УДК 515.544

О.Д.Артемович, О.В.Тураш

ГРУПИ, ВЛАСНІ ПІДГРУПИ ЯКИХ Є РОЗШИРЕННЯМИ ГІПЕРЦЕНТРАЛЬНИХ ГРУП ЗА ДОПОМОГОЮ ЧЕРНІКОВСЬКИХ ГРУП

1. У праці [10] доведено, що локально ступінчаста група, кожна власна підгрупа якої є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської, сама є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської. Група, кожна власна підгрупа якої є розширенням нільпотентної (відповідної гіперцентральної) групи за допомогою черніковської, але сама не є такою, називається $\overline{\mathrm{N\check{C}}}$ (відповідно $\overline{\mathrm{ZA\check{C}}}$-групою). Із [2] випливає, що локально нільпотентна $\overline{\mathrm{N\check{C}}}$-$p$-група досконала і є об'єднанням зростаючого ланцюга власних нормальних нільпотентних підгруп.

Ми довели, що періодична локально ступінчаста $\overline{\mathrm{ZA\check{C}}}$-група – досконала локально нільпотентна група, яка є об'єднанням зростаючого ланцюга нормальних гіперцентральних груп.

Групу, яка є розширенням гіперцентральної (відповідно нільпотентної) групи за допомогою черніковської, будемо називати $\mathrm{ZA\check{C}}$-групою (відповідно $\mathrm{N\check{C}}$-групою). Інші позначення і факти стандартні (див., наприклад, [11]).

2. Правильна така теорема

ТЕОРЕМА 2.1. *Нехай G – періодична локально ступінчаста група, кожна власна підгрупа якої є розширенням гіперцентральної групи за допомогою черніковської групи.*

а) Якщо група G недосконала, то G сама є розширенням гіперцентральної групи за допомогою черніковської.

б) Якщо G – $\overline{\mathrm{ZA\check{C}}}$-група, то вона досконала локально нільпотентна група, і є об'єднанням зростаючого ланцюга нормальних гіперцентральних підгруп.

Для доведення цієї теореми нам потрібні такі твердження.

Лема 2.2. *Нехай G – група, кожна власна підгрупа якої є розширенням гіперцентральної групи за допомогою черніковської, і K – власна нормальна підгрупа G. Тоді в G є така нормальна гіперцентральна підгрупа S, що K/S – черніковська група.*

Доведення. Розглянемо множину

$$\mathcal{A} = \{S : \text{ де } S \text{ – така нормальна гіперцентральна підгрупа } K, \text{ що фактор група } K/S \text{ черніковська}\}.$$

Оскільки K – ZAČ-група, то множина $\mathcal{A}$ непорожня. Нехай

$$\mathcal{A}_1 = \{r \in \mathbf{N}, \text{ де } r = |K/T|, T \text{ – розширення ZA-групи за допомогою прямого добутку скінченної кількості квазіциклічних груп}\}.$$

Через λ_1 позначимо найменше число з множини $\mathcal{A}_1$. Нехай T_1 – така група, що $|K/T_1| = \lambda_1$. Розглянемо множину

$$\mathcal{A}_2 = \{r \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \text{ де } T_1/S \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_r^\infty} \text{ для нормальної гіперцентральної підгрупи } S\}.$$

Через λ_2 позначимо найменше число множини $\mathcal{A}_2$. Якщо $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = 0$, то $K = T_1 = S$, і лема доведена. Припустимо, що $\lambda_1 \neq 1$. Якщо при цьому $\lambda_2 = 0$, то K – розширення гіперцентральної групи за допомогою скінченної групи. Тоді для довільного елемента $g \in G$ отримуємо, що T_1^g – нормальна підгрупа групи $K^g = K$, $T_1T_1^g$ – гіперцентральна підгрупа і $T_1T_1^g \in \mathcal{A}$. Міркуючи аналогічно [3, твердження 3.1], одержуємо $|S/(T_1T_1^g)| \geqslant \lambda_1 = |S/T_1| \geqslant |(T_1T_1^g)/T_1| = \mu$. Крім того, $|S/(T_1T_1^g)| = |(S/T_1)/(T_1T_1^g/T_1)| = \lambda_1/\mu$ Звідси випливає, що $\mu = 1$ та $T_1T_1^g = T_1$, а тому T_1 нормальна гіперцентральна підгрупа G. Отже, $S = T_1 \in \mathcal{A}$.

Якщо ж $\lambda_2 \neq 0$, то нехай S – така гіперцентральна група, що $T_1/S \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_{\lambda_2}^\infty}$. Окрім того, для довільного елемента g групи G $S^g \trianglerighteq K^g = K$ і SS^g – гіперцентральна підгрупа. Нехай $T/(SS^g) \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_n^\infty}$. Тоді $n \leqslant \lambda_2$, і, внаслідок мінімального вибору числа λ_2 одержуємо, що $n = \lambda_2$. Отже, $SS^g = S$ та S – нормальна гіперцентральна підгрупа групи G. Лема доведена.

ЛЕМА 2.3. *Періодична локально ступінчаста $\overline{\text{ZAČ}}$-група локально скінченна.*

ЛЕМА 2.4. *Локально ступінчаста $\overline{\text{ZAČ}}$-група не містить власних нормальних підгруп скінченного індексу.*

Доведення. Припустимо, що H – власна нормальна підгрупа групи G скінченного індексу. За лемою 2.2 існує нормальна гіперцентральна підгрупа групи G така, що H/K – черніковська група. Тоді G/K – черніковська, і це суперечить умові леми. Лема доведена.

ЛЕМА 2.5. *Періодична локально ступінчаста $\overline{\text{ZAČ}}$-група не має простого гомоморфного образу.*

Доведення. Припустимо, що для деякої нормальної підгрупи M фактор-група G/M проста. Оскільки G не має власних нормальних підгруп скінченного індексу, то G/M є $\overline{\text{ZAČ}}$-група. За наслідком A1 [4] G/M – лінійна група. Локально скінченна проста група, яка є лінійною, обов'язково є групою типу Лі (див.[5, 12, 13]). Внаслідок [6] $G/M \cong PSL(2, F)$ або $G/M \cong Sz(F)$ для деякого локально скінченного поля F, а це суперечить результатам праці [9]. Отже, G/M не проста. Лема доведена.

Доведення теореми. Від супротивного. Припустимо, що G є $\overline{\text{ZAČ}}$-група. За лемою 2.4 G не містить підгруп скінченного індексу.

Припустимо також, що G – недосконала група. Тоді G/G' – ділима періодична абелева група, а тому в G є така нормальна підгрупа L, що фактор-група G/L квазіциклічна. За лемою 2.2 в G також існує така нормальна гіперцентральна підгрупа K, що $K \leqslant L$ і фактор-група L/K черніковська. Але тоді фактор-група G/K черніковська і, як наслідок, G – ZAČ-група. Отримана суперечність свідчить, що група G досконала.

Нехай N – довільна власна нормальна підгрупа групи G. За лемою 2.2 існує гіперцентральна нормальна в G підгрупа K, така що N/K – черніковська. Відомо, що $(G/K)/C_{G/K}(N/K)$ вкладається в групу $\mathrm{Aut}(N/K)$, і що група автоморфізмів черніковської групи є черніковською групою (див. [1]). Доведемо, що $C_{G/K}(N/K) = G/K$. Справді, якщо це не так, то $C_{G/K}(N/K)$ – ZAČ-група, а тому G/K – ZAČ-група і G – ZAČ-група. Ця суперечність свідчить, що

$[N, G] \leqslant K$. N є розширенням гіперцентральної групи за допомогою абелевої.

Унаслідок леми 2.5 група G зображається у вигляді об'єднання зростаючого ланцюга нормальних груп, кожна з яких є розширенням гіперцентральної групи за допомогою абелевої

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots \subset G, \; G = \cup L_n$$

Якщо $G \neq \cup L'_n$, то фактор-група $G/(\cup L'_n)$ абелева всупереч досконалості групи G. Тому $G = \cup L'_n$ і група G є об'єднанням зростаючого ланцюга гіперцентральних нормальних підгруп. Зокрема, група G є локально нільпотентна. Теорема доведена.

Наслідок 2.6. *Нехай кожна власна підгрупа групи G є розширенням нільпотентної групи ступеня $\leqslant r$ за допомогою черніковської групи. Тоді група G також є розширенням нільпотентної групи ступеня $\leqslant r$ за допомогою черніковської групи.*

3. Правильна така теорема

Теорема 3.1. *Недосконала локально ступінчаста група G є ZAČ-групою тоді і тільки тоді, коли кожна її власна підгрупа є ZAČ-групою.*

Доведення. Зрозуміло, що G/G' – ділена абелева група. Якщо G/G' періодична, то доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 2.1.

Нехай група $\overline{G} = G/G'$ – не є періодичною, $\tau(\overline{G})$ – періодична частина групи $\overline{G}$. Тоді $\overline{G}/\tau(\overline{G})$ – ділена абелева група без скруту, а тому в G є така нормальна підгрупа L, що $G/L \cong \mathbf{Q}$. У фактор-групі G/L існує підгрупа, ізоморфна $\mathbf{Z}$. Нехай P – прообраз в G цієї підгрупи. $G/P \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_n^\infty} \times \ldots = \mathbf{C}_{p_1^\infty} \times (\mathbf{C}_{p_2^\infty} \times \ldots \times \mathbf{C}_{p_n^\infty} \times \ldots)$ Отже, в G є нормальна підгрупа H, така що $G/H \cong \mathbf{C}_{p_1^\infty}$. Група H – ZAČ-група, тому і G – ZAČ-група. Теорема доведена.

4.Лема 4.1. *Нехай N – гіперцентральна (відповідно розв'язна) нормальна підгрупа G, а U – субнормальна гіперцентральна (відповідно розв'язна) підгрупа G. Тоді NU також гіперцентральна (відповідно розв'язна) підгрупа.*

Доведення цієї леми аналогічне до доведення леми 1 [7]. Наведемо його.

Доведення. Нехай $U_0 = UN$ і $U_j = \langle x^{-1}Ux | x \in U_{j-1}\rangle$ для всіх $j \in \mathbf{N}$. Оскільки U субнормальна в G, то вона також субнормальна і в UN. Тому $U_n = U$ для деякого $n \in \mathbf{N}$.

Припустимо, що U_i – гіперцентральна підгрупа. Тоді U_i та $U_{i-1} \cap N$ – гіперцентральні нормальні підгрупи U_{i-1}. Окрім того,

$$U_{i-1} = U_{i-1} \cap UN = (U_{i-1} \cap N)U \leqslant (U_{i-1} \cap N)U_i \leqslant U_{i-1},$$

а тому $U_{i-1} = (U_{i-1} \cap N)U_i$. Звідси випливає, що підгрупа U_{i-1} гіперцентральна. Використовуючи індукцію, отримуємо, що підгрупа NU гіперцентральна. Лема доведена.

Підгрупа групи G, яка має властивість α, називається α-підгрупою.

Лему 4.1 узагальнюють таким чином.

Наслідок 4.2. *Нехай в групі G добуток двох нормальних α-підгруп є α-підгрупою. Якщо N – нормальна α-підгрупа G, а U - субнормальна α-підгрупа G, то NU також α-підгрупа.*

Лема 4.3. *Нехай G – p-група, кожна власна підгрупа якої є ZAČ-група і кожна скінченна підгрупа субнормальна. Припустимо, що T – повна абелева підгрупа G. Якщо X – така підгрупа G, що $[X,T]$ гіперцентральна, то $[X,T] = [X,T,T]$. Зокрема, $N_G(N_G(T)) = N_G(T)$.*

Доведення. Нехай $[X,T] \leqslant C_G(T), M = [X,T]$. Якщо $\exp M = m < \infty$, то $T^m = \langle t^m | t \in T\rangle \leqslant C_G(X)$. Але T ділена, а отже, $T = T^m$ і, як наслідок, $T \leqslant C_G(X)$. Звідси $M = 1$.

Розглянемо загальний випадок. Нехай $H = \langle X,T\rangle$. Приймемо $\overline{H} = H/M^p$. Оскільки $\exp(\overline{M}) \leqslant p$, то, як доведено вище, $\overline{M} = \overline{1}$ і $M = M^p$. За теоремою 2.2 [1, с. 87] M абелева ділена. І оскільки кожна скінченна підгрупа субнормальна в G, то внаслідок теореми 1.16 [1, с. 67] $M \leqslant Z(H)$.

Нехай $x \in X, t \in T, |x| = s$. Тоді $[x,t] \in M \subset Z(H)$, а отже, $[x,t^s] = [x,t]^s = [x^s,t] = 1$. Звідси $[x,T^s] = 1, [x,T] = 1$ і, як наслідок, $M = 1$. Далі, нехай $U = N_G(T), V = N_G(U)$. Доведемо, що $[V,T]$ - гіперцентральна підгрупа. Нехай K - V-інваріантна гіперцентральна підгрупа U така що U/K черніковська і нехай D/K – максимальна ділена абелева підгрупа U/K. Тоді $|U/D| < \infty$ і D нормальна в V. Внаслідок теореми 1.16 [1, с. 67] $D/K \leqslant Z(V/K)$ і $[T/K, V/K] = \bar{1}$. Отже, $[T,V] \leqslant K$. Лема доведена.

Твердження 4.4. *Нехай G - ZAČ –p-група, кожна скінченна підгрупа якої субнормальна. Тоді G - група з субнормальними власними підгрупами.*

Доведення. В групі G є така нормальна гіперцентральна підгрупа T, що фактор-група G/T черніковська. Нехай W/T - максимальна ділена абелева підгрупа групи G/T. Тоді $G = WF$ для деякої скінченної підгрупи F. Нехай K – власна нормальна підгрупа групи G, яка містить F. Тоді KT/T – власна нормальна підгрупа черніковської групи G/T і за теоремою 1.16 [1, с. 67] центр $Z(G/T)$ містить таку ділену підгрупу L/T, що $G = L/TK/T$. Тому можемо вважати, що $[W,F] \leqslant T$. Тоді за лемою 4.1 [8] фактор-група G/T нільпотентна. Візьмемо яку-небудь підгрупу X групи G. Тоді XT/T субнормальна в G. Залишилось довести, що X субнормальна в XT.

Нехай $D/X \cap T$ – максимальна ділена абелева підгрупа групи $X/X \cap T$. Тоді існує така скінченна підгрупа E, що $X = DE$. Як доведено вище, $D/X \cap T \leqslant Z(X/X \cap T)$, а отже, $[D,X] \leqslant X \cap T$. І, як наслідок, $D, X \leqslant N_G(ET)$. Окрім того, за лемою 4.1 підгрупа ET гіперцентральна. Нехай $K = D(ET) = XT$. Оскільки ET нормальна в K, то $U = X \cap ET$ субнормальна в K. Розглянемо $U_1 = \langle g^{-1}Ug | g \in K\rangle$. Оскільки фактор-група DU_1/U_1 повна абелева, то вона міститься в центрі $Z(K/U_1)$. Звідси випливає, що DU_1 нормальна в K. Далі, нехай $U_2 = \langle g^{-1}Ug | g \in U_1\rangle$. Оскільки $D \leqslant N_G(U)$, то $D \leqslant N_G(U_2)$. Тепер, як і вище, DU_2/U_2 повна абелева, а отже, міститься в центрі $Z(DU_1/U_2)$, звідки випливає, що DU_2 нормальна в DU_1. Міркуючи аналогічно, через скінченну кількість кроків ми досягнемо підгрупи $DU = X$. Отже, X субнормальна в K. Твердження доведене.

Твердження 4.5. *Нехай G – p-група з нормалізаторною умовою, кожна власна підгрупа якої є ZAČ-група, і кожна скінченна підгрупа суб-*

нормальна. Припустимо, що X – власна підгрупа G з черніковською фактор-групою X/Y для деякої гіперцентральної підгрупи Y. Якщо Y субнормальна в G, то X також субнормальна в G.

Доведення. Внаслідок твердження 4.4 можемо вважати, що G – ZAČ-група. Нехай M – нормальне замикання Y в G, $H = MX$. Оскільки $H \neq G$, то $M \neq G$. Це означає, що H – ZAC-група і за твердженням 4.4 X субнормальна в H. Залишилось довести, що H субнормальна в G.

Нехай C/M - повна частина підгрупи XM/M. Тоді за лемою 4.3 $N_{G/M}(N_{G/M}(C/M)) = N_{G/M}(C/M)$. Оскільки G/M також з нормалізаторною умовою, то $N_{G/M}(C/M) = G/M$. Отже, $C/M \trianglerighteq G/M$. І оскільки XM/CM - скінченна підгрупа G/CM, то вона субнормальна, а отже, XM субнормальна в G. Твердження доведене.

Наведена нижче теорема аналогічна до наслідка 3 [2].

ТЕОРЕМА 4.6. *Нехай G – p-група з нормалізаторною умовою, кожна власна підгрупа якої ZAČ-група і кожна скінченна підгрупа субнормальна. Тоді якщо кожна гіперцентральна підгрупа субнормальна в G, то G розв'язна.*

Доведення. Нехай X – яка-небудь власна підгрупа G. Оскільки X є ZAČ-група, то за умовою і твердженням 4.5 X субнормальна в G. Тоді за теоремою [8] G розв'язна. Теорема доведена.

Список літератури

1. Черников С.Н. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп* // М.: Наука. 1980. 384с.
2. Asar A.O. *On nonnilpotent p-groups and the normalizer condition* // Jur.Math. 1994. 18.114–129.
3. Bruno B. *On p-groups with "nilpotent-by-finite" proper subgroups* // Bull. Unione Math. Ital. 1989. 3. N1. p.45–51.
4. Hartley B. *Centralizing properties in simple locally finite groups and large finite classical groups* // J.Austral Math.Soc (Ser.A). 1990. 49. p.509–513.
5. Hartley B., G.Shute. *Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type Quart* // J.Math. Oxford. 1984. 35 (ser 2). p.49–71.
6. P.B.Kleidman, R.A.Wilson. *Acharacterization of some locally finite groups of Lie type* // Arch.Math. 1987. 48. p.10–14.

7. Möhres W. *Torsiongruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind* // Geom. dedic. 1989. 31. P.237–248.

8. Möhres W. *Auflösbarkeit von Gruppen deren Untergruppen alle subnormal sind* // Ann. Math. 1990. 54. P.232–235

9. Otal J., Pena J.M. *Infinite locally-finite groups of type $PSL(2, K)$ or $Sz(K)$ are not minimal under certain conditions* // Publ.Math. Barcelona. 1988. 32. p.151–157.

10. Otal J., Pena J.M. *Groups in which every proper subgroups is Cernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Cernicov* // Arch.Math. 1988. 51. P.193–197

11. Robinson D.J.S.*A course in the theory of groups* // Springer. New York. e.a. 1982.

12. Thomas S. *Anidentification theorem for the locally finite non-twisted chevalley groups* // Arch.Math. 1983. 40. p.21–31.

13. Thomas S. *The classification of the simple periodic linear groups* // Arch. Math. 1983. 41. p.103–116.