УДК 512.64

В.М.Петричкович

# ПРО РОЗКЛАДНІСТЬ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ У ДОБУТОК УНІТАЛЬНИХ МНОЖНИКІВ

Нехай $\mathbf{P}$ – поле, $\mathbf{P}_n$ і $\mathbf{P}_n[x]$ – кільця $n\times n$ – матриць відповідно над $\mathbf{P}$ і $\mathbf{P}[x]$. Через $d_k^A(x)$ будемо позначати найбільший спільний дільник мінорів $k$ – го порядку, $\mu_k^A(x)$ – $k$-ий інваріантний множник, $D^A(x)$ – канонічну діагональну форму (к.д.ф.) матриці $A(x) \in \mathbf{P}_n[x]$, тобто

$$D^A(x) = diag(\mu_1^A(x), \ldots, \mu_n^A(x)), \ \mu_i^A | \mu_{i+1}^A, \ i = 1, \ldots, n,$$

$U(x), V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$. Нагадаємо, що матричний многочлен (многочленна матриця)

$$A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i, \ A_i \in P_n, \ i = 0, 1, \ldots, m,$$

називається ругулярним (регулярною), якщо $A_m$ – неособлива та унітальним (унітальною), якщо $A_m = I$ – одинична матриця.

Задача про розкладність матричного многочлена $A(x)$ на множники, тобто зображення його у вигляді добутку

$$A(x) = B_1(x) \ldots B_q(x), \tag{1}$$

унітальних множників $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, q$, розв'язана в окремих випадках. Так, у випадку $\mathbf{P} = \mathbf{C}$ встановлено критерій зображення $A(x)$ у вигляді (1) у роботі [1], коли $(detB_i(x), detB_j(x)) = 1$, у [2], коли $((detB_i(x), detB_j(x)), d_{n-1}^A(x)) = 1$, $i, j = 1, \ldots, q$, $i \neq j$, і у [3], коли $\prod_{i=1}^{q} D^{B_i}(x) = D^A(x)$. Виділені також окремі класи матричних многочленів, які розкладаються на лінійні унітальні множники: простої структури [4,5]; кратності характеристичних коренів яких не більші двох [6].

В цій статті наведені умови розкладності матричних многочленів у добуток довільного числа унітальних множників, якими охоплюються ширші від вищенаведених типи розкладів. При цьому розглянуто подільність добутку матриць на матрицю та запропоновано досить простий спосіб регуляризації матричних многочленів.

## 1. Про подільність добутку матриць

Нехай $B(x), C(x), H(x) \in \mathbf{P}_n[x]$ неособливі матриці. Нехай, далі, $H(x)$ є лівим дільником добутку матриць $B(x)$ і $C(x)$, тобто

$$B(x)C(x) = H(x)F(x). \tag{2}$$

Виникає запитання, за яких умов $H(x)$ є лівим дільником матриці $B(x)$, тобто $B(x) = H(x)K(x)$ – ?

Необхідною умовою для цього є те, що $D^H(x)|D^B(x)$ [7]. Нехай, далі, для матриць $A(x) = B(x)C(x)$, $B(x)$ і $H(x)$ існують такі матриці $U \in GL_n(\mathbf{P})$ і $V_A(x), V_B(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$, що

$$T^A(x) = UA(x)V_A(x) = triang_S(\mu_1^A(x), \ldots, \mu_n^A(x)) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \mu_1^A(x) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(x) & \mu_2^A(x) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & \mu_n^A(x) \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

де $deg\, a_{ij} < deg\, \mu_i^A$, якщо $deg\, \mu_i^A > 0$ і $a_{ij}(x) \equiv 0$, якщо $deg\, \mu_i^A = 0$, $i, j = 1, \ldots, i > j$ [8], і

$$T^B(x) = UB(x)V_B(x) = triang_s(\mu_1^B(x), \ldots, \mu_n^B(x)),$$

$$T^H(x) = UH(x)V_H(x) = triang_s(\mu_1^H(x), \ldots, \mu_n^H(x)) \tag{4}$$

такого ж трикутного вигляду (3). Тоді із рівності (2) одержуємо

$$UA(x)V_A(x) = UB(x)V_B(x)V_B^{-1}(x)C(x)V_A(x) = UH(x)V_H(x)V_H^{-1}(x)F(x)V_A(x),$$

або

$$T^A(x) = T^B(x)C_1(x) = T^H(x)F_1(x), \tag{5}$$

де

$$C_1(x) = V_B^{-1}(x)C(x)V_A(x) = triang(\phi_1(x), \ \dots, \ \phi_n(x)),$$

$$F_1(x) = V_H^{-1}(x)F(x)V_A(x) = triang(\varphi_1(x), \ \dots, \ \varphi_n(x))$$

нижні трикутні матриці відповідно з елементами $\phi_i(x)$ і $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ на головних діагоналях.

Лема 1. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^B(x)$. Якщо матриця $C_1(x)$ із співвідношення (5) еквівалентна матриці $\Phi(x) = diag(\phi_1(x), \dots$ $\dots, \phi_n(x))$ і

$$\left(\frac{\mu_n^H(x)}{\mu_i^H(x)}, \ \phi_i(x)\right) = 1, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{6}$$

то $H(x)|B(x)$.

Доведення. Із результатів [9] випливає, що для $C_1(x)$ існують нижні унітрикутні матриці $S(x)$ і $W(x)$ такі, що $S(x)C_1(x)W(x) = \Phi(x)$. Тому із (5) одержуємо

$$T^B(x)S^{-1}(x)S(x)C_1(x)W(x) = T^H(x)F_1(x)W(x), \tag{7}$$

або

$$T_1^B(x)\Phi(x) = T^H(x)F_2(x), \tag{8}$$

де $F_2(x) = F_1(x)W(x) = triang(\varphi_1(x), \ \dots, \ \varphi_n(x))$. Із співвідношення (8), за умови (6), неважко одержати, що $\Phi(x)$ є правим дільником $F_2(x)$, тобто $F_2(x) = F_3(x)\Phi(x)$. Тому із (8) маємо

$$T_1^B(x) = T^H(x)F_3(x). \tag{9}$$

Враховуючи співвідношення (3), (4) і (7) між матрицями $T_1^B(x)$ і $B(x)$, $T^H(x)$ і $H(x)$ із (9) одержимо, що $H(x)|B(x)$, тобто $B(x) = H(x)G(x)$. Лема доведена.

Наслідок 1. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^Bx)$. Якщо виконується принаймні одна із двох умов

а) $D^B(x)D^C(x) = D^{BC}(x)$,

б) $\left( \frac{\mu_n^B(x)}{\mu_i^B(x)}, \psi_i(x) \right) = 1, \ i = 1, \ \dots, \ n-1$

і $\left( \frac{\mu_n^H(x)}{\mu_i^H(x)}, \psi_i(x) \right) = 1, \ i = 1, \ \dots, \ n-1$, то $H(x)|B(x)$.

Лема 2. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^B(x)$. Якщо

$$\left( \frac{\mu_i^B(x)}{\mu_j^B(x)}, (\psi_i(x), \psi_j(x)) \right) = 1, \ i,j = 1, \ \dots, \ n, \ i > j$$

і

$$\left( \frac{\mu_n^H(x)}{\mu_i^H(x)}, \psi_i(x) \right) = 1, \ i = 1, \ \dots, \ n-1,$$

то $H(x)|B(x)$.

Доведення цієї леми випливає з леми 1 і теореми 1 із [13].

Наслідок 2. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$. Якщо виконується хоч би одна із умов

1. $(\det B(x), \det C(x)) = 1$,
2. $(\det H(x), \det C(x)) = 1$,
3. $((\det B(x), \det C(x)), d_{n-1}^{BC}(x)) = 1$,
4. $((\det H(x), \det C(x)), d_{n-1}^{BC}(x)) = 1$,

то $H(x)|B(x)$.

Доведення. Із того, що $H(x)|B(x)C(x)$ за умов 1,2 випливає, що $D^H(x)|D^B(x)$, а за умов 3,4 – $\mu_i^H|\mu_i^B$ для всіх $i=1, \dots, n-1$, а далі застосовуємо наслідок 1.

Лема 3. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^B(x)$. Якщо $F_1(x)$ із співвідношення (5) еквівалентна матриці $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ і $D^B(x)D^C(x) = D^{BC}(x)$, то $H(x)|B(x)$.

Доведення цієї леми аналогічне доведенню леми 1.

Наслідок 3. Нехай $H(x)|B(x)C(x)$ і $D^H(x)|D^B(x)$. Якщо

$$\left(\frac{\mu_n^B(x)}{\mu_i^B(x)},\ \varphi_i(x)\right) = 1,\quad i = 1, \ldots, n-1$$

і $F_1(x)$ еквівалентна $\Phi(x)$, то $B(x) \mid B(x)$.

## 2. Регуляризація матричних многочленів

Будемо говорити, що матричний многочлен $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$, $A_i \in \mathbf{P}_n$, $i = 0, 1, \ldots, m$ регуляризується справа, якщо існує матриця $V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$ така, що $A(x)V(x) = \sum_{i=0}^{s} B_i x^i$ - регулярний, зокрема унітальний матричний многочлен. Відомі різні способи регуляризації матричних многочленів залежно від їхнього вигляду [10, 8] та основного поля [13, 11, 12]. Вкажемо досить простий спосіб регуляризації матричних многочленів, який використовуватиметься у наступних параграфах.

Матриця $A(x) \in \mathbf{P}_n[x]$, $\det A(x) \neq 0$ у випадку нескінченного поля $\mathbf{P}$ півскалярними еквівалентними перетвореннями зводиться до спеціального трикутного вигляду $T(x)$ (3). Якщо ж $\mathbf{P}$ - скінченне, то у роботі [8] наведені умови, за яких таке зведення матриці $A(x)$ можливе. Очевидно, якщо трикутна форма $T^A(x) = UA(x)V(x)$, $U \in GL_n[\mathbf{P}]$, $V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$, регуляризується справа, то і $A(x)$ регуляризується і навпаки.

Нехай $T(x) = triang_s(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$ - нижня трикутна матриця вигляду (3), $\deg \mu_i = m_i$, $i = 1, \ldots, n$. Оскільки $\mu_i \mid \mu_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, то $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$. Запишемо $T(x)$ у вигляді матричного многочлена $T(x) = T_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} T_j x^j$, при цьому покладаємо $m_0 = 0$. Зауважимо, що деякі суми можуть дорівнювати нулю, тобто при $m_k = m_{k-1}$ $\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} T_j x^j = 0$. Тепер неважко бачити, що у кожній матриці $T_{m_k+1}, T_{m_k+2}, \ldots, T_{m_{k+1}}$, $k = 1, \ldots, n-1$ перші $k$ рядки є нульовими. Надалі через $T_r^{(n-k)}$ позначатимемо $(n-k)\times n$-матрицю, одержану із матриці $T_r$, викресленням її $k$ перших рядків.

Нехай $\sum_{i=1}^{n} m_i = sn$. Запишемо матрицю $M_T$, яка відповідає многочлену $T(x)$:

$$M_T = \| G_n \ \ G_{n-1} \ \ \ldots \ \ G_1 \ \ G_0 \|^{t_B},$$

де $t_B$ – символ блочного транспонування і

$$G_0 = \| T_0 \ \ T_1 \ \ldots \ T_s \|,$$

$$G_k = \left\| \begin{matrix} T_{m_k}^{(n-(k-1))} & T_{m_k+1}^{(n-(k-1))} & \ldots & T_{m_k+s}^{(n-(k-1))} \\ T_{m_k-1}^{(n-(k-1))} & T_{m_k}^{(n-(k-1))} & \ldots & T_{m_k+(s-1)}^{(n-(k-1))} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{m_{k-1}+1}^{(n-(k-1))} & T_{m_{k-1}+2}^{(n-(k-1))} & \ldots & T_{m_{k-1}+(s+1)}^{(n-(k-1))} \end{matrix} \right\|,$$

$k = 1, \ldots, n$. При цьому покладаємо $m_0 = 0$ і при $m_j + l > m_n$ $T_{m_j+i}^{(n-l)} = 0$ - нульова матриця розмірів $(n-l)\times n$. При $m_k = 0$ $G_k$ - порожня матриця, тобто матриця розміру $0\times n$. Матриця $G_k$ розмірів $(m_k-m_{k-1})(n-(k-1))\times(s+1)n$, $M_T$ – квадратна матриця порядку $(s+1)n$.

Лема 4. Матричний многочлен $T(x) = triang_s(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$ трикутного вигляду (3) регуляризується справа тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^{n} deg\, \mu_i = ns$ і відповідна йому матриця $M_T$ неособлива.

Доведення випливає із леми 1 з роботи [8], оскільки матрицю $M_T$ одержують із матриці

$$
\tilde{M}_T = \left\| \begin{array}{cccc} T_{m_n} & 0 & \dots & 0 \\ T_{m_n-1} & T_{m_n} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{m_n-s} & T_{m_n-(s-1)} & \dots & T_{m_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_0 & T_1 & \dots & T_s \end{array} \right\|,
$$

побудованої як і $M_F$ у роботі [8], викресленням відповідних нульових рядків.

<u>Лема 5.</u> Нехай відповідна матричному многочлену $T(x)$ вигляду (3) матриця $M_T$ неособлива і $M_T^{-1} = \|M_{ij}\|$, $i, j = 0, 1, \dots, s$, $M_{ij} \in \mathbf{P}_n$ її обернена матриця, записана в блочному вигляді. Тоді коефіцієнти унітального матричного многочлена

$$L(x) = T(x)V(x) = Ix^s + L_{s-1}x^{s-1} + \dots + L_1 x + L_0, \qquad (10)$$

$V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$, до якого $T(x)$ регуляризується справа, обчислюються за формулою

$$L_k = \sum_{i=0}^{k} T_i M_{(s-k)+i,s}, \quad k = 0, 1, \dots, s-1. \qquad (11)$$

<u>Доведення.</u> На основі леми 4 існує матриця $V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$ така, що має місце співвідношення (10), причому $\deg V \le s$, тобто $V(x) = \sum_{i=0}^{s} V_i x^i$. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$ в обох частинах рівності (10), неважко бачити, що $V_i$, $i = 0, 1, \dots, s$ задовольняють рівняння

$$\tilde{M}_T \|V_s \quad V_{s-1} \quad \dots \quad V_1 \quad V_0\|^{t_B} = \|0 \quad \dots \quad 0 \quad I\|^{t_B},$$

яке еквівалентне рівнянню

$$M_T \|V_s \quad V_{s-1} \quad \dots \quad V_1 \quad V_0\|^{t_B} = \|0 \quad \dots \quad 0 \quad I\|^{t_B}.$$

Звідси одержуємо, що

$$\|V_s \quad V_{s-1} \quad \dots \quad V_1 \quad V_0\|^{t_B} = \|M_{0s} \quad M_{1s} \quad \dots \quad M_{s-1,s} \quad M_{ss}\|^{t_B},$$

де $\|M_{0s}\ \ M_{1s}\ \ \dots\ \ M_{s-1,s}\ \ M_{ss}\|^{t_в}$ останній блочний стовпець матриці $M_T^{-1} = \|M_{ij}\|$, $i, j = 0, 1, \dots, s$, $M_{ij} \in \mathbf{P}_n$. Тепер формули (11) випливають зі співвідношення (10). Лема доведена.

3. Розклад матричних многочленів у добуток унітальних множників

Нехай матричний многочлен $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$, $A_i \in \mathbf{P}_n$ зображений у вигляді добутку

$$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x). \tag{12}$$

Позначимо $C_p(x) = \prod_{i=1}^{p} B_i(x)$, $F_{q-p}(x) = \prod_{i=1}^{q-p} B_{p+i}(x)$, $p = 1, \dots, q-1$. Тоді із (12) можна записати

$$A(x) = C_p(x) F_{q-p}(x), \quad p = 1, \dots, q-1.$$

Тому к.д.ф. $D^{C_p}(x)$ матриці $C_p(x)$ ділить к.д.ф. $D^A(x)$ матриці $A(x)$ для всіх $p = 1, \dots, q-1$. Отже, розкладові (12) матричного многочлена $A(x)$ відповідає розклад $D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} \Phi_i(x)$ його к.д.ф. $D^A(x)$ такий, що кожна матриця

$$\Psi_p(x) = \prod_{i=1}^{p} \Phi_i(x) = diag(\psi_{p1}(x), \dots, \psi_{pn}(x)), \quad p = 1, \dots, q-1$$

є $d$ - матрицею, тобто $\psi_{pi} | \psi_{p,i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Нехай тепер к.д.ф. $D^A(x) = diag(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x))$ матричного многочлена $A(x)$, $\det A(x) \neq 0$ зображена у вигляді добутку

$$D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} \Phi_i(x), \tag{13}$$

де $\Phi_i(x) = diag(\varphi_{i1}(x), \dots, \varphi_{in}(x))$, причому $\deg \det \Phi_i = s_i n$, $i = 1, \dots, q-1$ і кожна матриця

$$\Psi_p(x) = \prod_{i=1}^{p} \Phi_i(x) = diag(\psi_{p1}(x), \dots, \psi_{pn}(x)), \quad p = 1, \dots, q-1$$

є $d$ - матрицею. Через $\Lambda_{q-p}(x)$ позначимо діагональну матрицю

$$\Lambda_{q-p}(x) = \prod_{i=1}^{q-p} \Phi_{p+i}(x) = diag(\lambda_{q-p,1}(x), \dots, \lambda_{q-p,n}(x)), \quad p = 1, \dots, q-1,$$

а через $K_p(x)$, аналогічно, як у [14] матрицю

$$K_p(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \dfrac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} k_{21}(x) & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\mu_n(x)}{\mu_1(x)} k_{n1}(x) & \dfrac{\mu_n(x)}{\mu_2(x)} k_{n2}(x) & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $k_{ij}(x) = k_{ij}^{(0)} + k_{ij}^{(1)} x + \ldots + k_{ij}^{(r_{ij})} x^{r_{ij}}$, причому $k_{ij}(x) \equiv 0$, якщо $\psi_{pi} | \psi_{pj}$, і $r_{ij} = deg\, \psi_{pi} - deg\, \psi_{pj} - 1$, якщо $\psi_{pj} \nmid \psi_{pi}$, $i > j$, $k_{ij}^{(r_{ij})}$ – незалежні змінні, тобто $K_p(x)$ – матриця над кільцем $\mathbf{P}(k)[x]$, де $\mathbf{P}(k)$ – розширення поля $\mathbf{P}$, одержане приєднанням $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$ до поля $\mathbf{P}$.

Нехай, далі,

$$T^A(x) = UA(x)V(x) = triang_s(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)),$$

$U \in GL_n(\mathbf{P})$, $V(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$ трикутна форма (3) матричного многочлена $A(x)$, яку запишемо так

$$T^A(x) = H(x) diag(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)), \tag{14}$$

$H(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$. Тепер розглянемо добуток матриць $H(x)K_p(x)\Phi_p(x)$. Правими елементарними перетвореннями зведемо цю матрицю до вигляду (3), тобто для деякої матриці $S(x) \in GL_n(\mathbf{P}(k)[x])$

$$T_p(x) = H(x)K(x)\Phi_p(x)S(x) = triang_s(\psi_{p1}, \ldots, \psi_{pn}(x)).$$

<u>Теорема.</u> Нехай к.д.ф. $D^A(x)$ матричного многочлена $A(x)$, $det A(x) \neq 0$ зображена у вигляді добутку (13) і

$$\left( \lambda_{q-p,i}(x), \frac{\varphi_{p-1,n}(x)}{\varphi_{p-1,i}(x)} \right) = 1, \tag{15}$$

або

$$\left( \lambda_{q-p,i}(x), \frac{\varphi_{pn}(x)}{\varphi_{pi}(x)} \right) = 1 \tag{16}$$

$i = 1, \ldots, n-1$, $p = 2, \ldots, q-1$. Тоді матричний многочлен $A(x)$ зображається у вигляді добутку

$$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x), \tag{17}$$

де $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, q-1$ унітальні многочлени степенів $a_i$ і $C_p(x) = \prod_{i=1}^{p} B_i(x)$ еквівалентна $\Phi_p(x)$ і $F_{q-p}(x) = \prod_{i=1}^{q-p} B_{p+i}(x)$ еквівалентна $\Lambda_{q-p}(x)$, $p = 1, \ldots, q-1$, у тому і тільки у тому випадку, коли кожний матричний многочлен $T_p(x)$, $p = 1, \ldots, q-1$ регуляризується справа над кільцем $P(k)[x]$, тобто відповідні їм матриці $M_{T_p}$, $p = 1, \ldots, q-1$ неособливі.

Доведення теореми проводимо за індукцією.

При $q = 2$ теорема випливає із теореми 2 з роботи [15] та леми 4. Припустимо її справедливість для $q-1$ і доведемо теорему для $q$.

Нехай матриці $T_{q-2}(x)$ і $T_{q-1}(x)$ регуляризуються справа. Це означає, що $A(x) = C_{q-2}(x)F_2(x)$, і $A(x) = C_{q-1}(x)F_1(x)$, де $C_{q-2}(x)$ і $C_{q-1}(x)$ – унітальні многочлени і, очевидно, $D^{C_{q-2}} | D^{C_{q-1}}$. Тоді на основі леми 1 або наслідку 3, залежно від виконання умов (15) або (16) теореми, матимемо, що $C_{q-1}(x) = C_{q-2}(x)B_{q-1}(x)$. Згідно з припущенням індукції $C_{q-2}(x) = B_1(x), \ldots, B_{q-2}(x)$, тобто $A(x) = B_1(x) \ldots B_{q-1}(x)F_1(x)$, $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, q-1$ – унітальні многочлени. Теорема доведена.

Зауважимо, що унітальні множники розкладу (17) матричного многочлена $A(x)$ можна знайти на основі формул (11), при цьому змінним $k_{ij}^{(r_i)}$ надаючи допустимих значень, одержуватимемо розклади вигляду (17) на унітальні множники матричного многочлена $A(x)$.

Наслідок 4. Якщо в умовах сформульованої теореми

$$((\varphi_{pi}(x),\ \varphi_{pj}(x)),\ \frac{\psi_{p-1,i}(x)}{\psi_{p-1,j}(x)}) = 1,\ i,j = 1,\ \dots,\ n,\ i > j$$

для всіх $p = 2,\ \dots,\ q-1$, то розклад (17) матричного многочлена $A(x)$ паралельний розкладові (13) його к.д.ф. $D^A(x)$, тобто такий, що матриці $B_i(x)$, $i = 1,\ \dots,\ q$ еквівалентні $\Phi_i(x)$.

Наслідок 5. Нехай елементарні дільники матричного многочлена $A(x)$ прості. Тоді $A(x)$ зображається у вигляді добутку (17), відповідно розкладові (13) його к.д.ф. $D^A(x)$, у тому і тільки у тому випадку, коли кожний многочлен $T_p(x)$, $p = 1,\ \dots,\ q-1$ регуляризується справа над кільцем $\mathbf{P}(k)[x]$, при цьому розклад (17) матричного многочлена $A(x)$ паралельний розкладові (13) його к.д.ф. $D^A(x)$.

Тепер розглянемо матрицю $H(x)\Phi_p(x)$, де $H(x)$ із співвідношення (14). Правими елементарними перетвореннями зведемо її до трикутного вигляду (3), тобто

$$\tilde{T}_p(x) = H(x)\Phi(x)S(x) = triang_s(\psi_{p1}(x),\ \dots,\ \psi_{pn}(x)),$$

$S(x) \in GL_n(\mathbf{P}[x])$.

Наслідок 6. Нехай к.д.ф. $D^A(x)$ матричного многочлена $A(x)$ зображається у вигляді добутку

$D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} \Phi_i(x)$, де $\Phi_i(x) = diag(\varphi_{i1}(x),\ \dots,\ \varphi_{in}(x))$, $\varphi_{ij} | \varphi_{i,j+1}$, $i = 1,\ \dots,\ q$, $j = 1,\ \dots,\ n-1$ і $deg\ det\Phi_i = s_i n$. Тоді $A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x)$, де $B_i(x)$, $i = 1,\ \dots,\ q-1$ – унітальні многочлени степенів $s_i$ і $D^{B_i}(x) = \Phi_i(x)$, $i = 1,\ \dots,\ q$ у тому і тільки у тому випадку, коли кожний матричний многочлен $T_p(x)$, $p = 1,\ \dots,\ q-1$ регуляризується справа, тобто відповідні їм матриці $M_{\tilde{T}_p}$ неособливі.

Доведення випливає із теореми, враховуючи, що у цьому випадку $K_p(x) = I$ – одинична матриця для всіх $p = 1,\ \dots,\ q-1$.

Зауважимо, якщо $A(x)$ унітальний матричний многочлен, то можна сформулювати аналогічні умови його розкладності у добуток

$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x)$, де всі множники $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, q$ – унітальні, зокрема лінійні унітальні многочлени.

## Список літератури


1. Казімірський П.С. Про розклад поліноміальної матриці на лінійні множники // Вестн. Львов. политехн. ин-та. 1965. № 8. С. 53 - - 60.

2. Казімірський П.С. Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники // Укр. мат. журнал. 1977. Т. 5. № 5. С. 653 - 658.

3. Зелиско В.Р. О разложении матричного многочлена в произведение линейных множителей // Укр. мат. журнал. 1980. Т. 32. № 6. С. 807 - 810.

4. Казимирский П.С. Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теор. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. Киев, 1976. С. 29 - 40.

5. Маркус А.С., Мереуца И.В. О некоторых свойствах простых λ-матриц // Мат. исследования. 1975. Т. 10. № 3 С. 207 - 214.

6. Казимирский П.С., Петричкович В.М. Разложимость полиномиальной матрицы на линейные множители // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1978. Вып. 8. С. 3 - 9.

7. Ingraham M.N. Rational metods in matrix equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1941. vol. 47. P. 61 - 70.

8. Петричкович В.М. Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42. № 5. С. 644 - 649.

9. Feinberg R.B. Equivalence of partitioned matrices // J. Res.

Bur. Stand. Sect. 1976. vol. 80, N 1. P. 89 - 97.

10. Bell J.H. Left assotiates of monic matrices with an application to unilateral matrices equations // Amer. Jorn. Math. 1949. vol. 71. P. 249 - 257.

11. Петричкович В.М., Прокип В.М. О факторизации многочленных матриц над произвольным полем // Укр. мат. журнал. 1986.Т. 38. № 4. С. 478 - 483.

12. Прокип В.М. О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42. № 9. С. 1213 - 1219.

13. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К. 1981. 224 с.

14. Зелиско В.Р. О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1980. Вып. 12. С. 14 - 21.

15. Петричкович В.М. Паралельні факторизації многочленних матриць // Укр. мат. журнал. 1992. Т. 44. № 9. С. 1228 - 1233.