УДК 512.552.12

О.М. Романів

# Одночасне зведення пари матриць до спеціального трикутного виду над адекватним дуо-кільцем

Основним результатом роботи є теорема, яка доводить можливість одночасного зведення пари матриць над адекватним дуо-кільцем до спеціального трикутного виду з елементарними дільниками по головній діагоналі, використовуючи тотожні односторонні перетворення.

Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце з одиницею. Дуо-кільцем називається кільце, в якому кожен односторонній ідеал є двостороннім. Позначимо через $U(R)$ групу одиниць кільця $R$, а через $R_n$ – кільце квадратних матриць порядку $n$. Кільце $R$ називається кільцем елементарних дільників, якщо для будь-якої матриці $M$ розміру $m \times n$ є обернені матриці $P \in R_n$ і $Q \in R_m$ такі, що $PMQ = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0)$, де $\varepsilon_i$ – елементарні дільники $(i = 1, \dots, r)$, тобто $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R \cap R\varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \dots, r-1)$ [3].

**Означення.** Елемент $a$ кільця $R$ називається адекватним справа, якщо для кожного елемента $b \in R$ є такі елементи $r, s \in R$, що: 1) $a = rs$; 2) $rR + bR = R$; 3) для будь-якого $s' \in R$ з включення $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що правий ідеал $s'R + bR$ властивий.

**Означення.** Кільце, в якому кожний елемент адекватний справа, називається правим адекватним.

**Теорема 1.** *Нехай $R$ - адекватне справа дуо-кільце і $aR + bR + cR = R$, тоді існує елемент $r \in R$ такий, що $(a + rb)R + rcR = R$.*

*Доведення.* Оскільки $R$ – адекватне справа, тоді $c = ms$, де $mR + aR = R$ і $s'R + aR \neq R$ для довільного правого дільника $s$ елемента $s$. Приймемо $m = r$. Нехай $(a + rb)R + rcR = hR$, звідси $rcR \subset hR$. Розглянемо $rR + hR = \delta R$, $r = \delta r_0$, $h = \delta h_0$. Тоді $(a + rb)R \subset hR \subset \delta R$, а отже, $aR \subset \delta R$, що можливо, коли $\delta \in U(R)$, оскільки $aR + rR = R$. Отже, $rcR \subset hR$ і $rR + hR = R$. Звідси $r^2 s = hx$, $x \in R$, $r^2 u + hv = 1$, $u, v \in R$. Тоді $r^2 su' + hvs = s$, де $us = su'$, $u \in R$ (оскільки $R$ – дуо-кільце). Звідси $h(xu' + vs) = s$, тобто $sR \in hR$. Згідно з адекватністю

$R$ маємо $hR+aR=\delta R$, $a=\delta a_0$. Тоді $(ar+rb)R\subset hR\subset\delta R$, $a+rb=\delta y$, $y\in R$. Звідси $\delta a_0+rb=\delta y$, $rbR\subset\delta R$, $rb=\delta t$, $t\subset R$. Оскільки $rR+aR=R$, тоді $rR+\delta R=R$, тобто $rn+\delta m=1$, $m,n\in R$. Звідси $rbn'+\delta mb=b$, де $nb=bn'$, $n'\in R$, а тому $\delta tn'+\delta mb=\delta(tn'+mb)=b$. Отже, $bR\subset\delta R$.

Як ми показали $aR\subset\delta R$, $cR\subset\delta R$, $bR\subset\delta R$, що можливе, коли $\delta\in U(R)$. Оскільки $aR+bR+cR=R$, то $h\in U(R)$. Отже, $(a+rb)R+rcR=R$, що й потрібно було довести.

Теорема 2. *Нехай $A_1$, $A_2$ – матриці розміром $2\times k_1$, $2\times k_2$ над адекватним дуо-кільцем $R$, тоді існують такі зворотні матриці $P$, $Q_i$ $(i=1,2)$, що*

$$PA_iQ_i=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^i & 0 & 0 & \dots & 0\\ * & \varepsilon_2^i & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

*де $\varepsilon_1^i$, $\varepsilon_2^i$ – елементарні дільники матриці $A_i$.*

*Доведення.* Оскільки над $R$ справедлива теорема про елементарні дільники (теорема доведена в [1]), то існують зворотні матриці $S$, $M_1$, $M_2$ над $R_2$ такі, що

$$SA_1M_1=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

$$SA_2M_2=\begin{pmatrix}a & 0 & 0 & \dots & 0\\ b & c & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

де $R\varepsilon_2^1R\subseteq\varepsilon_1^1R\cap R\varepsilon_1^1$.

Припустимо, що $aR+bR+cR=R$. Згідно з теоремою 1 для елементів $a$, $b$, $c\in R$ існує елемент $r\in R$, що $(a+rb)R+rcR=R$.

Розглянемо матрицю $T=\begin{pmatrix}1 & r\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Очевидно, що $T\in U(R_2)$. Тоді

$$TSA_1M_1=\begin{pmatrix}1 & r\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^1 & r\varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},$$

$$TSA_2M_2=\begin{pmatrix}1 & r\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0 & 0 & \dots & 0\\ b & c & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+rb & rc & 0 & \dots & 0\\ b & c & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Оскільки $(a+rb)u + rcv = 1$, то

$$\begin{pmatrix} a+rb & rc & 0 & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & * & 0 & \dots & 0 \\ v & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \begin{pmatrix} u & * & 0 & \dots & 0 \\ v & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in U(R_{k_2}).$$

Тепер розглянемо зворотну матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Маємо

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & r\varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ бо } \varepsilon_2^1 = x\varepsilon_1^1 \text{ і } r\varepsilon_2^1 = y\varepsilon_1^1.$$

Врахувавши, що $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, де $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \in U(R_2)$, отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x\varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема доведена.

Індукція по розмірах матриць і теорема 2 дають нам таку теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Нехай $A_i$ $(i = 1,2)$ — матриці розміром $m \times k_i$ над адекватним дуо-кільцем $R$, тоді існують такі зворотні матриці $P$, $Q_i$ $(i = 1,2)$ над $R$, що*

$$PA_iQ_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^i & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & \varepsilon_t^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

*де $\varepsilon_j^i$ $(j = 1,\dots,t\ (t \le m))$ — елементарні дільники матриці $A_i$.*

НАСЛІДОК. *Нехай $A = B \cdot C$ і $B$, $C$ — матриці над адекватним дуо-кільцем $R$. Тоді елементарні дільники матриці $A$ діляться на відповідні елементарні дільники матриць $B$ і $C$.*

*Доведення.* Оскільки над $R$ справедлива теорема про елементарні дільники [1], то існують зворотні матриці $P$, $Q_1$, $Q_2$ над $R_2$ такі, що $PAQ_1 = PBQ_2Q_2^{-1}C$, тобто

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^A & 0 \\ * & \varepsilon_2^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^B & 0 \\ * & \varepsilon_2^B \end{pmatrix} \cdot X,$$

де $X = Q_2^{-1}C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix}$.

Тоді

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^A & 0 \\ * & \varepsilon_2^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^B & 0 \\ * & \varepsilon_2^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\varepsilon_1^A = \varepsilon_1^B c_1$, $\varepsilon_2^A = \varepsilon_2^B c_2$, що й треба було довести.

## Список літератури


1. *Забавський Б.В.* Про РР-квазідуокільця елементарних дільників // **Алгебра і топологія.** К.: ІСДО. 1993. С.40–49.
2. *Забавский Б.В., Казимирский П.С.* Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных преобразований // Укр. мат. журн. 1984. Т.36. Вып.2. С.256–258.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1966 (1949). P.464–491.