УДК 512.552.12

Б.В.ЗАБАВСЬКИЙ

ПРО КОМУТАТИВНІ КІЛЬЦЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ ЗІ СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ МІНІМАЛЬНИХ ПРОСТИХ ІДЕАЛІВ

Комутативні кільця елементарних дільників, тобто кільця, над якими можлива діагональна редукція є кільцями скінченно породжених головних ідеалів. Виникає запитання: чи довільне кільце скінченно породжених головних ідеалів є кільцем елементарних дільників? У праці [1] побудовано приклад комутативного кільця скінченно породжених головних ідеалів, яке не є кільцем елементарних дільників. Це дало змогу звузити клас комутативних кілець елементарних дільників до класу комутативних областей Безу. У [2-6] поставлена проблема: чи кожна комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників?

Оскільки гомоморфний образ комутативного кільця елементарних дільників є знову кільцем елементарних дільників, то важливість цієї гіпотези очевидна. Окрім того, очевидно, що пряма сума комутативних областей елементарних дільників є кільцем елементарних дільників і навпаки. Тому дослідження діагональної редукції матриць над комутативною областю Безу можна звести до дослідження аналогічного питання для комутативних кілець скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів.

ТЕОРЕМА 1. Комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли для довільного простого ідеалу фактор кільце по ньому є кільцем елементарних дільників.

Для доведення теореми важливе таке твердження.

ТВЕРДЖЕННЯ 1. Комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів R зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли фактор кільце R по нільрадикалу є кільцем елементарних дільників.

Доведення. Нехай $P_1, \dots, P_n$ – всі мінімальні прості ідеали R, а $P(R)$ – нільрадикал R, тобто $P(R) = \cap_{i=1}^n P_i$. Припустимо, що $R/P(R)$ є кільцем елементарних дільників. З уваги на [7, теор.2.2., 8, теор.6.] для того, щоб показати, що R є кільцем елементарних дільників, досить показати, що для довільних $a, b, c \in R$ таких, що $aR+bR+cR = R$ існують такі елементи $p, q \in R$, що $(ap + bq)R + cR = R$. Оскільки $R/P(R)$ – кільце елементарних дільників, то внаслідок [8, теор.6.] для елементів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \subset R/P(R)$ існують елементи $\bar{p}, \bar{q}, \bar{u}, \bar{v} \subset R/P(R)$ такі, що $(\bar{a}\bar{p} + \bar{b}\bar{q})\bar{u} + \bar{c}\bar{q}\bar{v} = \bar{1}$, де $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ позначають гомоморфні образи елементів $a, b, c \in R$ при канонічному гомоморфізмі R в $R/P(R)$. Звідси очевидно, що існують елементи $p, q, u, v \in R$, $n \in P(R)$ такі, що $(ap + bq)u + cqv = 1 + n$. Оскільки $1 + n$ – зворотний елемент R, то $(ap + bq)R + cR = R$, що і потрібно довести. Твердження доведено.

Доведення теореми. Нехай $P_1, \dots, P_n$ – усі мінімальні прості ідеали R, а $P(R)$ – нільрадикал R. Оскільки кільце скінченно породжених головних ідеалів є кільцем Прюфера, то $P_1, \dots, P_n$ – попарно комаксимальні ідеали [9, с. 583]. За китайською теоремою $R/P(R)$ – пряма сума кілець $R/P_1, \dots, R/P_n$ [9, с. 583]. З умов теореми, кільця $R/P_1, \dots, R/P_n$ – кільця елементарних дільників. Оскільки пряма сума кілець елементарних дільників є кільцем елементарних дільників, то $R/P(R)$ – кільце елементарних дільників. З доведеного твердження R є кільцем елементарних дільників. Теорема доведена.

Легко зауважити, що для доведення теореми досить вимагати, щоб фактор кільця по мінімальних простих ідеалах були кільцями елементарних дільників.

Розглянемо конкретні приклади комутативних кілець елементарних дільників. Відомо, що комутативні області головних ідеалів є кільцями елементарних дільників. О.Хелмер [10] увів до розгляду адекватні області і довів, що вони є кільцями елементарних дільників. І.Капланський [8] довів, що адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі є кільцями елементарних дільників. У праці [7] доведено, що адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі є або кільцями без дільників нуля, або кільцями нормування. У своїй статті ми доведемо, що комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є адекватним тоді і тільки тоді, коли воно є прямою сумою кілець нормування.

Елемент a комутативного кільця скінченно породжених головних ідеалів R назвемо адекватним, якщо для кожного елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що:

1) $a = rs$;
2) $rR + bR = R$;
3) для будь-якого $s' \in s$ включення $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R + bR$ – властивий.

Очевидними прикладами адекватних елементів служать одиниці, атоми кільця, а також елементи, вільні від квадратів.

ТВЕРДЖЕННЯ 2. Множина адекватних елементів комутативного кільця скінченно породжених головних ідеалів R є мультиплікативно замкнутою.

Доведення. Нехай a, b – адекватні елементи R, а c – довільний елемент R. Тоді існують такі елементи $r, m, t, l \in R$, що $a = rm, b = tl$, де $rR + cR = R, tR + cR = R$, причому для будь-яких m', l' з включення $mR \subseteq m'R \neq R, lR \subseteq l'R \neq R$ випливає співвідношення $m'R + cR \neq R, l'R + cR \neq R$. Отже $rtR + cR = R$ і для довільного $n' \in R$ з умови $mlR \subset n'R \neq R$ отримаємо $mlR + n'R \subseteq (mR + n'R)(lR + n'R) \neq R$. Тому $mlR + n'R \neq R$, а $n'R + cR \neq R$, тобто елемент ab – адекватний.

ТВЕРДЖЕННЯ 3. Нехай P - простий ідеал комутативного кільця скінченно породжених головних ідеалів R, який містить хоча б один адекватний елемент. Тоді P міститься в одному і тільки одному максимальному ідеалі.

Доведення. Якщо P – максимальний ідеал, то все доведено. Нехай P – простий ідеал, який містить адекватний елемент a й існують різні максимальні ідеали M_1 і M_2, що $P \subseteq M_1 \cap M_2$. Оскільки $M_1 + M_2 = R$, то існують елементи $m_1 \in M_1$ і $m_2 \in M_2$, такі, що $m_1 + m_2 = 1$. З визначення елемента a, $a = rs$, де $rR + m_1R = R$ і для довільного необоротного дільника s' елемента s ідеал $s'R + m_1R$ – властивий. Оскільки P – простий ідеал і $P \subset M_1$, то $s \in P$. Нехай $dR = sR + m_2R$. Оскільки $P \subset M_2$, то d – необоротний дільник елемента s. Але $dR + m_1R \supset m_2R + m_1R = R$, що суперечить вибору елемента a. Отримана суперечність доводить наше твердження.

Комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів, в якому довільний елемент є адекватним назвемо адекватним. Очевидними прикладами адекватних кілець служать кільця нормування, регулярні кільця [7,тв. 4.6.].

ТЕОРЕМА 2. Нехай R – комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів з єдиним мінімальним простим ідеалом P, який містить хоча б один адекватний елемент, тоді R – кільце нормування.

Доведення. З доведеного випливає, що P міститься в єдиному максимальному ідеалі. Оскільки P – єдиний мінімальний простий ідеал, то це можливо лише в єдиному випадку, коли R – локальне кільце скінченно породжених головних ідеалів, тобто кільце нормування.

Очевидно, що кільце нормування є адекватним з єдиним мінімальним простим ідеалом, тобто існує

ТЕОРЕМА 3. Комутативне кільце R скінченно породжених головних ідеалів з єдиним мінімальним простим ідеалом є адекватним тоді і тільки тоді, коли R – кільце нормування.

Розглянемо випадок, коли R – комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів.

ТЕОРЕМА 4. Нехай R – комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів і нехай довільний простий ідеал R міститься в єдиному максимальному ідеалі, тоді R – пряма сума кілець нормування.

Доведення. Нехай $P_1, \dots, P_n$ – усі мінімальні прості ідеали R, а $P(R)$ – нільрадикал R. Тоді, як було вже показано, $R/P(R) = R/P_1 \oplus \cdots \oplus R/P_n$. Звідси існують попарно ортогональні ідемпотенти $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, де $\bar{e}_i \subset R/P_i$ такі, що $\bar{e}_1 + \cdots + \bar{e}_n = 1$. Тоді, піднявши ці ідемпотенти за модулем $P(R)$ до попарно ортогональних ідемпотентів $e_1, \dots, e_n \in R$, отримаємо $1-(e_1+\cdots+e_n)$ ідемпотент і $1-(e_1+\cdots+e_n) \in P(R)$, що можливо тільки, коли він є нулем. Звідси $R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR$ і кожен e_iR є гомоморфним образом R, тобто комутативним кільцем скінченно породжених головних ідеалів. Оскільки в R довільний простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, тоді e_iR – кільце нормування. Теорема доведена.

Нехай R – комутативне кільце, яке є прямою сумою кілець нормування R_i. Очевидно, що R – комутативне кільце скінченно породжених головних ідеалів. Нехай $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ – елементи кільця R, де $a_i \in R_i$, $b_i \in R_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Оскільки R_i – кільце нормування, тоді $a_i = r_i s_i$, де $r_i R + b_i R = R$ і для довільного необоротного дільника s_i' елемента s_i виконується $s_i' R_i + b_i R_i \neq R_i$. Якщо $r = (r_1, \ldots, r_n)$ і $s = (s_1, \ldots, s_n)$, тоді, очевидно, $a = rs$ і $rR + bR \neq R$. Нехай $s' = (s_1', \ldots, s_n')$ – неодиничний дільник s. Для кожного i такого, що s_i' є неодиничним дільником s_i в R_i, ми маємо $s_i' R_i + b_i R_i \neq R_i$. Звідси $s'R + bR \neq R$, тобто R є адекватним.

Зважаючи на ці міркування на основі теореми 4. отримаємо такий результат:

ТЕОРЕМА 5. Комутативне кільце R скінченно породжених головних ідеалів зі скінченим числом мінімальних простих ідеалів є адекватним тоді і тільки тоді, коли R пряма сума кілець нормування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gillman L., Henriksen M. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal// Trans. Amer. Soc. 1956, 82. P.366-394.

2. Кон П. Свободные кольца и их связи. Мир, М., 1976.

3. Henriksen N. Some remarks about elementary divisor rings// Michigan Math. J., 1955/56, 3, P.159-163.

4. Shores T.S. Bezout rings and their modules// Ring Theory Proc. Oked., New York, 1973, P.63-73.

5. Warfield R.B. Decomposability of finitely presented modules// Proc. Amer. Math.Soc. 1970, 25, P.467-472.

6. Kaplansky I. Elementary divisors and modules// Trans. Amer. Math. Soc. 1949, 66,P.464-491.

7. Larsen M., Lewis W., Shores T. Elementary divisor rings and finitely presented modules// Trans. Amer. Math. Soc. 1974. 187. 19. P.231-248.

8. Gillman L., Henriksen M. Some remarks about elementary divisors ring// Trans. Amer. Math. Soc. 1956. vol.82. P.362-365.

9. Бурбаки Н. Комутативная алгебра. Мир, М., 1971.

10. Helmer O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions// Bull. Amer. Soc. 1943. vol.49. P.225-236.