УДК 515.12

М.М. Зарічний

МНОЖЕННЯ В СУПЕРРОЗШИРЕННЯХ І ЧАСТКОВІ ДОБУТКИ

Дослідження різних функторіальних конструкцій у топології методами теорії ретрактів та нескінченновимірних многовидів є предметом багатьох праць (див оглядову статтю [1]). У цій статті ми розглядаємо означений Й. де Гроотом функтор суперрозширення λ (означення див. нижче), що діє у категорії компактів. Цей функтор породжує монаду $\mathbb{L} = (\lambda, \eta, \mu)$ на категорії *Comp* [2]. Геометрію відображень, що входять до природного перетворення μ цієї монади, розглядали у [3–5]. Ми застосовуємо до дослідження відображень μX операцію часткового добутку топологічних просторів, введену Б.О. Пасинковим [6].

Означення, що стосуються теорії функторів у категорії компактів, а також обернених спектрів, можна знайти у [1–7].

1. Нехай X, Y – компакти і $A \subset X$ – замкнена множина. Нагадаємо означення часткового добутку $P(X, Y; A)$, див. [6]. Нехай $\sim$ – відношення еквівалентності на $X \times Y$, $(a, y_1) \sim (a, y_2)$, $a \in A$, $y_1, y_2 \in Y$. Тоді $P(X,Y;A) = (X \times Y)/\sim$. Через $\langle x, y\rangle \in P(X,Y;A)$ позначаємо клас еквівалентності точки $(x, y) \in X \times Y$. Нехай $q : X \times Y \to P(X,Y;A)$ – фактор-відображення. Через $\pi : P(X,Y;A) \to X$ позначається проекція на перший співмножник, $\pi\langle x, y\rangle = x$, $\langle x, y\rangle \in P(X,Y;A)$.

Нехай задано також частковий добуток $P(X', Y'; A')$ і неперервні відображення $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, причому $f(A) \subset A'$. Тоді можна означити відображення $P(f, g) : P(X, Y; A) \to P(X', Y'; A')$ формулою $P(f, g)\langle x, y\rangle = \langle f(x), g(x)\rangle$. Відображення $P(f, g)$, як легко бачити, неперервне.

2. Суперрозширенням λX компакту X називається простір усіх максимальних зчеплених систем підмножин простору X, наділений волменівською топологією (див. [8]). При цьому система множин називається зчепленою, якщо кожні два її елементи мають непорожній перетин, і називається максимально зчепленою, якщо вона не є власною підсистемою деякої зчепленої системи замкнених підмножин простору X. Замкнену передбазу волменівської топології в λX утворюють множини вигляду

$$A^+ = \{\mathcal{M} \in \lambda X \mid A \in \mathcal{M}\},$$

де A пробігає сім'ю замкнених в X підмножин.

Через $\lambda^2 X$ позначимо простір $\lambda(\lambda X)$. Відображення $\mu X : \lambda^2 X \to \lambda X$, означене формулою

$$\mu X(\mathfrak{M}) = \cup\{\cap\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{M}\},$$

згідно з прийнятою у теорії категорій термінологією, називається множенням. Відображення $\eta X : X \to \lambda X$, $\eta X(x) = \{A \mid x \in A,\ A$ – замкнена підмножина в $X\}$, $x \in X$, є вкладенням [1], [7].

Нехай $\lambda_\nabla X = \lambda X \setminus \eta X(X)$, $\lambda^2_\nabla X = \lambda^2 X \setminus \eta\lambda X(\eta X(X))$. Тоді легко бачити, що $\mu X(\lambda^2_\nabla X) = \lambda_\nabla X$. Покладемо

$$\mu_\nabla X = \mu X \mid \lambda^2_\nabla : \lambda^2_\nabla X \to \lambda_\nabla X.$$

3. Нижче уточнюється один результат з [5], який стверджує, що для однорідного за характером відкритопородженого континууму X відображення $\mu_\nabla X$ гомеоморфне локально-тривіальному розшаруванню, шаром якого є тихоновський куб I^τ, де $\tau = w(X)$ – вага простору X.

Теорема 1. *Нехай X – однорідний за характером відкритопороджений континуум і $\tau = w(X)$. Відображення $\mu_\nabla X$ гомеоморфне тривіальному I^τ-розшаруванню тоді і лише тоді, коли $\tau = \omega$.*

Доведення. Необхідність. Якщо $w(X) = \omega$, то простоір $\lambda_\nabla X$ є метричним, а отже, паракомпактним і за теоремою Чепмена [10], локально-тривіальне I^ω-розшарування $\mu_\nabla X$ є тривіальним.

Достатність. Нехай $w(X) = \tau > \omega$. Припустивши, що $\mu_\nabla X$ – тривіальне I^τ-розшарування, одержуємо, що відображення μX гомеоморфне проектуванню

$$\pi = \pi X : P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X)) \to \lambda X.$$

Для доведення теореми досить показати, що простір $P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X))$ не є абсолютним ретрактом (AR); цим буде досягнена суперечність з наступним доведеним у [9] фактом: $\lambda^2 X \in AR$ для розглядуваних X.

Нехай $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_{\alpha,\beta}; \mathcal{P}_\omega(\tau)\}$ – сигма-спектр з границею X (див. [7]; через $\mathcal{P}_\omega(\tau)$ позначається індексна множина злічених підмножин ординала τ, частково впорядкована включеннями), $p_\alpha : X \to X_\alpha$ – граничні проекції цього спектра. Нехай $g_\alpha : I^\tau \to I^\alpha$ – проектування, де $\alpha \in \mathcal{P}_\omega(\tau)$. Припустивши, що $P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X)) \in AR$, за спектральною теоремою Є.В.Щепіна [7] одержуємо, що існує таке $\alpha \in \mathcal{P}_\omega(\tau)$, що відображення

$$P(\lambda p_\alpha, g_\alpha) : P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X)) \to P(\lambda X_\alpha, I^\alpha, \eta X_\alpha(X_\alpha))$$

відкрите.

Покажемо, що це неможливо. Нехай $V \neq \emptyset$ – така відкрита підмножина в I^τ, що $g_\alpha(V) \neq I^\alpha$. Тоді $U = q(\lambda_\nabla X \times V)$ – відкрита множина в $P(\lambda X, I^\tau; \eta X(X))$ образ якої при відображенні $P(\lambda p_\alpha, g_\alpha)$ не відкритий. Одержана суперечність завершує доведення теореми.

Існує нульвимірний аналог теореми 1. Через $D = \{0,1\}$ позначається дискретний двоточковий простір.

Теорема 2. *Нехай X – однорідний за характером відкритопороджений нульвимірний компакт ваги τ. Відображення $\mu_\nabla X$ гомеоморфне D^τ-розшаруванню тоді і тільки тоді, коли $\tau = \omega$.*

Доведення аналогічне до доведення теореми 1.

4. Сформулюємо деякі відкриті запитання. Алгебри монади $\mathbb{L}$, тобто компакти X, задані разом з "природним" відображенням (стуктурним відображенням) $\xi : \lambda X \to X$ внутрішньо охарактеризовані в [2]. Виникає проблема поширення на структурні відображення теорем 1 і 2.

Через NX позначається простір непорожніх замкнених підмножин у λX, що є перетинами елементів стандартної замкненої передбази в λX. Існує природне розшарування $p : Y \to NX$, де

$$Y = \{(x, y) \in NX \times \lambda X \mid y \in x\} \subset NX \times \lambda X,$$
$$p = pr_1|Y : Y \to NX.$$

Гіпотеза. Нехай X – відкритопороджений континуум і $\tau = w(X)$. Обмеження відображення p на доповнення до точок взаємної однозначності є локально-тривіальним I^τ-розшаруванням, причому це розшарування тривіальне тоді і тільки тоді, коли $\tau = \omega$.

Список літератури

1. Федорчук В.В. Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // Успехи матем. наук. 1986. Т.41. №6. С.121–159.
2. Заричный М.М. Монада суперрасширения и ее алгебры // Укр. матем. журнал. 1987. Т.39. №3. С.303–309.
3. Заричный М.М. О мягкости умножения в суперрасширениях // Общая топология. Пространства и отображения. – М.: Изд-во МГУ, 1989. С.70–76.
4. Заричный М.М. Итерированные суперрасширения // Общая топология. Отображения топол. пространств. – М.: Изд-во МГУ, 1986. С.45–59.
5. Заричный М.М. Абсолютные экстензоры и геометрия умножения монад в категории компактов // Матем. сборник. 1991. Т.182. №9. С.1261–1280.
6. Пасынков Б.А. Частичные топологические произведения // Тр. Моск. матем. общества. 1965. Т.13. С.136–245.
7. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи матем. наук. 1981. Т.36. Вып.3. С.3–62.
8. Mill J. van. Superextensions and Wallman spaces // MC Tracts. Amsterdam, 1977.
9. Иванов А.В. Решение проблемы ван Милла о характеризации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными ретрактами // ДАН СССР. 1982. Т.262. №3. С.526–528.
10. Chapman T.A. Locally trivial bundles and micro bundles with infinite-dimensional fibers // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. Vol.37, №2. P.595–602.