УДК 515.12+512.536

М.М. Зарічний, А.Б. Телейко

НАПІВГРУПИ І МОНАДИ

Монади у категорії компактів останніми роками систематично досліджують у зв'язку з загальною теорією нормальних та близьких до них функторів (див. [1]). Специфічною для монад, породжених такими функторами, є означена в [2] операція тензорного множення. У цій статті ми показуємо зв'язок операції тензорного множення з задачею підняття функторів і монад на категорію компактних напівгруп.

<u>**Монади.**</u> Монадою на категорії $\mathcal{C}$ називається трійка $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$, у якій $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ – ендофунктор (функторіальна частина монади), $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to T$, $\mu : T^2 \to T$ – природні перетворення (їх називають, відповідно, одиницею і множенням монади), для яких діаграми

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, equal] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd}$$

комутативні (див. [3]). Ці діаграми виражають властивості двосторонності одиниці та асоціативність множення монади.

Категорією Клейслі монади $\mathbb{T}$ називається категорія $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, об'єкти якої ті ж, що і в $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y) = \mathcal{C}(X,TY)$, а композиція $g * f$ морфізмів $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(Y,Z)$ задається формулою $g * f = \mu Z \circ Tg \circ f$.

Через $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ позначають функтор, що є тотожним на об'єктах і переводить морфізм $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ у $\eta Y \circ f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y)$.

Кажуть, що ендофунктор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ має продовження на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, якщо існує ендофунктор $\overline{F} : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, для якого $IF = \overline{F}I$. В [4] показано, що продовженням функтора F на категорію $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$

взаємнооднозначно відповідають природні перетворення $\xi : FT \to TF$, що задовольняють умови

$$\xi \circ F\eta = \eta F, \qquad \xi \circ F\mu = \mu F \circ T\xi \circ \xi T. \qquad (*)$$

Монаду $\mathbb{T}$ називають проективною [4], якщо існує природне перетворення $\pi : T \to 1_C$ (проекція), для якого $\pi \circ \eta = 1$ і $\pi \circ \mu = \pi \circ \pi T$.

Слабко нормальні функтори і монади. Нагадаємо деякі необхідні означення, що стосуються загальної теорії функторів у категорії компактів (= компактних гаусдорфових просторів) $\mathcal{C}omp$; детальніше див. у [1,5].

Функтор $F : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ називається нормальним (Є. В. Щепін [5]), якщо він неперервний, зберігає вагу, мономорфізми, епіморфізми, перетини, прообрази, точку і порожню множину. Якщо з цього означення вилучити умову збереження прообразів, то одержимо поняття слабко нормального функтора.

Зауважимо, що для кожного слабко нормального функтора F існує єдине природне перетворення $\eta : 1_{\mathcal{C}omp} \to F$.

Монада у категорії $\mathcal{C}omp$ називається (слабко) нормальною, якщо її функторіальна частина є (слабко) нормальним функтором.

Наведемо деякі приклади слабко нормальних монад.

1. Степенева монада Π_α, породжена степеневим функтором $(-)^\alpha$, де $1 \le \alpha \le \omega$.
2. Монада гіперпростору $\mathbb{H} = (\exp, s, u)$. Функтор гіперпростору (експоненти) exp у відповідність кожному компактові X ставить простір $\exp X = \{A \subset X | A \neq \varnothing$ – замкнена множина$\}$, наділений топологією Вієторіса. База цієї топології утворена множинами вигляду

$$< U_1, \dots, U_n >= \{A \in \exp X | A \subset U_1 \cup \dots \cup U_n,$$
$$A \cap U_i \neq \varnothing \text{ для кожного } i = 1, 2, \dots, n\},$$

де $U_1, \dots, U_n$ пробігають сім'ю відкритих підмножин простору X. Природні перетворення s і u задаються формулами: $\eta X(x) = \{x\}$, $x \in X$, $uX(\mathcal{A}) = \cup \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \in \exp^2 X$.

3. Монада ймовірносних мір $\mathbb{P} = (P, \eta, \mu)$ (див., наприклад, [1]).

4. Монада гіперпросторів включення $\mathbb{G} = (G, \eta, \mu)$ та її підмонади. Гіперпростором включення у компакті X називається непорожня замкнена множина $\mathcal{A} \subset \exp X$, для якої виконана умова: якщо $B \in \exp X$ і $B \supset A \in \mathcal{A}$, то $B \in \mathcal{A}$.

Нехай $GX = \{\mathcal{A} | \mathcal{A}$ – гіперпростір включення в $X\} \subset \exp^2 X$. Для відображення $f : X \to Y$ нехай

$$Gf(\mathcal{A}) = \{C \in \exp Y | C \supset f(A) \text{ для деякого } A \in \mathcal{A}\}.$$

Природні перетворення η і μ задаються формулами:

$$\eta X(x) = \{A \in \exp X | x \in A\}, \quad x \in X,$$
$$\mu X(\mathfrak{A}) = \cup\{\cap\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}, \quad \mathfrak{A} \in G^2 X.$$

Опишемо деякі підфунктори функтора G, які визначають підмонади монади $\mathbb{G}$. Насамперед, для кожного натурального $k \geq 2$ означимо підфунктор N_k функтора G умовою:

$$N_k X = \{\mathcal{A} \in \exp GX | \mathcal{A} - k\text{-зчеплена система}\}$$

(k-зчепленість системи $\mathcal{A}$ означає, що $A_1 \cap \cdots \cap A_k \neq \varnothing$ для кожних $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$). Функтори N_k породжують монади $\mathbb{N}_k$.

Означимо підфунктор суперрозширення λ функтора G. Нехай

$$\lambda X = \{\mathcal{A} \in N_2 X | \text{ якщо } \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \in N_2 X, \text{ то } \mathcal{A} = \mathcal{B}\}.$$

Елементи простору λX називають максимальними зчепленими системами (м.з.с.) замкнених множин в X. Функтор λ породжує монаду суперрозширення $\mathbb{L}$.

Тензорні множення. Для слабко нормальних монад можуть бути означені операції тензорного множення; див. [1,2]. Нехай X, Y – компакти. Для кожного $x \in X$ означимо відображення $i_x : Y \to X \times Y$ формулою $i_x(y) = (x, y)$, $y \in Y$. Для кожного $b \in TY$ означимо відображення $f_b : X \to T(X \times Y)$ формулою $f_b(x) = Ti_x(b)$, $x \in X$. Тензорним добутком елементів $a \in TX$ і $b \in TX$ називається елемент

$$a \otimes b = \mu(X \times Y) \circ Tf_b(a) \in T(X \times Y).$$

Можна навести також інше означення, в якомусь сенсі симетричне до попереднього. Для кожного $y \in Y$ означимо відображення $j_y : X \to X \times Y$ формулою $j_y(x) = (x, y)$, $x \in X$. Для кожного $a \in TX$ означимо відображення $g_a : Y \to T(X \times Y)$ формулою $g_a(y) = Tj_y(a)$, $y \in Y$. Приймемо

$$a \widetilde{\otimes} b = \mu(X \times Y) \circ Tg_a(b) \in T(X \times Y).$$

Зауважимо, що, приймаючи $X = Y$, одержуємо природні перетворення $\otimes, \widetilde{\otimes} : (-)^2 \circ T \to T \circ (-)^2$ (див., наприклад, [2]).

Підняття функторів і монад на категорію напівгруп. Через $\mathcal{CS}$ позначимо категорію компактних гаусдорфових напівгруп і неперервних гомоморфізмів, через $U : \mathcal{CS} \to \mathcal{C}omp$ позначимо забуваючий функтор. Підняттям функтора $F : \mathcal{C}omp \to \mathcal{C}omp$ на категорію $\mathcal{CS}$ називається функтор $\overline{F} : \mathcal{CS} \to \mathcal{CS}$ такий, що $U\overline{F} = FU$. Якщо $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ – монада на категорії $\mathcal{C}omp$, то підняттям монади $\mathbb{T}$ на категорію $\mathcal{CS}$ називається монада $\overline{\mathbb{T}} = (\overline{T}, \overline{\eta}, \overline{\mu})$ на категорії $\mathcal{CS}$ така, що $U\overline{T} = TU$, $\eta \circ U = U \circ \overline{\eta}$ і $U \circ \overline{\mu} = \mu \circ U\overline{T} \circ \overline{T}U$.

Теорема 1. *Нехай $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ – слабко нормальна монада в категорії компактів. Приймаючи для кожної компактної напівгрупи (S, m)*

$$\overline{T}(S, m) = (TS, \overline{m}), \quad \overline{m}(a, b) = Tm(a \otimes b),$$
$$\widetilde{T}(S, m) = (TS, \widetilde{m}), \quad \widetilde{m}(a, b) = Tm(a \widetilde{\otimes} b), \quad a, b \in TS,$$

одержуємо підняття $\overline{T}, \widetilde{T}$ функтора T на категорію $\mathcal{CS}$. При цьому природне перетворення $\eta : 1_{\mathcal{C}omp} \to T$ породжує природні перетворення $\overline{\eta} : 1_{\mathcal{CS}} \to \overline{T}$, $\widetilde{\eta} : 1_{\mathcal{CS}} \to \widetilde{T}$.

Доведення випливає з властивостей тензорного множення, наведених у [2]. Покажемо лише асоціативність множення $\overline{m} : TS \times TS \to TS$.

Для кожних $a, b, c \in TS$ одержуємо $\overline{m}(a, \overline{m}(b, c)) = Tm(a \otimes Tm(b \otimes c)) = Tm(T1_S(a) \otimes Tm(b \otimes c)) = Tm((1_S \times m)(a \otimes (b \otimes c))) = Tm((m \times 1_S)((a \otimes b) \otimes c))) = \overline{m}(\overline{m}(a, b), c)$.

Якщо $\mathbb{T} = \mathbb{H}$, то одержуємо наступну напівгрупову операцію на $\exp S$: $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$.

Якщо $\mathbb{T} = \mathbb{P}$, то вказане підняття дає операцію згортки мір на PS.

Теорема 2. *Нехай природне перетворення $\xi = \otimes : (-)^2 \circ T \to T \circ (-)^2$ (відповідно, $\xi = \widetilde{\otimes} : (-)^2 \circ T \to T \circ (-)^2$) задовольняє умови (*) (тобто задає продовження функтора $(-)^2$ на категорію $Comp_{\mathbb{T}}$). Тоді означене в умові Теореми 1 підняття $\overline{T}$ (відповідно $\widetilde{T}$) визначає підняття $\overline{\mathbb{T}}$ (відповідно $\widetilde{\mathbb{T}}$) монади $\mathbb{T}$ на категорію $\mathcal{CS}$.*

Доведення. Розглянемо тільки випадок тензорного множення $\otimes$. Досить довести, що відображення $\mu S : (\overline{T}^2 S, \overline{\overline{m}}) \to (\overline{T} S, \overline{m})$ є гомоморфізмом. Використовуючи умову (*) (з $\xi = \otimes$), одержуємо

$$\mu S \circ \overline{\overline{m}} = \mu S \circ T\overline{m} \circ \otimes T = \mu S \circ T^2 m \circ T \otimes \circ \otimes T =$$
$$Tm \circ \mu(S \times S) \circ T \otimes \circ \otimes T = Tm \circ \otimes \circ (\mu S \times \mu S) = \overline{m} \circ (\mu S \times \mu S).$$

Наслідок. *Кожна проективна (слабко нормальна) монада в Comp має підняття на категорію $\mathcal{CS}$.*

Доведення випливає з результатів праці [4].

<u>Приклади.</u> Наступний приклад показує, що підняття $\overline{T}$ і $\widetilde{T}$, про які йдеться у теоремі 1, можуть відрізнятися.

Приклад. Розглянемо монаду суперрозширення $\mathbb{L} = (\lambda, \eta, \mu)$. Нехай S' – довільна напівгрупа з трьох елементів, $S' = \{a, b, c\}$ і нехай $S = S' \times S'$. Розглянемо $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \lambda S$,

$$\mathcal{M} \supseteq \{\{(a,a),(b,a)\},\{(b,a),(c,a)\},\{(a,a),(c,a)\}\},$$
$$\mathcal{N} \supseteq \{\{(a,a),(a,b)\},\{(a,c),(a,a)\},\{(a,b),(a,c)\}\}.$$

Тоді безпосередні обчислення показують, що

$$\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,b)\} \in \overline{m}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \setminus \widetilde{m}(\mathcal{M},\mathcal{N}).$$

Зауважимо, що вказані підняття $\overline{T}$ і $\tilde{T}$ рівні для монад гіперпростору, ймовірносних мір та степеневої монади.

В [1] доведено, що тензорні монади $\mathbb{H}$ і $\mathbb{P}$ задовольняють умови теореми 2. Звідси випливає, що монади $\mathbb{H}$ і $\mathbb{P}$ допускають підняття на категорію $\mathcal{CS}$. Що стосується монади $\mathbb{L}$, то як показує наступне твердження, тут ситуація складніша.

ТВЕРДЖЕННЯ 1. *Функтор* $(-)^2$ *не продовжується на категорію* $Copm_{\mathbb{L}}$.

Доведення. Для кожного компакта X і точок $x, y, z \in X$ через $t(x, y, z)$ позначимо м.з.с. $\{F \in \exp X \mid |F \cap \{x, y, z\}| \geq 2\}$.

Припустимо, що $\xi : (-)^2\lambda \to \lambda(-)^2$ – природне перетворення, для якого виконуються умови (*) (з $F = (-)^2$ і $T = \lambda$).

Нехай тепер X – скінченний (дискретний) простір і a, b, c, a', b', c' – шість попарно різних точок простору X. Через $\mathcal{H}$ позначимо множину біекцій з X у себе, що переводить кожну з множин $\{a, b, c\}$ та $\{a', b', c'\}$ у себе. Зрозуміло, що

$$\lambda h\big(t(a, b, c)\big) = t(a, b, c), \qquad \lambda h\big(t(a', b', c')\big) = t(a', b', c')$$

для кожного $h \in \mathcal{H}$.

Приймемо $\mathcal{A} = \xi X\big(t(a, b, c), t(a', b', c')\big)$, тоді за природністю ξ одержуємо, що

$$\lambda(h \times h)(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \tag{**}$$

для кожного $h \in \mathcal{H}$. Назвемо властивість (**) інваріантністю м.з.с. $\mathcal{A}$.

Розглянемо ретракцію $f : X \to X \setminus \{b, b'\}$, таку, що $f(b) = a$, $f(b') = a'$. Тоді $\lambda f\big(t(a, b, c)\big) = \eta X(a)$, $\lambda f\big(t(a', b', c')\big) = \eta X(a')$ і за властивістю (*) одержуємо $\xi X(\lambda f \times \lambda f)(\mathcal{A}) = \xi\big(\eta X(a), \eta X(a')\big) = \eta(X \times X)(a, a')$. Звідси випливає, що $\{a, b\} \times \{a', b'\} \in \mathcal{A}$ і за інваріантністю $\mathcal{A}$ одержуємо, що $A \times A' \in \mathcal{A}$ для кожних $A \in t(a, b, c)$, $A' \in t(a', b', c')$.

Розглянемо точки

$$\mathfrak{M} = \big(\eta(a), \eta(b), t(a, b, c)\big),\ \mathfrak{N} = \big(\eta(a'), \eta(b'), t(a', b', c')\big) \in \lambda^2 X.$$

Оскільки $\mu X(\mathfrak{M}) = t(a, b, c)$, $\mu X(\mathfrak{N}) = t(a', b', c')$, то $\xi X \circ (\mu X \times \mu X)(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathcal{A}$.

Припускаючи, що виконується друга умова з (*), одержуємо $\mathcal{A} = \mu(X \times X) \circ \lambda\xi X \circ \xi\lambda X(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Зауважимо, що для кожного $w \in X \setminus \{x, y, z\}$ маємо

$$\xi X\big(t(x,y,z), \eta X(w)\big) = t\big((x,w),(y,w),(z,w)\big),$$
$$\xi X\big(\eta X(w), t(x,y,z)\big) = t\big((w,x),(w,y),(w,z)\big).$$

Шоб довести, наприклад, першу з двох цих рівностей (друга доводиться аналогічно), розглянемо відображення $g : X \to X$, що бієктивно відображає множину $\{a,b,c\}$ на $\{x,y,z\}$ і відображає множину $\{a',b',c'\}$ у точку w; тоді

$$\xi X\big(t(x,y,z), \eta X(w)\big) = \xi X(\lambda g \times \lambda g)\big(t(a,b,c), t(a',b',c')\big) =$$
$$\lambda(g \times g)(\mathcal{A}) = t\big((x,w),(y,w),(z,w)\big).$$

Застосовуючи наведені вище міркування до елемента $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \in \lambda^2 X \times \lambda^2 X$, одержуємо, що

$$\mathcal{K} = \{\eta X(b), t(a,b,c)\} \times \{\eta X(a'), \eta X(b')\} \in \xi\lambda X(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}),$$
$$\mathcal{L} = \{\eta X(a), \eta X(b)\} \times \{\eta X(b'), t(a',b',c')\} \in \xi\lambda X(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Тоді

$$\lambda\xi X(\mathcal{K}) = \{\eta(X \times X)(b,a'), \eta(X \times X)(b,b'),$$
$$t\big((a,a'),(b,a'),(c,a')\big), t\big((a,b'),(b,b'),(c,b')\big)\},$$

а тому м.з.с. $\mathcal{A} = \mu(X \times X) \circ \lambda\xi X \circ \xi\lambda X(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ містить множину $K = \{(a,a'),(b,a'),(b,b'),(c,b')\}$. Застосовуючи наведені вище міркування до множини $\mathcal{L}$, одержуємо, що $L = \{(a,a'),(a,b'),(b,b'),(b,c')\} \in \mathcal{A}$.

Але неважко переконатися, що існує $h \in \mathcal{H}$ таке, що $(h \times h)(K) \cap L = \emptyset$, і ми одержуємо суперечність з інваріантністю $\mathcal{A}$.

Зауваження. Нескладна модифікація попереднього доведення дає змогу показати, що жоден степеневий функтор $(-)^\alpha$, $\alpha \leq \omega$, не продовжується на категорію $\mathcal{C}omp_L$.

Випадок функторів скінченного степеня. Для кожного слабко нормального функтора F носієм точки $a \in FX$ називається множина

$$supp(a) = \cap\{A \subset X | A \in \exp X, a \in FA\}.$$

Якщо для кожної точки $a \in FX$ множина $supp(a)$ має не більше, ніж n елементів, $n \in \mathbf{N}$, то кажуть, що степінь функтора F не перевищує n (позначається $deg\, F \leq n$). Запис $deg\, F = n$ означає, що $deg\, F \leq n$, але не $deg\, F \leq n-1$.

ТВЕРДЖЕННЯ 2. *Нехай F – нормальний функтор, $deg\, F = n \in \mathbf{N}$ і виконана умова:*

довільна n-точкова множина є носієм рівно однієї точки;

Тоді F не допускає підняття $\overline{F}$ на категорію CS такого, що кожна компонента природного перетворення $\eta : 1_{CS} \to \overline{F}$ є гомоморфізмом.

Доведення. Нехай задана $2n$-точкова множина $S = \{0_1, \ldots, 0_n, 1_1, \ldots, 1_n\}$ з операцією, що задається умовами: $0_i \cdot 1_j = 1_j \cdot 0_i = 0_i$, $0_i \cdot 0_j = 0_i$, $1_i \cdot 1_j = 1_i$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Нехай $X = S^\omega$ з поточковим множенням. Припустивши, що існує вказане підняття $\overline{F}$ функтора F на категорію CS, можемо вважати, що X – піднапівгрупа в $\overline{F}X$. Існують $x = (x_i)_{i=1}^\infty, y = (y_i)_{i=1}^\infty \in X$ такі, що $xy \notin \{x, y\}$.

Існують околи U, V, W точок x, y, xy, відповідно, у FX, що попарно не перетинаються і для яких $UV \subset W$. Існують базисні околи U', V' точок x, y, відповідно, для яких

$$supp^{-1}(< U' >) \subset U \text{ і } supp^{-1}(< V' >) = V$$

(це є наслідком напівнеперервності знизу відображення $supp$ [5]).

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що U', V' мають вигляд

$$U' = U_1 \times \ldots \times U_m \times S \times S \times \ldots,$$
$$V' = V_1 \times \ldots \times V_m \times S \times S \times \ldots,$$

для деякого $m \in \mathbf{N}$.

Приймемо

$$a_i = (x_1, \dots, x_m, 0_i, x_{m+2}, \dots),$$
$$b_i = (y_1, \dots, y_m, 0_i, y_{m+2}, \dots), \quad i = 1, \dots, n.$$

Покладемо $T = \{a_i | i = 1, \dots, n\} \cup \{b_i | i = 1, \dots, n\}$. Легко бачити, що T – піднапівгрупа в X, а тому $\overline{F}T$ – піднапівгрупа в $\overline{F}X$.

За властивістю функтора F існують точки $a, b \in FX$, для яких $supp(a) = \{a_1, \dots, a_n\}$, $supp(b) = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Розглянемо відображення $f = (f_i)_{i=1}^{\infty} : X \to X$, тотожне на всіх координатах, крім $(m+1)$-ї, і таке, що

$$f_{m+1}(0_1) = 0_n, \ f_{m+1}(1_1) = 1_n,$$
$$f_{m+1}(0_i) = 0_{i-1}, \ f_{m+1}(1_i) = 1_{i-1} \text{ при } i > 1.$$

Очевидно, що f неперервний гомоморфізм, а тому $\overline{F}f(ab) = \overline{F}f(a)\overline{F}f(b) = ab$. Звідси випливає така властивість точки ab:

$$\begin{cases} \text{якщо } supp(ab) \cap supp(a) \neq \varnothing, \text{ то } supp(a) \subset supp(ab), \\ \text{якщо } supp(ab) \cap supp(b) \neq \varnothing, \text{ то } supp(b) \subset supp(ab). \end{cases}$$

Звідси випливає, що $ab \in \{a, b\}$, а тому $xy = x$ або $xy = y$. Одержуємо суперечність.

Для кожного $n \in \mathbf{N}$ функтор $\exp_n$ означається як підфунктор функтора $\exp$, для якого $\exp_n X = \{A \in \exp X | \, |A| \leq n\}$.

Наслідок. *При $n > 1$ функтор $\exp_n$ не має підняття на категорію $\mathcal{CS}$.*

<u>**Відкриті питання.**</u> Кожна монада $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ на категорії $\mathcal{C}$ породжує категорію $\mathbb{T}$-алгебр [3]. При цьому $\mathbb{T}$-алгеброю називається пара (X, ξ), де $\xi : TX \to X$ – морфізм, для якого $\xi \circ \eta X = 1_X$ і $\xi \circ \mu X = \xi \circ T\xi$. Морфізм $f : X \to X'$ називається морфізмом $\mathbb{T}$-алгебри (X, ξ) в $\mathbb{T}$-алгебру (X', ξ'), якщо $f \circ \xi = \xi' \circ Tf$.

Категорія $\mathbb{H}$-алгебр охарактеризована як категорія $\vee$-напівграток Лоусона (див. [6]). Категорія $\mathbb{P}$-алгебр охарактеризована як категорія опуклих компактів, що лежать в локально опуклих просторах (див. [7]).

Розглянемо підняття $\overline{\mathbb{H}}$ і $\overline{\mathbb{P}}$ монад $\mathbb{H}$ і $\mathbb{P}$, відповідно, на категорію $\mathcal{CS}$.

Проблема 1. *Охарактеризувати категорії $\overline{\mathbb{H}}$-алгебр і $\overline{\mathbb{P}}$-алгебр.*

Проблема 2. *Чи існують підняття монад $\mathbf{G}$, $\mathbb{L}$, $\mathbf{N}_k$ на категорію $\mathcal{CS}$?*

Найближче за своїми властивостями до топологічних груп знаходяться топологічні інверсні напівгрупи. Топологічна напівгрупа S називається інверсною [8], якщо для кожного $x \in S$ існує єдиний інверсний елемент x^{-1} (тобто елемент, для якого виконані умови $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$) і відображення з S в S, $x \mapsto x^{-1}$, – неперервне.

В [1] показано, що кожний нормальний функтор, для якого існує підняття на категорію компактних груп, є степеневим.

Проблема 3. *Чи існує нестепеневий слабко нормальний функтор, підняття якого на категорію $\mathcal{CS}$ зберігає клас компактних топологічних інверсних напівгруп?*

ЛІТЕРАТУРА

1. Зарічний М.М. Топологія функторів і монад у категорії компактів. К., 1993.
2. Зарічний М.М. *Абсолютные экстензоры и геометрия умножения монад в категории компактов* // Матем. сборник. 1991. Т.182, №9. С.1261–1280.
3. Barr M., Wells Ch. Toposes, triples and theories. New York, 1985.
4. Vinárek J. *Projective monads and extensions of functors* // Math. Centr. Afdeling. 1983. №195. P.1–12.
5. Щепин Е.В. *Функторы и несчетные степени компактов* // Успехи матем. наук. 1981. Т.36. Вып.3. С. 3–62
6. Wyler O. *Algebraic theories of continuous lattices* // Lect. Notes in Math. 1981. Vol.271. P.390–413.
7. Świrszcz T. *Monadic functors and convexity* // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. mat., astron. et phys. 1974. T.22. №1. P.39–42.
8. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М., 1972. В т.1.