УДК 512.64

В.Р.ЗЕЛІСКО

ДОПУСТИМІ ФАКТОРИЗАЦІЇ РЕГУЛЯРНИХ СИМЕТРИЧНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ МНОГОЧЛЕНІВ І КВАЗІМНОГОЧЛЕНІВ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

У цій статті ми розглядаємо питання про застосування результатів теорії розкладності матричних многочленів на множники [1] до дослідження факторизацій симетричних матриць над кільцями многочленів та квазімногочленів з інволюцією [2], які мають безпосереднє застосування у теорії лінійних стаціонарних систем [3]. Для зручності будемо використовувати термінологію і позначення, наведені в [1;2].

Під інволюцією у кільцях многочленів $C[x]$ і квазімногочленів $C[x, x^{-1}]$ розумітимемо таку операцію ∇, що для довільних елементів a, b із цих кілець маємо рівності

$$(a+b)^{\nabla} = a^{\nabla} + b^{\nabla}, \quad (ab)^{\nabla} = a^{\nabla}b^{\nabla}, \quad (a^{\nabla})^{\nabla} = a.$$

У роботі [2] доведено, що у кільці C[x] неперервну інволюцію можна визначити такими попарно неізоморфними способами:

$$(\sum a_k x^k)^{\nabla} = \sum \bar{a}_k (-x)^k, \tag{α}$$

$$(\sum a_k x^k)^{\nabla} = \sum a_k (-x)^k, \tag{β}$$

$$(\sum a_k x^k)^{\nabla} = \sum a_k x^k, \tag{γ}$$

а у кільці $C[x, x^{-1}]$ -попарно неізоморфними способами:

$$(\sum a_k x^k)^{\nabla} = \sum \bar{a}_k x^{-k}, \tag{δ}$$

$$(\sum a_k x^k)^{\nabla} = \sum \bar{a}_k (-x)^{-k}, \tag{ε}$$

$$(\sum a_k x^k)^\nabla = \sum a_k(-x)^{-k}. \qquad (\zeta)$$

Зафіксуємо у кільці $\mathbf{C}[x]$ чи $\mathbf{C}[x,x^{-1}]$ одну з вказаних інволюцій і перенесемо її на кільця матриць $M_n(\mathbf{C}[x])$ та $M_n(\mathbf{C}[x,x^{-1}])$

$$A(x)^\nabla = ||a_{ij}(x)||^\nabla = ||a_{ji}(x)^\nabla||.$$

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x)^\nabla = A(x)$.

Факторизацією матриці $A(x)$ з кілець $M_n(\mathbf{C}[x])$ та $M_n(\mathbf{C}[x,x^{-1}])$ називають її зображення у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^\nabla, \qquad (1)$$

де $C(x) = C(x)^\nabla$ - деяка неособлива матриця. У [2] розглядаються факторизації, в яких $C = C^\nabla$ - деяка неособлива числова матриця, а у [3] показано, що для побудови синтезованого локально оптимального керування використовують факторизацію (1) многочленної матриці $A(x)$, в якій матриця $B(x) = \sum_{i=0}^{r} B_i x^i$ - унітальна /старший коефіцієнт $B_r = E$ - одинична матриця /. Зважаючи на це, будемо розглядати спочатку питання про існування факторизації вигляду (1), у якій $A(x)$ і $C(x)$ - регулярні симетричні матриці, а $B(x)$ - унітальна. Нагадаємо, що многочленна матриця $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$ називається регулярною, якщо $|A_m| \neq 0$. Квазімногочленну матрицю $A(x) = \sum_{i=-l}^{p} A_i x^i$ назвемо регулярною, якщо $|A_{-l}| \neq 0$, $|A_p| \neq 0$. Число $s = p + l$ назвемо степенем регулярної матриці $A(x)$.

Якщо $A(x)$ -квазімногочленна матриця вигляду $A(x) = \sum_{i=-l}^{p} A_i x^i$, то матриця $A(x)x^l = \sum_{i=-l}^{p} A_i x^{i+p}$ вже многочленна, причому, зважаючи, що матриця Ex^l оборотна над $\mathbf{C}[x,x^{-1}]$, бачимо, що задача про факторизацію квазімногочленних матриць зводиться до задачі факторизації многочленних матриць. Для пошуку критеріїв факторизацій використаємо введене у [4] поняття значення многочленної матриці $G(x)$, рядками якої є $g_1(x),\ldots,g_n(x)$ на системі коренів елементів матриці

$\Phi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$:

$$M_{G(x)}(\Phi) = \begin{pmatrix} M_{g_1(x)}(\varphi_1) \\ \cdots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Тут $M_{g_i(x)}(\varphi_i)$ - значення многочленної матриці на системі коренів многочлена $\varphi_i(x) = (x-\alpha_1)^{s_1}\cdots(x-\alpha_m)^{s_m}$, введене в [1] так:

$$M_{g_i(x)}(\varphi_i) = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \dots \\ H_m \end{pmatrix}, \quad H_k = \begin{pmatrix} g_i(\alpha_k) \\ g_i'(\alpha_k) \\ \dots \\ g_i^{(s_k-1)}(\alpha_k) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де $g_i^{(j)}(x)$ - похідні порядку j від матриці $g_i(x)$.

Надалі позначимо через S_A форму Сміта многочленної матриці $A(x)$. Отже

$$S_A = P(x)A(x)Q(x) = \mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)). \tag{4}$$

Відомо [1], що якщо для матриці $A(x)$ має місце факторизація (1), то $S_B|S_A$ і $S_{B^\nabla}|S_A$, хоча рівність $S_A = S_B S_C S_{B^\nabla}$ виконується не завжди. У цій статті будемо розглядати тільки такі факторизації матриці $A(x)$, для яких S_A дорівнює добутку форм Сміта її співмножників і називатимемо їх допустимими.

Нехай форму Сміта матриці $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$S_A = \Phi(x)D(x)\Phi(x)^\vee, \tag{5}$$

де

$$\Phi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad \varphi_i|\varphi_{i+1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \deg\varphi_i = nr, \quad D(x) = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_i|d_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Із результатів роботи [2] видно, що умова (5) виконується, якщо кожний інваріантний множник $\varepsilon_i(x)$ матриці $A(x)$ або не має коренів на множині ∇ - нерухомих точок Γ, або має їх, але кратність кожного такого кореня - парне число. Множина Γ встановлена для кожного із вказаних типів інволюції.

Теорема 1. *Для регулярної симетричної матриці $A(x)$ допустима факторизація (1), у якій $B(x)$ - унітальна матриця степеня $r \geq 1$ з* *формою Сміта $S_B = \Phi(x)$, а $C(x) = C(x)^{\nabla}$ - деяка регулярна матриця з формою Сміта $S_C = D(x)$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\det M_{P(x)\|E,Ex,\dots,Ex^{r-1}\|}(\Phi) \neq 0, \qquad (6)$$

де $P(x)$ - довільна оборотна матриця із співвідношення (4). Для кожного фіксованого розкладу (5) така допустима факторизація (1) єдина.

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Якщо для матриці $A(x)$ існує факторизація (1), то це означає, що матриця $A(x)$ має лівий регулярний множник $B(x)$ степеня r, причому $S_A = S_B S_{CB^{\nabla}}$, а тому згідно з результатами робіт [1] і [4] виконується умова (6).

Д о с т а т н і с т ь. Нехай для форми Сміта матриці $A(x)$ маємо факторизацію (5). Тоді

$$A(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)D(x)\Phi(x)^{\nabla}Q^{-1}(x). \qquad (7)$$

Оскільки $P(x)$ і $Q(x)$ оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці, то існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $S(x)$, що $P(x)^{\nabla} = Q(x)S(x)$, а саме $S(x) = Q^{-1}(x)P(x)^{\nabla}$. Для матриці $S(x)$ існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $H(x)$, що

$$H(x)\Phi(x)^{\nabla} = \Phi(x)^{\nabla}S(x), \qquad (8)$$

причому матриця $H(x)$ не обов"язково є многочленною. Із рівностей (7) і (8) одержуємо:

$$A(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)D(x)H(x)\Phi(x)^{\nabla}(P(x)^{\nabla})^{-1}.$$

Звідси, зважаючи на очевидну рівність $(P(x)^{\nabla})^{-1} = P^{-1}(x)^{\nabla}$, маємо

$$A(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)D(x)H(x)\Phi(x)^{\nabla}P^{-1}(x)^{\nabla}. \qquad (9)$$

Покажемо, що $H' = D(x)H(x)$ - многочленна матриця. Враховуючи рівність (8), бачимо, що $H' = D(x)\Phi(x)^{\nabla}S(x)(\Phi(x)^{\nabla})^{-1}$, а тому довільний елемент h'_{ij} цієї матриці має вигляд

$$h'_{ij} = d_i(x)\varphi_i(x)s_{ij}(x)(\varphi_j(x)^{\nabla})^{-1}.$$

Оскільки $s_{ij}(x) \in \mathbb{C}[x]$ і $\varphi_j(x)^{\nabla} | \varphi_i(x)^{\nabla}$ для всіх $i \geq j$, то бачимо, що елементи h'_{ij} матриці H' є многочленами при $i \geq j$. Із рівності (9), зважаючи, що $A(x)$ симетрична матриця і

$$\det P^{-1}(x)\Phi(x) \not\equiv 0,$$

видно, що $D(x)H(x)$ - симетрична матриця, а тому елементи матриці $D(x)H(x)$ є многочленами при $i < j$.

Згідно з теоремою про регуляризацію [1] умова (6) означає, що матриця $P^{-1}(x)\Phi(x)$ регуляризується справа, тобто існує така оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$, що $P^{-1}(x)\Phi(x)R(x) = B(x)$ - унітальна многочленна матриця степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$. Тоді з рівності (9) одержуємо

$$A(x) = B(x)R^{-1}(x)D(x)H(x)R^{-1}(x)^{\nabla}B(x)^{\nabla}. \tag{10}$$

Нехай $R^{-1}(x)D(x)H(x)R^{-1}(x)^{\nabla} = C(x)$. Оскільки $D(x)H(x)$ - симетрична многочленна матриця, то $C(x) = C(x)^{\nabla}$ - многочленна матриця з формою Сміта $D(x)$, а тому із рівності (10) отримуємо допустиму факторизацію вигляду (1).

Єдиність факторизації (1) випливає згідно з результатами роботи [1] з того, що ця факторизація допустима і множник $B(x)$ в ній унітальний. Теорема доведена.

Зауваження. *В умовах теореми 1 факторизацію (1) можна здійснити, знайшовши коефіцієнти многочленної матриці $B(x) = Ex^r - B_1x^{r-1} - \ldots - B_r$ за формулою:*

$$\begin{pmatrix} B_r \\ \ldots \\ B_1 \end{pmatrix} = (M_{P(x)\|E, Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|}(\Phi))^{-1} M_{P(x)x^r}(\Phi).$$

Нехай $A(x)$ - регулярна симетрична многочленна матриця степеня $m = 2r, r \geq 1$, форму Сміта якої можна зобразити у вигляді

$$S_A = \Phi_1(x) \ldots \Phi_r(x) I \Phi_r(x)^{\nabla} \ldots \Phi_1(x)^{\nabla}, \tag{11}$$

де

$$\Phi_i(x) = \mathrm{diag}(\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{in}), \quad \varphi_{ij} | \varphi_{ij+1},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \deg \varphi_{ij} = n, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad I = \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1).$$

Теорема 2. *Для матриці $A(x)$ існує допустима факторизація*

$$\Lambda(x) = (Ex \quad B_1)\ldots(Ex \quad B_r)C(Ex \quad B_r)^{\nabla}\ldots(Ex \quad B_1)^{\nabla}, \tag{12}$$

де $S_{Ex-B_i} = \Phi_i(x)$, $C = C^{\nabla}$ *- неособлива числова матриця, тоді і тільки тоді, коли*

$$\det M_{P(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{s \; 1}\|}(\Phi_1 \ldots \Phi_s) \neq 0 \tag{13}$$

для всіх $s = \overline{1,r}$ *при довільній оборотній матриці* $P(x)$ *із співвідношення (4). Для кожного фіксованого розкладу (11) така факторизація єдина.*

Для доведення цієї теореми доведемо спочатку дві властивості матриці (2).

Твердження 1. $M_{G(x)S}(\Phi) = M_{G(x)}(\Phi)S$ *для довільної матриці* $S \in M_n(\mathbb{C})$.

Доведення. Для кожного рядка матриці (2) згідно з означенням матриці (3) і твердженням 1 із § 2, розділ 2, роботи [1], маємо:

$$M_{g_i(x)S}(\varphi_i) = M_{g_i(x)}(\varphi_i)S.$$

Тому

$$M_{G(x)S}(\Phi) = \begin{pmatrix} M_{g_1(x)S}(\varphi_1) \\ \ldots \\ M_{g_n(x)S}(\varphi_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} M_{g_1(x)}(\varphi_1)S \\ \ldots \\ M_{g_n(x)}(\varphi_n)S \end{pmatrix} = M_{G(x)}(\Phi)S.$$

Твердження 1 доведене.

Твердження 2. *Для довільних діагональних матриць* $\Phi(x) = diag(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *і* $\Psi(x) = \mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ *і довільної* $G(x) \in M_n(\mathbb{C})$ *маємо рівність*

$$\mathrm{rang}\, M_{\Phi(x)G(x)}(\Phi\Psi) = \mathrm{rang}\, M_{G(x)}(\Psi).$$

Доведення. За означенням матриці (2)

$$M_{\Phi(x)G(x)}(\Phi\Psi) = M \begin{pmatrix} \varphi_1 g_1(x) \\ \dots \\ \varphi_n g_n(x) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1\psi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varphi_n\psi_n \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} M_{\varphi_1 g_1(x)}(\varphi_1\psi_1) \\ \dots \\ M_{\varphi_n g_n(x)}(\varphi_n\psi_n) \end{pmatrix}.$$

Згідно з твердженням 6 із § 2, розділ 2, роботи [1]:

$$\operatorname{rang} M_{\varphi_i g_i(x)}(\varphi_i\psi_i) = \operatorname{rang} M_{g_i(x)}(\psi_i)$$

для всіх $i = \overline{1,n}$. Тому

$$\operatorname{rang} M_{\Phi(x)G(x)}(\Phi\Psi) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} M_{g_1(x)}(\psi_1) \\ \dots \\ M_{g_n(x)}(\psi_n) \end{pmatrix} = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\Psi),$$

що й треба було довести.

Лема. *Нехай в умовах теореми 1 форму Сміта $D(x)$ матриці $C(x)$ із співвідношення (1) можна зобразити у вигляді*

$$D(x) = \Phi_1(x) D_1(x) \Phi_1(x)^{\nabla}, \tag{14}$$

де $\Phi_1(x) = \operatorname{diag}(\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1n})$, $\varphi_{1j} | \varphi_{1j+1}$, $D_1(x) = \operatorname{diag}(d_{11}, \dots, d_{1n})$, $d_{1j} | d_{1j+1}$, $j = \overline{1, n-1}$, $\sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_{1i} = n$ *так, щоб*

$$\det M_{P(x)\|E, Ex, \dots, Ex^{n}\|}(\Phi\Phi_1) \neq 0 \tag{15}$$

при довільній оборотній над $\mathbb{C}[x]$ *матриці* $P(x)$ *із співвідношення (4). Тоді для* $A(x)$ *маємо факторизацію*

$$A(x) = B(x)(Ex - B_1) C_1(x) (Ex - B_1)^{\nabla} B(x)^{\nabla}, \tag{16}$$

де $S_{Ex-B_1} = \Phi_1, \quad S_{C_1(x)} = D_1(x)$.

Доведення. Застосовуючи теорему 1 при $r = 1$ до симетричної матриці $C(x)$ із факторизації (1), достатньо довести, що

$$\det M_{R(x)}(\Phi_1) \neq 0, \tag{17}$$

де $R(x)$ - довільна оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця із співвідношення

$$R(x)C(x)S(x) = D(x). \tag{18}$$

Як видно із доведення теореми 1, унітальний множник $B(x)$ у факторизації (1) був одержаний регуляризацією матриці $P^{-1}(x)\Phi(x)$ домноженням справа на деяку оборотну над $\mathbb{C}[x]$ матрицю $R(x)$ і має вигляд

$$D(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)R(x), \tag{19}$$

причому із визначення матриці $C(x)$ у факторизації (1) бачимо, що при цій же матриці $R(x)$ виконується рівність (18). Позначимо цю матрицю через $R_0(x)$.

Припустимо, що при такій оборотній матриці $R(x) = R_0(x)$ із співвідношення (18) умова (17) не виконується, тобто

$$\det M_{R_0(x)}(\Phi_1) = 0.$$

Тоді стовпці матриці $M_{R_0(x)}(\Phi_1)$ лінійно залежні. Доведемо, що тоді існують матриці $P_0(x)$ із співвідношення (4) і $H \in GL_{n(r+1)}(\mathbb{C})$ такі, що у матриці

$$M_{P_0(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^r\|}(\Phi\Phi_1)H \tag{20}$$

деякі стовпці лінійно залежні, що суперечило б умові (15).

Нехай $P_0(x)$ - матриця $P(x)$ із рівності (19). Якщо матриця $D(x)$ у цій же рівності має вигляд

$$B(x) = Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_r,$$

то візьмемо

$$H = \begin{pmatrix} E & \cdots & 0 & B_r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \ldots & E & B_1 \\ 0 & \cdots & \cdot & E \end{pmatrix}.$$

При так вибраних H і $P_0(x)$ згідно з рівністю $P_0(x)B(x) = \Phi(x)R_0(x)$, яку легко одержати із (19), маємо

$$P_0(x)\|E, Ex, \dots, Ex^r\|H = P_0(x)\|E, Ex, \dots, Ex^{r-1}, B(x)\| =$$

$$= \|P_0(x), P_0(x)x, \dots, P_0(x)x^{r-1}, \Phi(x)R_0(x)\|.$$

На основі твердження 1 матриця (20) набуде вигляду

$$M_{P_0(x)\|E,Ex,\dots,Ex^r\|H}(\Phi\Phi_1) =$$

$$= \|M_{P_0(x)}(\Phi\Phi_1), \dots, M_{P_0(x)x^{r-1}}(\Phi\Phi_1, M_{\Phi(x)R_0(x)}(\Phi\Phi_1)\|$$

Згідно з твердженням 2

$$\operatorname{rang} M_{\Phi(x)R_0(x)}(\Phi\Phi_1) = \operatorname{rang} M_{R_0(x)}(\Phi_1).$$

Тому, якщо стовпці матриці $M_{R_0(x)}(\Phi_1)$ лінійно залежні, то лінійно залежними є стовпці матриці (20). Лема доведена.

Доведення теореми 2. Н е о б х і д н і с т ь . Якщо існує факторизація (12), то об"єднуючи добутки лінійних множників, одержимо допустимі факторизації

$$A(x) = B_s(x)C_s(x)B_s(x)^{\nabla},$$

в яких $B_s(x)$ - унітальні матриці степеня s, $1 \le s \le r$ і згідно з теоремою 1 існують співвідношення (13) для всіх $s = \overline{1,r}$.

Д о с т а т н і с т ь проведемо індукцією за числом лінійних множників . Якщо виконується умова (13) при $s = 1$, то за теоремою 1:

$$A(x) = (Ex - B_1)C_1(x)(Ex - B_1)^{\nabla}, \quad C_1(x) = C_1(x)^{\nabla},$$

причому така факторизація допустима. Припустимо, що маємо допустиму факторизацію

$$A(x) = (Ex - B_1)\dots(Ex - B_{r-1})C_{r-1}(x)(Ex - B_{r-1})^{\nabla}\dots(Ex - B_1)^{\nabla}, \tag{21}$$

де $S_{Ex-B_i} = \Phi_i(x)$, $i = \overline{1, r-1}$, $C_{r-1}(x) = C_{r-1}(x)^{\nabla}$. Зважаючи на останню із нерівностей (13) / при $s = r$ /, ми можемо до факторизації

(21) застосувати доведену вище лему і одержати факторизацію (12). Її єдиність легко проводиться індукцією по r, враховуючи теорему 1. Теорема 2 доведена.

Зауважимо, що якщо $A(x)$ - дійсна симетрична матриця, то зважаючи на реезультати роботи [4], бачимо, що коли у факторизаціях (5) і (11) усі многочлени дійсні, то теореми 1 та 2 дають необхідні і достатні умови існування відповідних допустимих факторизацій, множники в яких є дійсними многочленними матрицями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Казімірський П.С. *Розклад матричних многочленів на множники.* К., 1981. 224 с.
2. Любачевский Б.Д. *Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией.* 1 // Сибирск. матем. журнал. 1973. Т. 14, N 2. С. 337 - 350.
3. Андреев В.А., Шепелявый А.М. *Синтез оптимальных управлений для амплитудно импульсных систем в задаче минимизации среднего значения функционала квадратичного типа.* // Там же. С. 250 -276.
4. Щедрик В.П. *Критерий выделения действительного множителя из матричного многочлена.* // Укр. матем. журнал. 1987. Т. 39. N 3, С. 370 - 373.