УДК 515. I2.

Б.М.Бокало

НЕПЕРЕРВНІ ОБРАЗИ ЗЛІЧЕННО КОМПАКТНИХ РОЗРІДЖЕНИХ ПРОСТОРІВ

У монографії М.М.Чобана і Н.К.Додона [3] сформульована проблема: чи кожний компакт є неперервним образом деякого розрідженого злічено компактного простору? Там же є і часткова відповідь на це запитання, а саме: Раджагопалан [5] встановив, що існує злічено компактний розріджений простір, який неперервно відображається на відрізок [0,I]. Оскільки кожний метризований компакт є досконалим образом підмножини [0,I], то отримаємо, що кожний метризований компакт є неперервним образом деякого розрідженого злічено компактного простору.

У цій роботі ми показуємо, що існує злічено компактний гаусдорфовий розріджений простір, який неперервно і біективно відображається на Стоун-Чехівську компактифікацію $\beta\mathbb{N}$ натуральних чисел. А звідси випливає, що кожний сепарабельний компакт є неперервним образом деякого розрідженого злічено компактного гаусдорфового простору. Термінологія і позначення переважно такі, як в [1], [4]. Оператор замикання позначається квадратними дужками [*]. Бажаючи підкреслити, що замикання береться в просторі (X,τ)

ми пишемо $[*]_{(X,\tau)}$ замість $[*]$. Через $\mathbb{N}$ позначаємо множину натуральних чисел.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема I. *Існує гаусдорфовий розріджений зліченно компактний простір, який неперервно і бієктивно відображається на Стоун-Чехівську компактифікацію натуральних чисел* $\beta\mathbb{N}$.

Доведення. Зафіксуємо на множині $\beta\mathbb{N}$ довільне мінімальне цілком впорядкування $<$. Через τ позначимо звичайну топологію Стоун-Чехівської компактифікації $\beta\mathbb{N}$ натуральних чисел $\mathbb{N}$. Введемо на множині $\beta\mathbb{N}$ нову топологію τ^*, передбазою якої є сім'я множин $\tau\cup\{\{y\in\beta\mathbb{N} : y\le x\},\ x\in\beta\mathbb{N}\}$. Простір $(\beta\mathbb{N}, \tau^*)$ є гаусдорфовий, правий, а отже (див [I],[2]), розріджений. Залишилось показати, що $(\beta\mathbb{N}, \tau^*)$ є зліченно компактний. Нехай $A\subset\beta\mathbb{N}$ – довільна нескінченна зліченна множина. Оскільки $|\beta\mathbb{N}|=2^c$ і порядок $<$ мінімальний, то існує така точка x_0, що $A\subset\{y\in\beta\mathbb{N} : y<x_0\}$. Оскільки $|[A]_{(\beta\mathbb{N},\tau)}|=2^c$ і порядок $<$ мінімальний, то існує $x^*\in\beta\mathbb{N}$, що $x_0<x^*$ і $x^*\in[A]_{(\beta\mathbb{N},\tau)}$. З побудови топології τ^* зразу випливає, що $x^*\in[A]_{(\beta\mathbb{N},\tau^*)}$.

Наслідок I. *Кожний сепарабельний компакт є неперервним образом деякого зліченно компактного розрідженого простору.*

Доведення. Нехай X – сепарабельний компакт, а $Y\subset X$ – зліченний всюди щільний у X підпростір. Зафіксуємо деяке відображення $f\colon \mathbb{N}\to Y$ дискретного простору натуральних чисел на простір Y. Очевидно, f – неперервне. Тоді існує неперервне відображення $\hat{f}$ простору $\beta\mathbb{N}$ на простір X таке.

що $\hat{f}(n)=f(n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\hat{f}$ неперервно відображає зліченно компактний розріджений простір $(\beta\mathbb{N}, \tau^*)$ на X (де $(\beta\mathbb{N}, \tau^*)$ – простір, який побудований в доведенні теореми 1.).

<u>Зауваження.</u> Відомо, що кожний регулярний розріджений зліченно компактний простір є секвенціально компактним. Так як неперервний образ секвенціально компактного простору є секвенціально компактний, то не кожний компакт є неперервним образом регулярного зліченно компактного розрідженого простору. Зокрема, це стосується Стоун-Чехівської компактифікації $\beta\mathbb{N}$ натуральних чисел $\mathbb{N}$.

З теореми 1 і попереднього зауваження випливає

<u>Наслідок 2.</u> *Існують гаусдорфові розріджені простори без нетривіальних збіжних послідовностей.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Архангельський А.В. *Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты* // УМН. 1978. Т. 33. N 6. С. 29-34.
2. Архангельский А.В. *Об α-растянутых пространствах* // ДАН. 1978. 239: 3.
3. Чобан М.М., Додон Н.К. *Теория $\mathcal{P}$-разреженных пространств.* Кишинев, 1979.
4. Энгелькинг Р. *Общая топология.* М. 1986.
5. Rajagopalan M. *A chain compact space wich is not strongly scattered // Israel I. Math. 1976. 117-125.*