УДК 515.12

О.Р. НИКИФОРЧИН

ФУНКТОР ФАКТОР-ОБ'ЄКТІВ В КАТЕГОРІЇ НУЛЬВИМІРНИХ КОМПАКТІВ

У топології надзвичайно плідним є вивчення функтора гіперпростору замкнених множин exp [1] у категорії компактів $Comp$, який можна розглядати як топологізацію у випадку $Comp$ варіанта функтора підоб'єктів [2] для категорій з єдиним епі-моно-розкладом. Ця стаття є спробою топологізувати дуальну до стандартного функтора підоб'єктів конструкцію функтора фактор-об'єктів для категорії нульвимірних компактів $Comp_0 \subset Comp$.

Нижче прямим (оберненим) спектром $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in \mathcal{A}\}$ називаємо діаграму, яка індексована напрямленою вниз (вгору) множиною $\mathcal{A}$, і для довільних $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}$ морфізм $\pi_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha$ єдиний при $\alpha \prec \alpha'$ і відсутній при $\alpha \succ \alpha'$, причому $\pi_{\alpha'}^{\alpha''} \circ \pi_\alpha^{\alpha'} = \pi_\alpha^{\alpha''}$ при $\alpha \prec \alpha' \prec \alpha''$, $\pi_\alpha^\alpha \equiv 1_{X_\alpha}$. Детальніше див. [1,2].

Добре відомим є такий факт (див., напр., [3]):

Лема 1 (П.С. Александров). *Нехай X – компакт і $E \subset X \times X$ – відношення еквівалентності. Рівносильні такі твердження :*

1. *фактор-простір X/E – гаусдорфів;*
2. *E – замкнена в $X \times X$;*
3. *множина $\{F \overset{cl}{\subset} X \mid F \subset [x]$ для деякого $x \in X,\ F \neq \emptyset\}$ – замкнена в $exp\, X$ ($[x]$ – клас еквівалентності, який містить X).*

Назвемо епіморфізми компактів $\varphi : X \to Y_1$, $\psi : X \to Y_2$ еквівалентними (позначаємо $\varphi \sim \psi$), якщо існує такий гомеоморфізм $h : Y_1 \to Y_2$, що $\varphi = h \circ \psi$. Якщо h є лише сюр'єкцією, то пишемо $\psi \prec \varphi$. Відношення $\sim$ і $\prec$ є відповідно відношеннями еквівалентності та порядку на класі всіх епіморфізмів з простору X. По суті $\sim$ і $\prec$ – це відношення ізоморфізму та існування морфізму між об'єктами повної підкатегорії категорії $Comp^X$ об'єктів під X, яка містить лише епіморфізми. Класи еквівалентності відношення $\sim$ утворюють множину, елементи якої природно трактують як замкнені відношення еквівалентності на X. Позначимо цю множину $EQ(X)$, а відношення еквівалентності, яке відповідає $\varphi : X \to Y$ як $E(\varphi)$. Тоді $\varphi \sim \psi \iff E(\varphi) = E(\psi)$ і $\varphi \prec \psi \iff E(\varphi) \supset E(\psi)$.

Якщо класи еквівалентності відношення E збігаються з компонентами зв'язності компакта X, то умови леми 1 виконані, і фактор-простір X/E нульвимірний. Позначимо його $\square X$. Легко бачити, що ця конструкція продовжується до функтора $\square : Comp \to Comp_0$, і фактор-відображення $zX : X \to \square X$ є компонентами природного перетворення $z : 1_{Comp} \to I \circ \square$. Щобільше, $\square$ є рефлектором для вкладення категорій I, а z – одиницею спряження (див. [2]). Це означає, що для довільного відображення компактів $f : X \to Y$, $\dim Y = 0$ існує і єдине відображення $\varphi : \square X \to Y$ (а саме $\varphi = \square f$), для якого $f = \varphi \circ zX$.

Важливим є той факт, що у категоріях $Comp$ і $Comp_0$ існують границі обернених спектрів і кограниці прямих спектрів з епіморфними проекціями, і функтор $\square$ їх зберігає.

Позначимо $SR(X) \subset exp(X \times X)$ множину симетричних рефлексивних замкнених відношень на X. Маємо:

(1) $SR(X)$ – компакт;
(2) відповідність $X \mapsto SR(X)$ продовжується до функтора $SR : Comp \to Comp$, якщо покласти: $SR(f)(S) = exp(f \times f)(S) \cup \Delta_Y$, $f \in Comp(X, Y)$, $S \subset SR(X)$, Δ_Y – діагональ в $Y \times Y$;
(3) існує природне перетворення $s : exp(-,-) \to SR$, яке є ретракцією для кожного X: $sX(F) = F \cup i(F) \cup \Delta_X$, $i(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

Позначимо множину відношень еквівалентності з нульвимірними фактор-просторами $EQ_0(X) \subset EQ(X)$. Для кожної підмножини $A \subset EQ_0(X)$ існують супремум та інфімум. Нехай $A = \{E(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$, де $\Phi = \{\varphi_\alpha : X \to X_\alpha \mid \dim X_\alpha = 0,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ – сім'я епіморфізмів. Тоді $\sup A$ відповідає діагональному добутку $\Delta_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha : X \to \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$, яке розглядаємо як відображення на свій образ. Нехай $\{\psi_\beta : X \to X_\beta \mid \dim X_\beta = 0,\ \beta \in B\}$ – множина, яка містить по одному представнику з кожного класу еквівалентних епіморфізмів $\psi : X \to$ $\to X'$, для яких $\psi \prec \varphi$ для всіх $\varphi \in \Phi$. Аналогічно $\inf A$ відповідає діагональному добутку $\Delta_{\beta\in B}\psi_\beta : X \to \prod_{\beta\in B} X_\beta$, який розглядаємо як відображення на свій образ. Оскільки кожен нульвимірний компакт вкладається в добуток скінченних (або двоточкових) компактів, істинною є

Лема 2. *Для нульвимірного компакта X і замкненого відношення еквівалентності E на X фактор-простір X/E є нульвимірним тоді і тільки тоді, коли E є перетином в $X \times X$ деякої сім'ї $\{E_\alpha, \alpha \in A\}$ замкнених відношень еквівалентності на X, фактор-простори для яких є скінченними (двоточковими).*

Зауваження. Максимальне відношення $(X \times X) \in EQ(X)$ вважаємо перетином порожньої сім'ї.

Для нульвимірного компакта X і $S \in SR(X)$ покладемо: $eX(S) =$ $= \bigcap\{E \in EQ(X) \mid X/E$ – скінченний $\}$. Очевидно, $eX(S)$ – найменше відношення еквівалентності з нульвимірним фактор-простором, яке містить S.

Лема 3. *Для довільної сім'ї $\mathcal{E} = \{E_\alpha \mid \alpha \in A\}$ в $EQ_0(X)$ маємо:* $\sup\mathcal{E} = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$, $\inf\mathcal{E} = eX(Cl(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha))$.

Лема 4. *Нехай $S \in SR(X)$, $f : X \to Y$ – відображення нульвимірних компактів. Тоді: $eY \circ SR(f)(S) = eY \circ SR(f) \circ eX(S)$.*

Означення. Для відображення $f : X \to Y$ в $Comp_0$ означимо відображення $EQ_0(f) : EQ_0(X) \to EQ_0(Y)$ формулою: $EQ_0(f)(E) =$ $= eY \circ SR(f)(E)$. Згідно леми 3 маємо функтор $EQ_0 : Comp_0 \to Set$.

Лема 5. *Нехай $f : X_1 \to X_2$ – відображення в $Comp_0$, $E_i \in EQ_0(X)$, $\varphi_i : X_i \to X_i/E_i$ – фактор-відображення, $i = 1,2$. Тоді $EQ_0(f)(E_1) =$ $= E_2$ тоді і тільки тоді, коли діаграму*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & X_1/E_1 \\
X_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & X_2/E_2
\end{tikzcd}$$

можна доповнити відображенням $\tilde{f} : X_1/E_1 \to X_2/E_2$ (очевидно, єдиним чином) так, що діаграма стає кограничною для діаграми

$$X_2 \xleftarrow{f} X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_1/E_1 \quad .$$

Для цього досить перевірити, що кожен комутативний коконус вигляду

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & X_1/E_1 \arrow[d] \\ X_2 \arrow[r] & D \end{tikzcd},$$

де $D = \{0,1\}$ двокрапка, єдиним чином пропускається через коконус, зображений вище.

Зауважимо, що для нульвимірного компакта X базу топології на $SR(X)$ утворюють множини вигляду $SR(f)^{-1}(S)$ для всеможливих неперервних відображень $f : X \to K$ у скінченні компакти K і $S \in SR(K)$.

Доведення наступних теорем можна відновити з використанням попередніх лем.

Теорема 1.

(1) *Множини вигляду $EQ_0(f)^{-1}(S)$, де $S \in EQ_0(K) = EQ(K)$ для скінченних K, $f : X \to K$ – неперервні, утворюють базу деякої гаусдорфової компактної нульвимірної топології на $EQ_0(X)$;*

(2) *оскільки для довільного неперервного відображення нульвимірних компактів і довільного їх розкладу в спектри зі скінченних компактів існує морфізм (не обов'язково точний, [1]) цих спектрів, який породжує це відображення, ця топологія збігається з топологією $\varprojlim EQ_0(S)$ для довільного спектра S зі скінченних компактів, в який розкладено X;*

(3) *EQ_0 (з описаною вище топологією) – епіморфний функтор в $Comp_0$, який зберігає точку, порожню множину, перетини, границі обернених спектрів і вагу нескінченних компактів. Оскільки образ $SR(Comp_0)$ лежить в $Comp_0$, вважаємо $SR\,|_{Comp_0}$ ендофунктором в $Comp_0$. Тоді $eX : SR(X) \to EQ_0(X)$ – компонента сюр'єктивного природного перетворення $e : SR\,|_{Comp_0} \to EQ_0$.*

Теорема 2. *Нехай X – нульвимірний компакт, $\mathcal{A}$ – напрямлена вгору множина, $\{E_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ – така індексована сім'я в $EQ_0(X)$, що $E_\alpha \prec E_{\alpha'} \iff E_\alpha \supset E_{\alpha'}$ при $\alpha \prec \alpha'$. Їй відповідає обернений спектр $S = \{X/E_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in \mathcal{A}\}$, де $\pi_\alpha^{\alpha'} : X/E_{\alpha'} \to X/E_\alpha$ – єдине відображення, яке замикає діаграму*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_{\alpha'}"'] & X/E_\alpha \\ X/E_{\alpha'} & \end{tikzcd}$$

Тоді $\varprojlim S$ збігається з X/E, де $E = \lim\limits_{\mathcal{A}} E_\alpha$ в $EQ_0(X)$ (границя береться за напрямленою множиною $\mathcal{A}$).

Теорема 3. *Нехай X – нульвимірний компакт, $\mathcal{A}$ – напрямлена вниз множина, $\{E_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ – така індексована сім'я в $EQ_0(X)$, що $E_\alpha \prec E_{\alpha'}$ при $\alpha \prec \alpha'$. Їй відповідає прямий спектр з епіморфними проекціями $S = \{X/E_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in \mathcal{A}\}$, де $\pi_\alpha^{\alpha'} : X/E_{\alpha'} \to X/E_\alpha$ – відображення, описане в Теоремі 2. Тоді $\varinjlim\operatorname{colim} S$ збігається з X/E, де $E = \lim\limits_{\mathcal{A}} E_\alpha$ в $EQ_0(X)$.*

Теорема 4. *$EQ_0(X)$ – компактна $\wedge$-напівгратка з неперервною операцією $\inf$, тобто $\wedge$-напівгратка Лоусона.*

Доведення спирається на розклад $EQ_0(X)$ в обернений спектр із скінченних компактів і неперервність функтора EQ_0.

Нехай $\{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \mathcal{A}\}$ – впорядкований спектр в $Comp$ або $Comp_0$ (тобто його індексна множина є впорядкованою), і найменшим і найбільшим елементом $\mathcal{A}$ є відповідно α_0 і α_1, всі проекції – епіморфізми, які не є гомеоморфізмами при $\alpha \neq \alpha'$. Позначимо $X_{\alpha_0} = X_0$, $X_{\alpha_1} = X_1$, $\pi_{\alpha_0}^{\alpha_1} = f : X_1 \to X_0$. Такі спектри при фіксованих X_0, X_1, f і змінній $\mathcal{A}$ з очевидним відношенням еквівалентності утворюють множину класів еквівалентності. Згідно леми Цорна кожен такий спектр є підспектром (у сенсі [3]) деякого спектра, максимального за включенням для даних X_0, X_1, f.

Теорема 5. *Впорядкований спектр $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \mathcal{A}\}$ в $Comp$ (або $Comp_0$) з епіморфними і негомеоморфними (крім тривіальних) проекціями є максимальним для даних X_0, X_1, f тоді і тільки тоді, коли:*

індексна множина має найменший і найбільший елементи α_0 і α_1 і для довільного перерізу $A = A_0 \sqcup A_1$, $\alpha \prec \alpha'$ для довільних $\alpha \in A_0$, $\alpha \in A_1$:

(1) *існують $\beta_0 = \sup A_0$, $\beta_1 = \inf A_1$;*

(2) *границя $\{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in A_0\}$, і когранниця $\{X_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, \alpha \in A_1\}$, існують в $Comp$ (або $Comp_0$) і збігаються з X_{β_0} і X_{β_1} відповідно (граничні проекції є проекціями початкового спектра);*

(3) *якщо $\beta_0 \neq \beta_1$, то проекція $\pi_{\beta_0}^{\beta_1}$ не може бути зображена як композиція двох епіморфізмів, які не є гомеоморфізмами.*

Зауваження. Для $Comp_0$ умови (1),(2) – це повнота індексуючої множини та неперервність в порядковій топології відповідного монотонного відображення $S : A \to EQ_0(X)$. Легко бачити, що епіморфізм (як в $Comp$, так і в $Comp_0$) не може бути зображений як композиція двох епіморфізмів, які не є гомеоморфізмами, тоді і тільки тоді, коли він "склеює певну пару точок простору в одну точку".

Зауважимо, що функтор $\square$ зберігає максимальні у вказаному сенсі спектри. Звідси:

НАСЛІДОК. *Якщо максимальний в $Comp_0$ спектр індексовано зв'язною в порядковій топології множиною, то ця множина – одноелементна. Якщо ж зв'язною множиною індексовано максимальний спектр в $Comp$, то проекція, яка сполучає об'єкти з найбільшим та найменшим індексами, не "склеює" компоненти зв'язності.*

Подібний метод побудови топології може бути застосовано до простору $EQ(X)$ замкнених відношень еквівалентності на довільному компакті X (з очевидною заміною скінченних або двоточкових компактів на одиничний відрізок), але при цьому відповідні аналоги більшості доведених вище властивостей не виконуватимуться.

Список літератури

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. Barr M., Wells Ch. Toposes, triples and theories. N.Y. etc.: Springer, 1985.
3. Энгелькинг Р. Общая топология М.: Мир, 1986.