УДК 515.12

Є.Я. Пенцак

Стабільність многовидів, модельованих на деяких зліченних прямих границях абсолютних екстензорів

Властивість стабільності нескінченновимірних многовидів в одному зі своїх найпростіших варіантів означає, що існує гомеоморфізм $M \times X \cong M$ для многовида M, модельованого над простором X. Більшість теорій нескінченновимірних многовидів містять теорему стабільності (див., наприклад, [1, 2]): зокрема теореми стабільності справедливі для $\mathbb{R}^\infty$- та Q^∞-многовидів ($\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \mathbb{R}^n$, $Q^\infty = \varinjlim Q^n$.)

У праці автора ([3]; анонсовано у [4]) розвинено основи теорії многовидів, модельованих над зліченними прямими границями деяких сильно універсальних просторів ($X(C)$-многовидів, для деяких класів C). Для цього випадку, модельний простір $X(C)$, взагалі кажучи, не є гомеоморфний своєму квадратові; таку ситуацію зустрічаємо, наприклад, при $C = \mathcal{M}_1$ (клас повних сепарабельних метричних просторів), коли $X(C) = s^\infty = \varinjlim s^n$ (s означає псевдовнутрішність гільбертового куба Q). Отже, про стабільність $X(C)$ многовидів у розглянутому вище розумінні говорити не можна.

Для формулювання теореми стабільності нам треба ввести деякі допоміжні означення.

Означення. *Для $X, Y \in ANR$ відображення $f : X \to Y$ називається тонкою гомотопійною еквівалентністю, якщо для довільного відкритого покриття $\mathcal{U}$ простору Y існує таке відображення $g : Y \to X$, що $f \circ g$ є $f^{-1}(\mathcal{U})$-гомотопне до id_X.*

Означення. *Простір X називається сильно $CZ(CC)$-універсальним, якщо для довільних $A \in C$, замкненої в A підмножини B та такого відображення $f : A \to X$, що звуження $f|B : B \to X$ є Z- (замкнене) вкладення, відкритого покриття $\mathcal{U}$ простору X існує таке Z-(замкнене) вкладення $h : A \to X$, що $h|B = f|B$ і для довільного $x \in X$ $\{f(x), h(x)\} \subset U$ для деякого $U \in \mathcal{U}$.*

Через $X(C)$ ми будемо позначати простір, що задовольняє таким властивостям : 1) $X(C) \in AE(C)$; 2) $X(C) = \varinjlim X_i$, де $X_i \in C$; 3) X_i

---

є сильно CZ-універсальний ANR; 4) X_i є Z-множиною в X_{i+1} для довільного $i \in \mathbb{N}$.

На просторі $X(\mathcal{C}) \times X(\mathcal{C})$ розглянемо топологію τ з умови $(X(\mathcal{C}) \times X(\mathcal{C}), \tau) = \varinjlim(X_i \times X_i)$. Відомо [3], що для кожного $X(\mathcal{C})$-многовида M існує відкрите вкладення $f : M \to X(\mathcal{C})$. Розглянемо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} pr_1^{-1}(f(M)) & \xrightarrow{h} & (X(\mathcal{C}) \times X(\mathcal{C}), \tau) \\ {\scriptstyle pr_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ M & \xrightarrow{f} & X(\mathcal{C}) \end{array}$$

($f(M) \times X(\mathcal{C}) \doteq pr_1^{-1}(f(M))$ – природня рівність множин).

ОЗНАЧЕННЯ. *Назвемо $X(\mathcal{C})$-многовид M $X(\mathcal{C})$-стабільним, якщо простори $pr_1^{-1}(f(M))$ та M гомеоморфні для деякого відкритого вкладення $f : M \to X(\mathcal{C})$.*

ТЕОРЕМА. *Кожен $X(\mathcal{C})$-многовид є $X(\mathcal{C})$-стабільним.*

Доведення. Оскільки $X(\mathcal{C}) \in AE(\mathcal{C})$, то $X(\mathcal{C})$ – стягуваний простір. Нехай $H : X(\mathcal{C}) \times [0,1] \to X(\mathcal{C})$ – така гомотопія, що $H(x,0) = x$ і $H(x,1) = x_0 \in X(\mathcal{C})$ (x_0 – деяка відмічена точка у $X(\mathcal{C})$). Зауважимо, що відображення $pr_1 : pr_1^{-1}(f(M)) \to f(M)$ є тонкою гомотопійною еквівалентністю. Справді, нехай відображення $i : f(M) \to (f(M) \times X(\mathcal{C}), \tau)$ задається формулою $i(x) = (x, x_0)$, тоді $pr_1 \circ i = id_{f(M)}$ і для довільного відкритого покриття $\mathcal{U}$ простору $f(M)$ тотожне відображення простору $f(M) \times X(\mathcal{C})$ є $pr_1^{-1}(\mathcal{U})$-гомотопним до відображення $i \circ pr_1$ (їх гомотопія G задається формулою $G = id \times H$).

За класифікаційною теоремою [3], простори $f(M)$ та $f(M) \times X(\mathcal{C})$ гомеоморфні.

Список літератури

1. Heisey R.E. Manifolds modelled on the direct limit of Hilbert cubes // Geometric Topology. New York, 1979. P. 609-619.
2. Sakai K. On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds // Topology Appl. 1984. Vol.18.P.69-79.
3. Pentsak E. On manifolds modeled on direct limits of $\mathcal{C}$-universal ANR's //Preprint.
4. Pentsak E. On manifolds modeled on direct limits of ANR's // Міжнародна матем. конф. пам'яті Г.Гана. Тези доповідей. Чернівці, 1994. С.118.