УДК.512.552.12 А.І. Гаталевич

Про дуо-кільця елементарних дільників

У цій статті досліджуються деякі класи кілець елементарних дільників. Доведено, що комутативне кільце стабільного рангу I буде кільцем елементарних дільників і, що права дуо-область стабільного рангу I буде областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона дуо-область.

Вводиться поняття адекватного справа елемента. Доведено, що простий ідеал правої дуо-області Безу, який містить хоча б один адекватний справа елемент, належить одному і тільки одному максимальному ідеалу. Також доведено, що в правому дуо-кільці Безу кожний скінченно-зображений модуль, який є прямою сумою циклічних модулів, має канонічну форму. Цей результат є узагальненням вже відомого, який наведений у роботі [4].

Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце з одиницею. Правим дуо-кільцем називається кільце, в якому довільний правий ідеал є двостороннім. Скажемо, що матриця A з елементами кільця R володіє діагональною редукцією, якщо існують такі зворотні матриці P і Q відповідних розмірів з елементами кільця R, що виконується

$$PAQ=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_r \end{pmatrix}, \text{ де } \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i \supseteq R\varepsilon_{i+1}R, \ i=1,2,\ldots,r-1$$

Якщо над кільцем R довільна матриця володіє діагональною редукцією, тоді кільце R називають кільцем елементарних дільників.

Через $U(R)$ будемо позначати групу одиниць кільця R.

Кільце R називається кільцем стабільного рангу I, якщо для довільних $a,b,c \in R$, таких, що $aR+bR+cR=R$ існують $s,t \in R$, що виконується $a+bs+ct \in U(R)$.

Твердження I.

Нехай R-комутативне кільце стабільного рангу I. Тоді R-кільце елементарних дільників.

Доведення.

На основі результатів [3], достатньо обмежитись матрицями виду

$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR+bR+cR=R$.

Оскільки R - кільце стабільного рангу I, то існують $s,t \in R$ такі, що $as+b+ct \in U(R)$.

Розглянемо оборотні матриці

$$\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as+b+ct & c \\ * & * \end{pmatrix} = B$$

Легко переконатись, що матриця B, а отже і матриця A володіє діагональною редукцією. Тому R - кільце елементарних дільників.

Твердження 2.

Права дуо-область R стабільного рангу I буде областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли R-дуо-область стабільного рангу I.

Необхідність відразу випливає з [2].

Достатність.

Використовуючи результати [3], достатньо обмежитись матрицями виду $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR+bR+cR=R$.

Нехай існують такі $s,t \in R$, що $as+b+ct \in U(R)$.

Оскільки R- дуо-область, то існує $s' \in R$ таке, що $as=s'a$.

Матриці $\begin{pmatrix} s' & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ оборотні.

Розглянемо $\begin{pmatrix} s' & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s'a+b+ct & c \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as+b+ct & c \\ * & * \end{pmatrix} = B$

Оскільки $as+b+ct=u \in U(R)$, то матриця B, отже і матриця A володіють діагональною редукцією, а R- кільце елементарних дільників.

Нехай R- праве(ліве) дуо-кільце.

Теорема I.

Усі діагональні матриці над кільцем R допускають діагональну редукцію тоді і тільки тоді, коли R- кільце Безу.

Доведення дамо для лівих дуо-кілець.

Необхідність.

Якщо $a,b \in R$ і матриця $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$, де $dR \cap Rd \supset ReR$. Оскільки R ліве дуо-кільце, то $dR\supseteq Rd$ і $eR\supseteq ReR$, також і $dR\supset eR$. Отримуємо $aR+bR=dR+eR=dR$. Отже, R- кільце Безу.

Достатність.

Нехай $A=(m\times n)$-матриця.

Доведення достатності будемо проводити індукцією за m.

Для m=I твердження правильно.

Якщо $m>I$, запишемо $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, де $A_1-(m-I)\times(n-I)$ діагональна матриця. За припущенням індукції A_1-допускає діагональну редукцію.

$$A_1\sim\begin{pmatrix} c_1 & & 0\ldots 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_r\ldots 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $d=am+c_1n$, $a=da'$, $c_1=dc_1'$.

а) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} a & am+c_1n \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$,

оскільки $\begin{pmatrix} I & n' \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & m \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & am+c_1n \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$,

$c_1n=n'c_1$, оскільки R- ліве дуо-кільце;

б) $\begin{pmatrix} a & d \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} d & a \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$, оскільки $\begin{pmatrix} a & d \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & a \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} d & a \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -a'c_1 \end{pmatrix}$;

оскільки $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -c_1' & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & a \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -a'c_1 \end{pmatrix}$,

$c_1=dc_1'=c_1''d$, оскільки R-ліве дуо-кільце.
d ділить c_1 зліва. Отже d мусить ділити всі діагональні елементи (зліва).

$$A\sim\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -a'c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & c & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Знову застосовуючи індукцію до матриці, отриманої викресленням першого рядка і першої колонки, отримуємо потрібний результат.

Означення I.
Циклічний R-модуль форми R/rR, $r\in R$ називається циклічно-зображеним R-модулем.

Означення 2.
Модуль M над R має канонічну форму, якщо $M\cong R/A_1\oplus\ldots\oplus R/A_n$, де $A_1,\ldots,A_n$ - ідеали в R, і $A_1\subseteq A_2\subseteq\ldots\subseteq A_n\neq R$.
Відомо, що скінченно-зображений циклічний модуль над кільцем Безу є циклічно-зображений. [4].
Сформулюємо і доведемо тепер важливий наслідок з теореми I.

Наслідок.
Якщо R-праве(ліве) кільце Безу, то кожний скінченно-зображений модуль над R, який є прямою сумою циклічних модулів має канонічну форму.

Оскільки скінчено-зображений циклічний модуль над R є циклічно-зображений, то скінчено-зображений модуль над R, який є прямою сумою циклічних визначається (квадратною) діагональною матрицею A.

За теоремою I. A допускає діагональну редукцію.

$A \sim \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots \\ 0 & d_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$, де кожний d_i ділить d_{i+1} зліва.

Оскільки еквівалентні матриці визначають ізоморфні модулі, то модуль визначений A ізоморфний до $R/d_1R \oplus \dots \oplus R/d_nR$.

Змінюючи порядок доданків, отримуємо потрібний результат.

Назвемо ненульовий елемент a кільця R адекватним справа, якщо для кожного ненульового елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що

I) $a = rs$ 2) $rR + bR = R$ 3) для будь-якого $s' \in R$ з включення $sR \subseteq s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R + bR$ властивий.

Кільце, в якому кожний ненульовий елемент адекватний справа, називається адекватним справа. Через $A_r(R)$ позначимо множину адекватних справа елементів.

Твердження 3.

Нехай R - права дуо-область Безу. P - простий ідеал, який містить хоча б один адекватний справа елемент. Тоді він міститься в одному і тільки одному максимальному ідеалі кільця.

Доведення.

I) Якщо P - максимальний ідеал, то все очевидно.

2) Нехай існують M_1, M_2 - максимальні ідеали, що $P \subset M_1 \cap M_2$. Тоді існують $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$, що $m_1R + m_2R = R$

Нехай $a \in A_r(R)$. Тоді $a = rs$, $rR + m_1R = R$ і для всіх $s' \in R$, таких що

$sR\subseteq s'R$ ідеал $s'R+m_1R$ властивий. Оскільки P- простий ідеал, то $s\in P$. $P\subset M_1$. Нехай $sR+m_2R\subset dR$. З того, що $P\subset M_2$ випливає $sR\subset dR$ і $dR+m_1R\supset m_1R+m_2R=R$. А звідси слідує, що $a\notin A_r(R)$. Отримуємо суперечність.

Прикладом адекватного справа правого дуо-кільця може служити праве дуо ланцюгове справа кільце.

Нехай $a\neq 0$. Для довільного $b\in R$, маємо $aR\subset bR$, або $bR\subset aR$.

1) Якщо $aR\subset bR$, тоді $a=bx$, $x\in R$. Нехай існує $a'\notin U(R)$ такий, що $aR\subset a'R$, але $a'R+bR=R$. Внаслідок локальності R і того, що $a'\notin U(R)$ випливає, що $b\in U(R)$, тобто a- адекватний справа до елемента b.

2) Якщо $bR\subset aR$, тоді $b=ax$ і $a=1a$, $R+bR=R$, $a'R+bR=a'R\neq R$ для довільного $a'\in R$ такого, що $aR\subset a'R\neq R$.

Список літератури

1. Комарницький М.Я., Забавський Б.В. Про адекватні кільця // Прикладні питання математичного аналізу.
Вісн. Львів. унів. 30 1988, С.39-43

2. Забавский Б.В., Комарницкий Н.Я. Дистрибутивные области с элементарными делителями //
Укр. мат. журнал. 1990. Т.42, С.1000-1004. 3. Kaplansky I. Elementary divisors and modules //
Trans. Amer. Math. Sco. 1949-66-P.464-491.

4. Max D.Larsen, W.J.Lewis, Th.S.Shores.
Elementary divisors rings and finitely presented modules //
Trans. Amer. Math. Soo. 1974-187-P.231-248