УДК 517947

Л.С.Баб'як, О.Л.Горбачук

АСИМПТОТИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ, НЕОДНОРІДНА ЧАСТИНА ЯКОГО Є ЦІЛА ФУНКЦІЯ.

Розглядається неоднорідне еволюційне диференціальне рівняння першого порядку у банаховому просторі

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t)+f(t) \quad (1),$$

де A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0 , $f(t)$ – ціла функція.

Відомо , що коли A – генератор обмеженої півгрупи класу C_0 , то банаховий простір B розкладається на пряму суму замикання образу і ядра оператора A , тобто $B=\overline{R(A)}+Ker A$ (див.[1, теорема 18,6.2]). Проектор на $Ker A$ позначимо P. Нагадаємо , що границя функції за Чезаро

$$(C-1) \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\xi)d\xi.$$

Встановлюється , що довільний розв'язок диференціального рівняння (1) за деяких умов на функцію $f(t)$ існує і має вигляд $y(t)=u(t)+g(t)$, де $u(t)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння , причому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t u(\xi)d\xi=0 \text{ , а } g(t) \text{ – ціла функція.}$$

Аналогічно розв'язується обернена асимтотична задача: для довільної цілої функції $g(t)$, яка є розв'язком еволюційного рівняння , причому $Ag(t)$ – теж ціла функція , існує ціла функція $f(t)$, яка є правою частиною цього еволюційного рівняння.

Нехай B – рефлексивний банаховий простір . У роботі [4] розглядалось диференціальне рівняння (1) ,де $f(t)$ - многочлен цього рівняння у банаховому просторі . Ми розглядаємо це ж еволюційне диференціальне рівняння з правою неоднорідною частиною у вигляді цілої функції.

<u>Теорема 1</u>. Нехай задано рівняння (1), де $f(t)$ - і $Af(t)$ - цілі функції, тобто $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, a_k- елементи з банахового простору B, $a_k \in D(A^{\infty})$, причому так, що $\forall n\ \forall i\ \exists c:\ \forall \alpha\ \|A^n a_i\| < C\alpha^n$, тоді довільний розв'язок цього рівняння подається у вигляді $y(t)=u(t)+g(t)$,де $g(t)$ - ціла функція , яка визначається однозначно функцією $f(t)$, $u(t)$ - розв'язок однорідного рівняння і $(C-1)\lim_{t\to\infty} u(t)=0$.

<u>Доведення</u>. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді ряду $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$. Підставивши його у рівняння (1), отримаємо зв'язок відомих коефіцієнтів a_k і шуканих b_k :

$$\begin{aligned} b_1&=Ab_0+a_0;\\ 2b_2&=Ab_1+a_1;\\ 3b_3&=Ab_2+a_2;\\ &\dots \quad \dots \quad \dots \qquad (2\\ nb_n&=Ab_{n-1}+a_{n-1};\\ (n+1)b_{n+1}&=Ab_n+a_n;\\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

b_0 вибираємо так , що $b_0=-(C-1)\lim_{t\to\infty} u(t)$.

Елементи b_k (k=1,2,...) шукаємо за рекурентним співвідношенням $b_k=\frac{1}{k}(Ab_{k-1}+a_{k-1})$.

Запишемо елементи b_k через елементи a_k :

$$b_1= Ab_0+ a_0;$$

$$b_2=\frac{1}{2}(Ab_1+ a_1)= \frac{1}{2}A^2b_0+ \frac{1}{2}Aa_0+ \frac{1}{2}a_1;$$

$$b_3 = \frac{1}{3}(Ab_2 + a_2) = \frac{1}{3}A^3 b_0 + \frac{1}{3}A^2 a_0 + \frac{1}{6}Aa_1 + \frac{1}{3}a_2;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{n!}A^n b_0 + \frac{1}{n!}A^{n-1}a_0 + \frac{1}{n!}A^{n-2}a_1 + \frac{1}{n(n-1)\ldots 3}A^{n-3}a_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n(n-1)(n-2)}A^2 a_{n-3} + \frac{1}{n(n-1)}Aa_{n-2} + \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n!}A^n b_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i!}{n!}A^{n-i}a_{i-1} + \frac{1}{n}a_{n-1}.$$

Із співвідношень (2) видно, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ буде збіжним за умови $\forall n,\ \forall i\ \exists C: \forall \alpha\ \|A^n \alpha_i\| < C\alpha^n$ і є цілою функцією.

Зважаючи на те, що коефіцієнти b_k задовільняють умову (2), ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ буде розв'язком рівняння (1). Єдиність розв'язку випливає з того, що коефіцієнти $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ визначаються однозначно із співвідношень (2), а b_0 – із умови, що границя Чезаро розв'язку однорідного рівняння дорівнює нулю.

Тепер поставимо обернену асимптотичну задачу: знайти цілу функцію $f(t)$ таку, що дана ціла функція $g(t)$ буде розв'язком рівняння $\frac{dy(t)}{d(t)} = Ay(t) + f(t)$.

Теорема 2. Для довільної цілої функції $g(t)$, причому $Ag(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Ab_k t^k$ – теж ціла функція $f(t)$, що довільний розв'язок рівняння (1) представляється у вигляді $u(t) = v(t) + g(t)$, де $v(t)$ – роз'язок однорідного рівняння і $(C-1) \lim_{t\to\infty} v(t) = 0$, причому $P(b_0 - y_0) = 0$.

Доведення. Підставляючи відому цілу функцію $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ у рівняння (1), отримаємо рівності, які пов'язують відомі кофіцієнти b_k і шукані a_k:

$$a_0 = b_1 - Ab_0;$$

$$a_1 = 2b_2 - Ab_1;$$
$$a_2 = 3b_3 - Ab_2;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_n = (n+1)b_{n+1} - Ab_n;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Усі коефіцієнти a_k визначаються однозначно. Покажемо, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ буде збіжним. Оскільки $Ag(t)$ – ціла функція, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} Ab_k t^k$ збігається за умовою. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k$ – ціла функція, тому $\exists C$ $\forall \alpha>0$: $\|b_k\|<C\alpha^k$. Неважко показати, що $\forall n$ $\exists M$ $\forall \beta>0$ $\|na_n\| \le M\beta^n$. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ є алгебраїчною сумою названих рядів, тому він буде збіжним.

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0, \; u(0) = y_0.$$

Для досягнення цієї умови потрібно, щоб $P(b_0-y_0) = 0$ (див.[3]).

Список літератури.

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы., М., 1962, 830 с.

2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве., М., 1967, 464 с.

3. Горбачук О.Л. Розв'язок деякої оберненої задачі для еволюційного рівняння у банаховому просторі // Укр. матем. журнал, 1990, т.42, №9, с.1262-1265.

4. Баб'як Л.С., Горбачук О.Л. Пряма і обернена задача для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі // Тематичний збірник наукових праць "Алгебра і топологія", К.,1993.