УДК 512.64

В.М. Прокіп

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ДІЛЬНИКІВ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

В статті досліджуються властивості дільників многочленних матриць над полем P. Запропоновано застосування здобутих результатів до розв'язування матричних многочленних рівнянь.

1. Нехай P - довільне поле, $P[x]$ кільце многочленів над P, $P_{m,n}$, $P_{m,n}[x]$ - множини $m{\times}n$-матриць над P і $P[x]$ відповідно. Нехай, далі, многочленні матриці $D_1(x)$, $D_2(x) \in P_{m,m}[x]$ - ліві дільники многочленної матриці $A(x)$, тобто

$$A(x) = D_1(x)F_1(x), \quad A(x) = D_2(x)F_2(x).$$

Яким умовам повинні задовольняти матриці $D_1(x)$ і $D_2(x)$, щоб матриця $A(x)$ ділилась зліва на матрицю $D(x) = D_1(x)D_2(x)$ (або на матрицю $D(x) = D_2(x)D_1(x)$) ?

Часткову відповідь на це питання дає теорема 1.

Теорема 1. Нехай многочленна матриця $A(x)$ допускає зображення $A(x) = D_1(x)\,F_1(x) = D_2(x)F_2(x)$, причому $D_i(x) \in P_{m,m}[x]$, $i = 1, 2;$ - неособливі матриці. Якщо $(\det D_1(x), \det D_2(x)) = 1$ і $D_1(x)D_2(x) = D_2(x)D_1(x)$, тоді матриця $D(x) = D_1(x)D_2(x)$ - лівий дільник матриці $A(x)$, тобто $A(x) = D_1(x)D_2(x)F(x)$.

Доведення. Нехай неособливі многочленні матриці $D_1(x)$ і $D_2(x)$ - ліві дільники многочленної матриці $A(x)$:
$A(x) = D_1(x)F_1(x)$, $A(x) = D_2(x)F_2(x)$, ($\det D_1(x) = d_1(x)$, $\det D_2(x) = d_2(x)$). Позначимо через $D_1^*(x)$ і $D_2^*(x)$ - взаємні матриці до матриць $D_1(x)$ і $D_2(x)$ відповідно. Помножимо тепер першу рівність зліва на $D_1^*(x)$, а другу зліва на $D_2^*(x)$ здобуваємо

$$D_1^*(x)A(x) = d_1(x)F_1(x), \qquad D_2^*(x)A(x) = d_2(x)F_2(x).$$

Тепер здобуті рівності домножимо зліва першу на $D_2^*(x)$, а другу на $D_1^*(x)$:

$$D_2^*(x)D_1^*(x)A(x) = d_1(x)D_2^*(x)F_1(x), \qquad (1)$$

$$D_1^*(x)D_2^*(x)A(x) = d_2(x)D_1^*(x)F_2(x). \qquad (2)$$

Оскільки $D_1(x)D_2(x) = D_2(x)D_1(x)$, то неважко переконатись у тому, що $D_1^*(x)D_2^*(x) = D_2^*(x)D_1^*(x)$. На основі цього зауваження отримуємо, що праві частини рівностей (1) і (2) рівні, тобто

$$d_1(x)D_2^*(x)F_1(x) = d_2(x)D_1^*(x)F_2(x). \qquad (3)$$

Оскільки $(\det D_1(x), \det D_2(x)) = 1$, то з (3) випливає, що усі елементи матриці $D_1^*(x)F_2(x)$ діляться на $d_1(x)$, а всі елементи матриці $D_2^*(x)F_1(x)$ діляться на $d_2(x)$, тобто

$$D_1^*(x)F_2(x) = d_1(x)G_2(x), \qquad D_2^*(x)F_1(x) = d_2(x)G_1(x).$$

Врахувавши (3) та останні дві рівності маємо

$$d_1(x)d_2(x)G_1(x) = d_1(x)D_2^*(x)F_1(x),$$

$$d_1(x)d_2(x)G_2(x) = d_2(x)D_1^*(x)F_2(x).$$

Приймаючи до уваги (3) та останні дві рівності легко бачити, що $G_1(x) = G_2(x)$. Тепер (1) запишемо так

$$D_2^*(x)D_1^*(x)A(x) = d_1(x)D_2^*(x)F_1(x) = d_1(x)d_2(x)G_1(x),$$

або

$$D_2^*(x)D_1^*(x)A(x) = d_1(x)d_2(x)G_1(x) = D_2^*(x)D_1^*(x)D_1(x)D_2(x)G_1(x).$$

Звідси випливає, що $A(x) = D_1(x)D_2(x)F(x)$, тобто матриця $D(x) = D_1(x)D_2(x)$ – лівий дільник матриці $A(x)$. Очевидно також, що і матриця $D(x) = D_2(x)D_1(x)$ є лівим дільником матриці $A(x)$, тобто

$A(x) = D_2(x)D_1(x)F(x)$. Теорема доведена.

Відзначимо, що цілком аналогічно доводиться наступна

Теорема 2. Нехай многочленна матриця $A(x)$ допускає зображення $A(x) = D_i(x)F_i(x)$, де $D_i(x) \in P_{m,m}[x]$, $i = 1, 2, \ldots, k$; - неособливі многочленні матриці. Якщо $(\det D_i(x), \det D_j(x)) = 1$ і $D_i(x)D_j(x) = D_j(x)D_i(x)$, для всіх $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$; то матриця $D(x) = D_1(x)D_2(x)\ldots D(x)_k$ - лівий дільник матриці $A(x)$, тобто $A(x) = D_1(x)D_2(x)\ldots D(x)_k F(x)$.

Зауважимо, що теорема 1 узагальнює добре відомий результат для многочленів над полем P (див. [1]): Нехай многочлен $a(x) \in P[x]$ ділиться на многочлени $d_1(x)$ і $d_2(x)$. Якщо $(d_1(x), d_2(x)) = 1$, тоді $a(x)$ ділиться і на їх добуток.

2. Нехай R, C - поля дійсних і комплексних чисел, $R[x]$ і $C[x]$ - кільця многочленів над R і C відповідно. Надалі через $R_{m,n}$ і $C_{m,n}$ та $R_{m,n}[x]$ і $C_{m,n}[x]$ позначатимемо множини $m\times n$-матриць над R і C та $R[x]$ і $C[x]$ відповідно. Нехай $A \in C_{m,n}$. Через $\bar{A}$ позначатимемомо $m\times n$ матрицю з комплексно спряженими елементами (див. [2], с. 18). Розглянемо многочленну матрицю $A(x) \in C_{m,n}[x]$, яку запишемо у вигляді

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad A_i \in C_{m,n}, \quad i = 0,1, \ldots, s.$$

Через $\bar{A}(x)$ позначимо комплексно спряжену многочленну матрицю:

$$\bar{A}(x) = \bar{A}_0x^s + \bar{A}_1x^{s-1} + \ldots + \bar{A}_s, \quad \bar{A}_i \in C_{m,n}, \quad i = 0,1, \ldots, s.$$

В цій частині роботи встановається звязок між дільниками матриць $A(x)$ і $\bar{A}(x)$.

Неважко переконатись у справедливості наступного твердження.

Твердження . Якщо матричне рівняння $XA = B$ ($A \in C_{m,n}$, $B \in C_{k,n}$, X - невідома $k\times m$ матриця) розв'язне і матриця $X_0 = D$

розв'язок цього рівняння, то матриця $\bar{D}$ (з комплексно спряженими елементами) розв'язок комплексно спряженого рівняння $X\bar{A} = \bar{B}$.

Наслідок 1. Якщо матриця $D \in C_{k,m}$ розв'язок матричного рівняння $XA = B$ ($A \in R_{m,n}$, $B \in R_{k,n}$, X - невідома $k\times m$ матриця), то матриця $\bar{D}$ також розв'язок цього ж рівняння.

Тепер приступимо до встановлення зв'язків між дільниками многочленних матриць $A(x)$ і $\bar{A}(x)$.

Теорема 3. Нехай многочленна матриця $D(x) \in C_{m,n}[x]$ - лівий дільник многочленної матриці $A(x) \in C_{m,k}[x]$, тобто $A(x) = D(x)F(x)$. Тоді матриця $\bar{D}(x) \in C_{m,n}[x]$ - лівий дільник многочленної матриці $\bar{A}(x)$, тобто $\bar{A}(x) = \bar{D}(x)\bar{F}(x)$.

Доведення. Матриці $A(x)$, $D(x)$ та $F(x)$ запишемо у вигляді:

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad A_i \in C_{m,k}, \quad i = 0, 1, \ldots, s;$$

$$D(x) = D_0x^r + D_1x^{r-1} + \ldots + D_r, \quad D_j \in C_{m,n}, \quad j = 0, 1, \ldots, r;$$

$$F(x) = F_0x^t + F_1x^{t-1} + \ldots + F_t, \quad F_l \in C_{n,k}, \quad l = 0, 1, \ldots, s.$$

Враховуючи тепер доведення твердження 1 роботи [3] співвідношення $A(x) = D(x)F(x)$ рівносильне рівності

$$\left\| D_0 \; D_1 \; \ldots \; D_r \right\| \left\| \begin{matrix} F_0 & F_1 & \ldots & F_t & & & \\ & F_0 & F_1 & \ldots & F_t & & \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ & & & F_0 & F_1 & \ldots & F_t \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| 0 \; \ldots \; 0 \; A_0 \; A_1 \; \ldots \; A_s \right\|$$

(0 - нульова $m\times k$ матриця). Оскільки $D_j \in C_{m,n}$, $j = 0, 1, \ldots, r$, то застосувавши до останньої рівності доведене вище твердження, отримуємо

$$\| \bar{D}_0\ \bar{D}_1 \ldots \bar{D}_r \| \left\| \begin{matrix} \bar{F}_0 & \bar{F}_1 \ldots \bar{F}_t & & \\ & \bar{F}_0 & \bar{F}_1 \ldots \bar{F}_t & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & \bar{F}_0\ \bar{F}_1 \ldots & \bar{F}_t \end{matrix} \right\| =$$

$$= \| 0 \quad \ldots \quad 0\ \bar{A}_0\ \bar{A}_1 \ldots \quad \bar{A}_s \|$$

Із здобутої рівності, на основі твердження 1 із [3], випливає, що для многочленних матриць

$\bar{A}(x) = \bar{A}_0 x^s + \bar{A}_1 x^{s-1} + \ldots + \bar{A}_s$, $\bar{D}(x) = \bar{D}_0 x^r + \bar{D}_1 x^{r-1} + \ldots + \bar{D}_r$,

та $\bar{F}(x) = \bar{F}_0 x^t + \bar{F}_1 x^{t-1} + \ldots + \bar{F}_t$ виконується рівність

$\bar{A}(x) = \bar{D}(x)\bar{F}(x)$, тобто матриця $\bar{D}(x) \in C_{m,n}[x]$ – лівий дільник многочленної матриці $\bar{A}(x)$. Теорема доведена.

Із теореми 3 випливає

Наслідок 2. Нехай многочленна матриця $D(x) \in C_{m,n}[x]$ – лівий дільник многочленної матриці $A(x) \in P_{m,k}[x]$, тобто $A(x) = D(x)F(x)$. Тоді матриця $\bar{D}(x) \in C_{m,n}[x]$ також лівий дільник многочленної матриці $A(x)$, тобто $A(x) = \bar{D}(x)\bar{F}(x)$

Оскільки задача про розв'язність матричного рівняння

$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \ldots + XA_{s-1} + A_s = 0$, $A_i \in C_{m,n}$, $i = 0, 1, \ldots, s$.

рівносильна задачі про виділення із многочленної матриці

$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$, $A_i \in C_{m,n}$, $i = 0, 1, \ldots, s$.

лівого унітального дільника $D(x) = Ix - D$, $D \in C_{m,m}$, I – одинична матриця порядку m [4], то із здобутих результатів отримуємо:

Наслідок 3. Нехай матриця $D \in C_{m,m}$ – розв'язок матричного рівняння

$$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \ldots + X A_{s-1} + A_s = 0, \; A_i \in C_{m,n}, \; i = 0, 1, \ldots, s.$$

Тоді матриця $\bar{D} \in C_{m,m}$ - розв'язок матричного рівняння

$$X^s \bar{A}_0 + X^{s-1} \bar{A}_1 + \ldots + X \bar{A}_{s-1} + \bar{A}_s = 0.$$

Наслідок 4. Нехай матриця $D \in C_{m,m}$ - розв'язок матричного рівняння

$$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \ldots + X A_{s-1} + A_s = 0, \; A_i \in R_{m,n}, \; i = 0, 1, \ldots, s.$$

Тоді матриця $\bar{D} \in C_{m,m}$ - також розв'язок цього матричного рівняння.

Список літератури

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1977. 432 с.
2. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989. 655 с.
3. Прокип В.М. О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц // Укр. мат. журнал. 1990. т. 42, № 9. С.1213 - 1219.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1966. 576 с.