УДК 512.536

О.В.Гутік

ДОВІЛЬНА ТОПОЛОГІЧНА НАПІВГРУПА ТОПОЛОГІЧНО ІЗОМОРФНО ВКЛАДАЄТЬСЯ В ПРОСТУ ЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗНУ ТОПОЛОГІЧНУ НАПІВГРУПУ

Довільна топологічна напівгрупа топологічно ізоморфно вкладається в просту топологічну напівгрупу [1]. Природно виникає запитання про аналог теореми Гартмана-Мицельського [2] для топологічних напівгруп: чи довільна топологічна напівгрупа вкладається у просту лінійно зв'язну напівгрупу? Ми позитивно відповідаємо на це запитання. Запропонована конструкція пов'язана з використанням алгебраїчної конструкції Брака вкладення довільної напівгрупи у просту напівгрупу з одиницею [1], [3], [4, Т. 2, с. 139-140]. Нехай S – напівгрупа, $a, b \notin S$. Напівгрупа $\mathcal{C}(S)$ породжується множиною $S \cup \{a, b\}$, та задається співвідношеннями $ab = 1$, $as = a$, $sb = b$ для всіх $s \in S$, а також співвідношеннями, що виконуються в S. Одиницею 1 напівгрупи $\mathcal{C}(S)$ є або одиниця напівгрупи S, якщо $1 \in S$, або ж приєднана звичайним чином до $\mathcal{C}(S)$ одиниця, якщо S не містить одиниці. Напівгрупу $\mathcal{C}(S)$, так побудовану, будемо називати напівгрупою Брака на S. Кожен елемент напівгрупи $\mathcal{C}(S)$ єдиним чином зображається у вигляді $b^i t a^j$, де $t \in S^1$. Напівгрупа S алгебраїчно вкладається у $\mathcal{C}(S)$ і $\mathcal{C}(S)$ - проста напівгрупа.

Твердження 1. *Нехай $\{(S_i, \tau_i) | i \in \mathbb{N}\}$ - сім'я топологічних напівгруп, що задовольняє умови:*

1) (S_i, τ_i) - відкрита піднапівгрупа в (S_{i+1}, τ_{i+1});

2) S_i - проста напівгрупа для кожного $i \in \mathbb{N}$.

Якщо $\mathcal{B}(a) = \cup\{\mathcal{B}_n(a) | n \in \mathbb{N}, \mathcal{B}_n(a)$ - база топології τ_n у точці $a \in \cup_{i=1}^{\infty} S_i\}$. Тоді $S = \cup\{S_i | i \in \mathbb{N}\}$ з топологією τ, що породжена *сім'єю* $\{B(a) | a \in S\}$ *є простою топологічною, а за виконання умови*

3) (S_i, τ_i) *– топологічна інверсна напівгрупа для кожного* $i \in \mathbf{N}$ *топологічною інверсною напівгрупою.*

Доведення. Оскільки для довільних $s, t \in S$ існує $i \in \mathbf{N}$ таке, що $s, t, st \in S_i$, то напівгрупова операція визначена на S.

Покажемо, що S – проста напівгрупа. Припустимо, що S не є простою, тоді існує нетривіальний ідеал J в S. Оскільки для кожного $i \in \mathbf{N}$ S_i піднапівгрупа в S_{i+1}, то існує $k \in \mathbf{N}$ таке, що $S_k \cap J = J_k \neq \emptyset$, і $S_k J_k S_k \subset J_k$, а це суперечить простоті S_k.

Покажемо, що (S, τ) - топологічна напівгрупа. Нехай a і b довільні елементи з S. Існує $n \in \mathbf{N}$ таке, що $a, b, ab \in S_n$. Нехай $W(ab)$ - довільний окіл ab в (S, τ). $W(ab) \cap S_n$ – відкритий окіл ab в S_n. (S_n, τ_n) - топологічна напівгрупа, тому існують околи $U(a)$ і $V(b)$ в S_n такі, що $U(a) \cdot V(b) \subseteq W(ab) \cap S_n \subseteq W(ab)$. Оскільки $U(a)$ і $V(b)$ – відкриті околи в S, то (S, τ) – топологічна напівгрупа.

Покажемо, що якщо виконується умова 3), то (S, τ) - топологічна інверсна напівгрупа. Інверсність S випливає з того, що для кожного $n \in \mathbf{N}$ виконується умова : для довільного $a \in S_n$ існує інверсний $a^{-1} \in S_n$ і два довільних ідемпотента в S_n комутують ([4], теорема 1.17). Доведемо, що інверсія неперервна в (S, τ). Нехай $a \in S$. Існує $n \in \mathbf{N}$ таке, що $a \in S_n$. Нехай $U(a)$ – довільний відкритий окіл a в (S, τ). Множина $U(a) \cap S_n$ відкрита в (S_n, τ_n). S_n – топологічна інверсна напівгрупа, отже існує $V(a^{-1})$ - відкритий окіл a^{-1} такий, що $(V(a^{-1}))^{-1} \subseteq U(a) \cap S_n \subseteq U(a)$. Отже (S, τ) – топологічна інверсна напівгрупа.

Зауваження 1. *Якщо сім'я* $\{(S_i, \tau_i) | i \in \mathbf{N}\}$ *напівгруп задовольняє умовам твердження 1 і будь-які дві точки з* S_i *можна з'єднати шляхом в* S_{i+1}, *то* S *– лінійно зв'язна напівгрупа.*

Нехай (S, τ_0) – довільна топологічна напівгрупа. Якщо S не містить одиниці, то будемо вважати, що до S одиниця приєднана дискретно. $J_{\max}([0;1], \max)$ – напівгрупа з індукованою з $\mathbf{R}$ природною топологією. Нехай $G = S \times J_{\max}$ з топологією декартового добутку τ^0. Очевидно, що якщо (S, τ_0) – топологічна (інверсна) напівгрупа, то (G,τ^0) – топологічна (інверсна) напівгрупа.

Нехай $CG = C(G)$ - напівгрупа Брака на G, $\tilde{\tau}$ – топологія прямої суми на CG ([1], теорема 1). Топологію $\tilde{\tau}$ послабимо до напівгрупової τ^* так. У точках b^isa^j $i,j \in \mathbb{Z}_+, s \in G\setminus\{1\}$ бази топологій $\tilde{\tau}$ і τ^* співпадають. Базу топології τ^* у точках $b^isa^j i,j \in \mathbb{N}$, задамо так. Сім'я $\mathcal{B}^*(b^ia^j) = \{U_\varepsilon(b^ia^j) = b^iUa^j \cup b^{i-1}(S\times]1-\varepsilon,1[)a^{j-1} | U \in \mathcal{B}(1)$, $\mathcal{B}(1)$ – база топології τ_0 у точці $1 \in G, \varepsilon \in]0,1[\}, i,j \in \mathbb{N}$ задовольняє умовам (BP1)-(BP3) [5], а отже, і задає топологію у точках b^ia^j.

Лема 1. *Якщо (S,τ_0) – топологічна (інверсна) напівгрупа, тоді (CG,τ^*) – топологічна (інверсна) напівгрупа.*

Доведення. Оскільки топологія прямої суми $\tilde{\tau}$ на CG напівгрупова ([1], теорема 1), то, очевидно, що неперервність множення в (CG,τ^*) достатньо перевірити у трьох випадках

1) $b^ia^j \cdot b^ka^l$;

2) $b^ia^j \cdot b^ksa^l$;

3) $b^isa^j \cdot b^ka^l$,

де $i,j,k,l \in \mathbb{Z}_+, s \in G$.

Розглянемо ці випадки.

$$1)\ b^ia^j \cdot b^ka^l = \begin{cases} b^{i+k-j}a^l, & \text{якщо } j < k; \\ b^ia^l, & \text{якщо } j = k; \\ b^ia^{l+j-k}, & \text{якщо } j > k. \end{cases}$$

Якщо для околів одиниці $1 \in G$ $U(1), V(1), W(1)$ виконується $U(1)\cdot V(1) \subseteq W(1)$, тоді $U_\varepsilon(b^ia^j)\cdot V_\varepsilon(b^ka^l) \subseteq W(b^ia^j\cdot b^ka^l)$.

$$2)\ b^ia^j \cdot b^ksa^l = \begin{cases} b^{i+k-j}sa^l, & \text{якщо } j \le k; \\ b^ia^{l+j-k}, & \text{якщо } j > k. \end{cases}$$

Отже:

а) якщо $j \le k$, тоді $V_\varepsilon(b^ia^j)\cdot b^kU(s)a^l \subseteq b^{i+k-j}U(s)a^l$;

б) якщо $j > k$, тоді $V_\varepsilon(b^ia^j)\cdot b^kU(s)a^l \subseteq V_\varepsilon(b^ia^{j+l-k})$.

$$3)\ b^isa^j \cdot b^ka^l = \begin{cases} b^{i+k-j}a^l, & \text{якщо } j < k; \\ b^isa^{l+j-k}, & \text{якщо } j \ge k. \end{cases}$$

Тому

а) якщо $j < k$, тоді $b^iU(s)a^j \cdot V_\varepsilon(b^ka^l) \subseteq V_\varepsilon(b^{i+k-j}a^l)$;

б) якщо $j > k$, тоді $b^iU(s)a^j \cdot V_\varepsilon(b^ka^l) \subseteq b^iU(s)a^{j+l-k}$.

Нехай (S, τ_0) – топологічна інверсна напівгрупа. Оскільки топологія прямої суми $\tilde{\tau}$ на $\mathcal{C}G$ є напівгруповою інверсною ([1], наслідок 1), то неперервність інверсії в $(\mathcal{C}G, \tau^*)$ достатньо перевірити у точках $b^i a^j i, j \in \mathbb{N}$. Якщо $(V(1))^{-1} \subseteq V(1)$ у (G, τ^0), тоді $(V_\varepsilon(b^i a^j))^{-1} \subseteq V_\varepsilon(b^j a^i)$. Лема доведена.

Нехай $\mathcal{C}^0(\mathcal{C}G) = \mathcal{C}G$. Поклавши $\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G) = \mathcal{C}(\mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{C}G))$, отримаємо сім'ю напівгруп $\{\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G) | n \in \mathbb{N}\}$.

На $\mathcal{C}^1(\mathcal{C}G)$ топологію прямої суми $\tilde{\tau}_1$ ([1], теорема 1) послабимо до напівгрупової τ_1^* так. У точках $b_1^{i_1} t a_1^{j_1}$ $i_1, j_1 \in \mathbb{Z}_+, t \in \mathcal{C}G \backslash \{1\}$ бази топологій $\tilde{\tau}_1$ і τ_1^* співпадають. Топологію $\tilde{\tau}_1$ послабимо лише у точках $b_1^{i_1} 1 a_1^{j_1}$, де 1 – одиниця напівгрупи $\mathcal{C}G$, $i_1, j_1 \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{B}^*(1)$ – база топології τ^* у точці $1 \in \mathcal{C}G$, $S_0(n) = \{b^k s a^l | k \geq n, l \geq n, s \in G\} \backslash \{b^n(s \times \{0\})a^n | s \in S\}$. Сім'я

$$\mathcal{B}^*(b^i a^j) = \{M_1^{i,j}(U, n) = b_1^{i_1} U(1) a_1^{j_1} \cup b_1^{i_1 - 1} S_0(n) a_1^{j_1 - 1} | U(1) \in \mathcal{B}^*(1), n \in \mathbb{N}\}$$

задовольняє умовам (BP1)-(BP2) [5], а отже, задає базу топології τ_1^* у точці $b_1^{i_1} a_1^{j_1}$.

Припустимо, що ми вже задали топологію τ_{n-1}^* на напівгрупі $\mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{C}G)$. Визначимо тепер топологію τ_n^* на $\mathcal{C}^n(\mathcal{C}G)$. Топологію прямої суми $\tilde{\tau}_n$ ([1], теорема 1) послабимо до напівгрупової τ_n^* так. У точках $b_n^{i_n} t a_n^{j_n} i_n, j_n \in \mathbb{Z}_+, t \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{C}G) \backslash \{1\}$ бази топологій $\tilde{\tau}_n$ і τ_n^* співпадають. Топологію $\tilde{\tau}_n$ послабимо лише у точках $b_n^{i_n} a_n^{j_n}$, $i_n, j_n \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{B}_{n-1}^*(1)$ – база топології τ_{n-1}^* у точці $1 \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{C}G)$,

$$S_{n-1}(m) = \{b_{n-1}^{i_{n-1}} \mathcal{C}^{n-2}(\mathcal{C}G) a_{n-1}^{j_{n-1}} | i_{n-1}, j_{n-1} \geq m\} \backslash$$

$$\backslash \{b_{n-1}^m b_{n-2}^{i_{n-2}} \cdots b_1^{i_1} b^i (s \times \{0\}) a^j a_1^{j_1} \cdots a_{n-2}^{j_{n-2}} a_{n-1}^m | ((i = 0) \vee (j = 0)) \;\&$$

$$\& \;((i_1 = 0) \vee (j_1 = 0)) \;\& \;\cdots\; \& \;((i_{n-2} = 0) \vee (j_{n-2} = 0)), s \in S\}.$$

Сім'я

$$\mathcal{B}_n^*(b_n^{i_n} a_n^{j_n}) = \{M_n^{i_n, j_n}(U, m) = b_n^{i_n} U(1) a_n^{j_n} \cup b_n^{i_n - 1} S_{n-1}(m) a_n^{j_n - 1} |$$

$$U(1) \in \mathcal{B}_{n-1}^*(1), m \in \mathbb{N}\}$$

задовольняє умовам (BP1)-(BP2) [5], а отже і задає базу топології τ_n^* у точці $b_n^{i_n} a_n^{j_n}$.

Лема 2. *Якщо (S,τ_0) – топологічна (інверсна) напівгрупа, тоді $\{(C^n(CG),\tau_n^*)|n\in\mathbb{N}\}$ – сім'я простих топологічних (інверсних) напівгруп.*

Доведення. З теореми 8.45 [4] випливає, що $\{C^n(CG)|n\in\mathbb{N}\}$ – сім'я простих напівгруп.

$(C^0(CG),\tau^*)$ – топологічна (інверсна) напівгрупа (лема 1). Покажемо, що з того, що $(C^{\alpha-1}(CG),\tau^*_{\alpha-1})$ – топологічна (інверсна) напівгрупа випливає, що $(C^\alpha(CG),\tau^*_\alpha)$ – топологічна (інверсна) напівгрупа для кожного $\alpha\in\mathbb{N}$.

Нехай $\tilde{s},\tilde{t}\in C^\alpha(CG)$. Тоді

$$\tilde{s}=b^i_\alpha s a^j_\alpha,\ s\in C^{\alpha-1}(CG), i,j\in\mathbb{Z}_+,$$

$$\tilde{t}=b^k_\alpha t a^l_\alpha,\ t\in C^{\alpha-1}(CG), k,l\in\mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, що неперервність множення достатньо перевірити у таких трьох випадках, оскільки ослаблення напівгрупової топології $\tilde{\tau}_\alpha$ на $C^\alpha(CG)$ відбувається лише у точках $b^i_\alpha a^j_\alpha$ $i,j\in\mathbb{N}$:
1) $b^i_\alpha a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha a^l_\alpha$;
2) $b^i_\alpha a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha s a^l_\alpha$;
3) $b^i_\alpha s a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha a^l_\alpha$,
де $i,j,k,l\in\mathbb{Z}_+$, $s\in C^{\alpha-1}(CG)$.

Довільне $s\in C^{\alpha-1}(CG)$ можна зобразити у вигляді $s=b^p_{\alpha-1}s^0a^q_{\alpha-1}$, $s^0\in C^{\alpha-2}(CG)$.

Розглянемо три вищезгаданих випадки.

1) $b^i_\alpha a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha a^l_\alpha=\begin{cases} b^{i+k-j}_\alpha a^l_\alpha, & \text{якщо } j\le k;\\ b^i_\alpha a^{l+j-k}_\alpha, & \text{якщо } j>k.\end{cases}$

Нехай для одиниці $1\in C^{\alpha-1}(CG)$ виконується $U(1)\cdot U(1)\subseteq W(1)$ причому $U(1)\subseteq W(1)\subseteq C^{\alpha-1}(CG)$. Тоді $M^{i,j}_\alpha(U(1),n)\cdot M^{k,l}_\alpha(U(1),n)\subseteq$ $\subseteq M^{\beta,\gamma}_\alpha(W(1),n)$, де β і γ степені b_α і a_α відповідно, утворені при перемноженні $b^i_\alpha a^j_\alpha$ і $b^k_\alpha a^l_\alpha$.

2) $b^i_\alpha a^j_\alpha\cdot b^k_\alpha s a^l_\alpha=\begin{cases} b^{i+k-j}_\alpha s a^l_\alpha, & \text{якщо } j\le k;\\ b^i_\alpha a^{l+j-k}_\alpha, & \text{якщо } j>k.\end{cases}$

Тому

а) якщо $j\le k$, тоді $M^{i,j}_\alpha(U(1),n)\cdot b^k_\alpha V(s)a^l_\alpha\subseteq b^{i-j+k}_\alpha W(s)a^l_\alpha$,

де $U(1)\cdot V(s)\subseteq W(s)\subseteq C^{\alpha-1}(CG), n\in \mathbf{N}$,
б) якщо $j>k$, тоді $M_\alpha^{i,j}(U(1),m)\cdot b_\alpha^k V(s)a_\alpha^l\subseteq M_\alpha^{i,l+j-k}(U(1),n)$, де $m=n+p$, $V(s)\subseteq C^{\alpha-1}(CG)$ – окіл $s\in C^{\alpha-1}(CG)$.

3) $b_\alpha^i s a_\alpha^j\cdot b_\alpha^k a_\alpha^l=\begin{cases} b_\alpha^{i+k-j}a_\alpha^l, & \text{якщо } j<k;\\ b_\alpha^i s a_\alpha^{l+j-k}, & \text{якщо } j\geq k.\end{cases}$

Отже

а) якщо $j<k$, тоді $b_\alpha^i U(s)a_\alpha^j\cdot M_\alpha^{k,l}(V(1),m)\subseteq M_\alpha^{i+k-j,l}(V(1),n)$, де $m=n+q$, $U(s)\subseteq C^{\alpha-1}(CG)$ – окіл $s\in C^{\alpha-1}(CG)$;
б) якщо $j\geq k$, тоді $b_\alpha^i U(s)a_\alpha^j\cdot M_\alpha^{k,l}(V(1),n)\subseteq b_\alpha^i W(s)a_\alpha^{j+l-k}$, де $U(s)\cdot V(1)\subseteq W(s)\subseteq C^{\alpha-1}(CG), n\in\mathbf{N}$

У випадку коли (S,τ_0) – топологічна інверсна напівгрупа, щоб показати, що $\{(C^n(CG),\tau_n^*)|n\in\mathbf{N}\}$ – сім'я інверсних топологічних напівгруп, достатньо показати неперервність інверсії у напівгрупі $(C^n(CG),\tau_n^*)$ в точках $b_n^i a_n^j$, оскільки тілки у них відбувається послаблення топології прямої суми ([1], наслідок 1).

$(M_\alpha^{i,j}(U(1),n))_1\subseteq M_\alpha^{j,i}(U(1),n)$, де $(U(1))_1\subseteq V(1)$ в $C^{\alpha-1}(CG)$.

Лема доведена.

ТЕОРЕМА. *Довільна топологічна (інверсна) напівгрупа топологічно ізоморфно вкладається в просту лінійно зв'язну топологічну (інверсну) напівгрупу з одиницею.*

Доведемо декілька допоміжних тверджень.

ТВЕРДЖЕННЯ 2. *Нехай* $\tilde{s}$ – *довільний елемент* (CG,τ^*), $\tilde{s}=b^i(\{s\}\times\{t\})a^j, s\in S$, $t\in[0,1[$. *Існує* $f\in C([0,1],CG)$ *таке, що* $f(1)=b^{i+1}a^{j+1}$ *і* $f(0)=\tilde{s}$.

Доведення. Розглянемо два випадки.

1) $t=0$. Тоді $\tilde{s}=b^i(\{s\}\times\{0\})a^j$.

Відображення f задамо так

$$f(x)=\begin{cases} b^i(\{s\}\times\{x\})a^j, & 0\leq x<1;\\ b^{i+1}a^{j+1}, & x=1.\end{cases}$$

а) Перевіримо неперервність функції f у точці $x=0$. Нехай $U^*(b^i(\{s\}\times\{0\})a^j)$ -довільний елемент бази топології τ^* у точці

$b^i(\{s\} \times \{0\})a^j \in CG$, тоді $U^*(b^i(\{s\} \times \{0\})a^j) = b^i(U(s) \times [0,\delta[)a^j$, де $U(s)$ – довільний елемент бази топології τ_0 у точці $s \in S, \delta \in]0,1[$. $f^{-1}(b^i(U(s) \times [0,\delta[)a^j) = [0,\delta[$ – відкрита множина в $[0,1]$, а отже, функція f неперервна в точці $x = 0$.

б) Перевіримо неперервність функції f при $x \in]0,1[$. Нехай $U^*(b^i(\{s\} \times \{x\})a^j)$ -довільний елемент бази топології τ^* у точці $b^i(\{s\} \times \{x\})a^j \in CG$, тоді $U^*(b^i(\{s\} \times \{x\})a^j) = b^i(U(s) \times]\varepsilon,\delta[)a^j$, де $U(s)$ – довільний елемент бази топології τ_0 у точці $s \in S$, $0 < \varepsilon < \delta < 1$. $f^{-1}(b^i(U(s) \times]\varepsilon,\delta[)a^j) =]\varepsilon,\delta[$ – множина відкрита в $[0,1]$, а отже, і функція f – неперервна на інтервалі $]0,1[$.

в) Покажемо, що функція f неперервна у точці $x = 1$. Нехай $U_\varepsilon(b^{i+1}a^{j+1})$ – довільний окіл точки $b^{i+1}a^{j+1} \in CG$ у топології τ^*. $f^{-1}(U_\varepsilon(b^{i+1}a^{j+1})) =]1-\varepsilon, 1]$ – відкрита множина в $[0,1]$.

Отже, функція f – неперервна на $[0,1]$.

2) $0 < t < 1$.

Покладемо $f = g \circ \phi$ де $\phi : [0,1] \to [t,1]$. $\phi(x) = x + t - xt$, і

$$g(x) = \begin{cases} b^i(\{s\} \times \{x\})a^j, & t \le x < 1; \\ b^{i+1}a^{j+1}, & x = 1. \end{cases}$$

Неперервність функції g доводиться аналогічно, як і в 1. Функція f – неперервна, як композиція неперервних ϕ і g. Твердження доведене.

Твердження 3. *Для довільного $n \in \mathbb{Z}_+$, множина $L_k^n = \{b_n^i C^{n-1}(CG)a_n^j | i - j = k\}$ – лінійно зв'язна підмножина в $(C^n(CG), \tau^*)$ для довільного $k \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Очевидно, що достатньо показати, що для довільного $s = b_n^{i_n} \dots b_1^{i_1} b^i s^0 a^j a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} \in C^n(CG)$ існує функція $f_1 \in C([0,1], C^n(CG))$ така, що $f_1(0) = s$, $f_1(1) = b_n^{i_n+1} a_n^{j_n+1}$.

Доведення будемо проводити індукцією за n.

1. $l = 1$. З твердження 2 випливає, що достатньо побудувати функцію f_1, що задовольняє умовам: $f_1(1) = b_1^{i_1} b^i 1 a^j a_1^{j_1}$, $f_1(0) = b_1^{i_1+1} a_1^{j_1+1}$, де 1 – одиниця G, щоб показати, що множина L_p^1 – лінійно зв'язна для довільного $p \in \mathbb{Z}$.

Покажемо це у випадку, коли $i = 0$ або $j = 0$. Нехай $j = 0$, тоді $b_1^{i_1} b^i 1 a^j a_1^{j_1} = b_1^{i_1} b^i 1 a_1^{j_1}.1 = 1_S \times \{y\}$, де y деяке число з $[0,1[$,

1_S – одиниця напівгрупи S. Якщо $x \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, де $k \in \mathbb{N}$, покладемо $f_1(x) = b_1^{i_1} b^{i+k-1}(1_S \times \{t\} a^{k-1} a_1^{j_1}$, де $t = \frac{1}{x} - k$, $f_1(0) = b_1^{i_1+1} a_1^{j_1+1}$. Неперервність функції f_1 при $x \in]0,1]$ випливає з неперервності функції f (твердження 2).

Тоді для довільного елемента бази топології τ_1^* у точці $b_1^{i_1+1} a_1^{j_1+1}$ $M_1^{i_1+1, j_1+1}(U(1), k)$ $f_1^1(M_1^{i_1+1, j_1+1}(U(1), k)) = [0, \frac{1}{k+1}[$ – відкрита множина в $[0,1]$.

2. Припустимо, що для $n = l-1$ виконується, що для кожного $s = b_{l-1}^{i_{l-1}} s^* a_{l-1}^{j_{l-1}}$ $s^* \in C^{l-2}(\mathcal{C}G)$ існує $f_1 \in C([0,1], C^{l-1}(\mathcal{C}G))$ така, що $f_1(0) = s, f_1(1) = b_{l-1}^{i_{l-1}+1} a_{l-1}^{j_{l-1}+1}$. Покажемо, що це твердження виконується і якщо $l = n$, тобто для довільного $s \in C^l(\mathcal{C}G)$ існує неперервна функція $f : [0,1] \to C^l(\mathcal{C}G)$ така, що $f(0) = s$ і $f(1) = b_l^{i_l+1} a_l^{j_l+1}$.

Нехай $s = b_l^{i_l} b_{l-1}^{i_{l-1}} \ldots b_1^{i_1} b^i s^0 a^j a_1^{j_1} \ldots a_{l-1}^{j_{l-1}} a_l^{j_l}$. Оскільки для довільних $i_l, j_l \in \mathbb{Z}_+$ множина типу $b_l^{i_l} C^{l-1}(\mathcal{C}G) a_l^{j_l}$ гомеоморфна $C^{l-1}(\mathcal{C}G)$, тоді існує неперервна функція

$$f^1_{i_{l-1}, j_{l-1}} : [0,1] \to b_l^{i_l} C^{l-1}(\mathcal{C}G) a_l^{j_l}$$

така, що

$$f^1_{i_{l-1}, j_{l-1}}(0) = s \;;$$

$$f^1_{i_{l-1}, j_{l-1}}(1) = b_l^{i_l} b_{l-1}^{i_{l-1}+1} a_{l-1}^{j_{l-1}+1} a_l^{j_l},$$

і для кожного $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ існує неперервна функція

$$f^\alpha_{i_{l-1}, j_{l-1}} : [0,1] \to b_l^{i_l} C^{l-1}(\mathcal{C}G) a_l^{j_l}$$

така, що

$$f^\alpha_{i_{l-1}, j_{l-1}}(0) = b_l^{i_l} b_{l-1}^{i_{l-1}+\alpha} a_{l-1}^{j_{l-1}+\alpha} a_l^{j_l} \;;$$

$$f^\alpha_{i_{l-1}, j_{l-1}}(1) = b_l^{i_l} b_{l-1}^{i_{l-1}+\alpha+1} a_{l-1}^{j_{l-1}+\alpha+1} a_l^{j_l}.$$

Відображення f задамо так $f(0) = b_l^{i_l+1} a_l^{j_l+1}$, якщо ж $x \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, $k \in \mathbb{N}$ покладемо $f_k(x) = f^k_{i_{l-1}, j_{l-1}}(\frac{1}{x} - k)$.

Оскільки функція $f^{\alpha}_{i_l-1,j_l-1}$ неперервна для кожного $\alpha \in \mathbb{N}$ і $f^{\alpha-1}_{i_l-1,j_l-1}(1) = f^{\alpha}_{i_l-1,j_l-1}(0)$, то функція $f = \nabla_{k\in\mathbb{N}} f_k$ – неперервна на $]0,1]$ ([5], твердження 2.1.11). Функція f також неперервна у точці $x = 0$. Дійсно, для довільного елемента бази топології τ_k^* $M_l^{i_l+1,j_l+1}(U(1),m)$ у точці $b_l^{i_l+1}a_l^{j_l+1}$ множина $f^{-1}(M_l^{i_l+1,j_l+1}(U(1),m)) = [0,\frac{1}{m}[$ – відкрита в $[0,1]$. Твердження доведене.

Доведення теореми. Сім'я $\{(C^n(CG),\tau_n^*)|n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє умовам твердження 1. Покладемо $C^{\omega}(CG) = \cup\{C^n(CG)|n \in \mathbb{N}\}$. Топологія τ на $C^{\omega}(CG)$ породжується сім'єю $\{B^{\omega}(a)|a \in C^{\omega}(CG)\}$, де $B^{\omega}(a) = \cup\{\{B_n^*(a)|n \in \mathbb{N}, B_n^*(a)$ – база топології τ_n^* в точці $a \in \cup_{i=1}^{\infty} C^i(CG)\}$.

З тверджень 2 і 3 випливає, що сім'я $\{(C^n(CG),\tau_n^*)|n \in \mathbb{N}\}$ задовольняє умовам у зауваженні 1. Отже $(C^{\omega}(CG),\tau)$ – лінійно зв'язна топологічна напівгрупа, причому якщо (S,τ_0) – топологічна інверсна, тоді $(C^{\omega}(CG),\tau)$ – топологічна інверсна напівгрупа.

Список літератури

1. Гутик О.В. *Вложение топологических полугрупп в простые* // Математичні студії. 1994. 3. С. 10-14.
2. Hartman S. Mycielsky J. *On the imbedding of topological groups into connected topological groups* // Coll. Math. 1958. 5. P. 167-169.
3. Bruck R.H. *A survey of binary systems* // Ergebnisse der Math. Heft 20, Berlin, 1958.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. М., 1972. Т. 1. 288 с. Т. 2. 424 с.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986. 752 с.