УДК 512.553

Р.В.ВОВК

ПРО НЕКОМУТАТИВНІ H-ЛОКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ

Теорію комутативних h-локальних кілець розвинув Метліс у роботах [1], [2]. Пізніше з'ясувалось, що клас h-локальних кілець є важливим у теорії кілець елементарних дільників, у теорії кілець, над якими всі скінченно-породжені модулі є прямими сумами циклічних модулів (проблема Капланського), а також для розв'язання задачі про локальну визначеність кручень над комутативними кільцями [3].

Усі кільця вважають асоціативними з ненульовою одиницею. Як звичайно, розглядають праві унітарні модулі.

Означення. *Два праві максимальні ідеали кільця R називаються пов'язаними, якщо вони є правими анулятoрами ненульових елементів одного і того ж ненульового простого правого модуля.*

Насправді M_1 і M_2 пов'язані тоді і тільки тоді, коли існують такі елементи $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, що $(M_1 : \lambda_1) = (M_2 : \lambda_2)$. Множина усіх максимальних правих ідеалів, пов'язаних з максимальним правим ідеалом M позначається через $< M >$. Зрозуміло, що $Ann(A/M) = \bigcap\limits_{M_1 \in <M>} M_1$. Має місце така лема.

Лема 1. $\bigcap\limits_{M_1 \in <M>} M_1$ *є первинним ідеалом, максимальним серед двосторонніх ідеалів, що містяться в M.*

Означення. *Двосторонній ідеал I кільця R називається колокальним справа (подібно до комутативного випадку [2]), якщо будь-які два праві максимальні ідеали кільця R, що містять ідеал I є пов'язаними.*

Якщо у кільці всі максимальні праві ідеали пов'язані (або, що те саме, коли усі прості праві модулі ізоморфні між собою, тобто є тільки один тип простого модуля), то його називають *локальним справа.* Аналогічно вводять поняття локального зліва кільця.

Проте, якщо кільце локальне справа і зліва, то це ще не означає, що воно локальне у загальноприйнятому розумінні. (Наприклад, кільце Козенса-Койфмана є простим локальним зліва і справа [4]). Зрозуміло, що кільце є локальним справа тоді і тільки тоді, коли нульовий ідеал є колокальним справа.

Якщо правий ідеал K міститься хоча б в одному максимальному правому ідеалі M_1 з $< M >$, то ми кажемо, що K належить типові $< M >$.

Введемо таке означення h-локального справа кільця.

Означення. *Кільце R називається h-локальним справа, якщо*

1) кожний ненульовий правий ідеал I кільця R належить лише скінченому числу типів максимальних правих ідеалів;

2) кожний ненульовий первинний ідеал належить лише одному типу максимальних правих ідеалів, тобто є колокальним справа.

Аналогічно вводять поняття h-локального зліва кільця.

Очевидно, кожне комутативне h-локальне кільце є h-локальним справа і h-локальним зліва. Кільце, яке є h-локальним зліва і справа будемо називати *h-локальним.* Кожна область головних ідеалів є h-локальною областю.

Означення. *Двосторонній ідеал I кільця R називається півколокальним справа, якщо він дорівнює скінченому перетину колокальних справа ідеалів кільця R.*

Двосторонній ідеал I кільця R називається майже колокальним справа, якщо він належить лише скінченому числу типів максимальних правих ідеалів.

У h-локальному справа кільці усі двосторонні ідеали є майже колокальними справа.

Наведемо деякі властивості колокальних ідеалів:

1. Якщо $I_1, I_2, ..., I_n$ - колокальні ідеали, які належать одному і тому ж типові, то $I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$ є колокальним ідеалом, який теж належить цьому типу.

2. Якщо I, J - колокальні ідеали, які належать різним типам, то вони взаємно-прості, тобто $I + J = R$.

3. Нехай $I = \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i$, де I_i - колокальний ідеал, який належить типові $< M_i >$ і $< M_i > \neq < M_j >$ при $i \neq j$. Тоді $I = I_1 I_2 ... I_n$.

Такий розклад будемо називати нормальним. Зрозуміло, що кожний скінчений розклад можна нормалізувати.

Лема 2. *Нехай I - колокальний справа ідеал кільця R, J - довільний двосторонній ідеал з R, який містить I. Тоді J - теж колокальний справа і належить цьому ж типу максимальних правих ідеалів що й I.*

Доведення. Нехай M_1, M_2 - максимальні праві ідеали кільця R, які містять J. Тоді $I \subset M_1, I \subset M_2$. Оскільки I - колокальний справа, тому M_1 пов'язаний з M_2. Отже J - колокальний справа.

Лема 3. *Нехай I, J - колокальні справа ідеали кільця R, які належать одному типові $< M >$. Тоді IJ і $I \cap J$ теж колокальні справа ідеали, які належать цьому ж типові $< M >$.*

Доведення. Нехай ідеал IJ належить деякому правому максимальному ідеалу N. Тоді IJ належить до всіх максимальних правих ідеалів N_α, пов'язаних з N, а тому і до їх перетину $\bigcap\limits_{N_\alpha \in <N>} N_\alpha$, який є первинним ідеалом. Тому хоча б один з ідеалів I або J повинен міститися у перетині $\bigcap\limits_{N_\alpha \in <N>} N_\alpha$, і отже, належати типові $< N >$. Оскільки I і J колокальні справа і належать типові $< M >$, то $< N > = < M >$. Отже, IJ - колокальний справа. Зважаючи на те, що $IJ \subset I \cap J$, тому за лемою 2 ідеал $I \cap J$ - колокальний справа і належить типові $< M >$.

Лема 4. *Нехай I - колокальний справа ідеал кільця R, a - довільний елемент з R, тоді $(I : a)$ - колокальний справа ідеал.*

Доведення. Оскільки $(I : a)$ - двосторонній ідеал і $I \subset (I : a)$ отримуємо за лемою 2, що $(I : a)$ теж колокальний справа.

Лема 5. *Нехай I – колокальний справа ідеал кільця R. Якщо J – довільний двосторонній ідеал, який міститься в I, і для кожного елемента $a \in I$ ідеал $(J : a)$ – колокальний справа, то J – теж колокальний справа ідеал.*

Доведення. Нехай M_1, M_2 – довільні праві максимальні ідеали кільця R, які містять ідеал J. Для кожного елемента $a \in I$ мають місце включення $(J : a) \subset (M_1 : a)$ і $(J : a) \subset (M_2 : a)$. Оскільки $(J : a)$ – колокальний справа, то $(M_1 : a)$ пов'язаний з $(M_2 : a)$. Праві ідеали M_1 і $(M_1 : a)$ є пов'язаними, бо $(M_1 : a) = ((M_1 : a) : 1)$. Аналогічно M_2 пов'язаний з $(M_2 : a)$. Тому за транзитивністю маємо, що M_1 пов'язаний з M_2. А це і означає, що J – колокальний справа ідеал.

Зважаючи на попередні леми, отримуємо теорему.

Теорема . *Колокальні ідеали кільця R, які належать одному типу $< M >$ утворюють базу радикального фільтра.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Matlis E. Cotorsion modules // Mem. Amer. Math. Soc. No 49, 1964.
2. Matlis E. Decomposable modules // Trans. Amer. Math. Soc. 125, 1966, 147-179.
3. Тушницький І.Я. Кільця з локально визначеними крученнями // Алгебра і топологія. К., 1993. С. 88-109.
4. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории: в 2 т. М., 1977.
5. Stenström B. Rings of quotients. An introduction to methods of ring theory, Berlin, 1975.