991 г./ Тез. докладов по теории колец алгебр и модулей. Новосибирск, 1991. С.10.

22. Артемович О.Д. *Про праві гамільтонові кільця, III* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.38,С.33-35.

23. Фрейдман П.А. *Кольца с правым идеализаторным условием* // Мат. зап. Урал. ун-та. 1963. Т.4. 3. С.51-58.

24. Хмельницкий И.Л. *Кольца, в которых все подкольца являются метаидеалами конечного индекса* // Изв. вузов. Математика. 1979. N4. С.53-67.

25. Фрейдман П.А. *О кольцах с идеализаторным условием, II* // Уч. зап. Урал. ун-та. 1959. Т. 23. 1. С.35-48.

26. Фрейдман П.А. *Кольца с идеализаторным условием, I* // Изв.вузов. Математика. 1960. N2. С.213-222.

27. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел /3-е изд./ М.,1985.

28. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.,1987.