УДК 511.364

Я.М.Холявка

Наближення чисел, зв'язаних з $\wp(z)$ та $\mathrm{sn}(z)$

Нехай $\wp(z)$ - еліптична функція Вейєрштрасса, g_2, g_3 - її інваріанти, $2\omega_0, 2\omega_1$ - деяка фіксована пара її основних періодів. Відомо [1], що існує еліптична функція $\mathrm{sn}\, z$, для якої $4\omega_0, 2\omega_1$ є основними періодами. Через $\varkappa$ позначимо модуль $\mathrm{sn}\, z$, $\xi_0, \ldots, \xi_4$ - наближаючі числа, n_i та L_i - їх степені та довжини, $n = \deg \mathbf{Q}(\xi_0, \ldots, \xi_4)$.

ТЕОРЕМА. *Нехай*

$$P = n\left[\frac{\ln L_0}{n_0} + \frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_4}{n_4} + \min(n_2, n_3)(1 + \frac{\ln L_2}{n_2} + \frac{\ln L_3}{n_3}) + \ln n\right]. \quad /1/$$

Тоді $|\omega_0 - \xi_0| + |\omega_1 - \xi_1| + |g_2 - \xi_2| + |g_3 - \xi_3| + |\varkappa - \xi_4| > \exp(-\Lambda\, P^3)$, *де* Λ *- деяка ефективна стала.*

Доведення теореми. Припустимо, що для достатньо великого $\lambda \in \mathbf{N}$

$$|\omega_0 - \xi_0| + |\omega_1 - \xi_1| + |g_2 - \xi_2| + |g_3 - \xi_3| + |\varkappa - \xi_4| < \exp(-\lambda^6\, P^3). /2/$$

Позначимо через $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ твірні елементи поля $\mathbf{Q}(\xi_0, \ldots, \xi_4)$,

$$K = \lambda^4 P^2,\ S = \lambda^3 P,\ N = \lambda P,\ L = \lambda^2 P,\ \mathcal{N}_1 = 2\lambda N, \qquad /3/$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{K} \sum_{l=0}^{L} C_{k,l} z^k (\wp(z)\, \mathrm{sn}\, z)^l, \qquad /4/$$

$$C_{k,l} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{k,l,\tau} \zeta_\tau,\ C_{k,l,\tau} \in \mathbf{Z}. \qquad /5/$$

З [2], с.256, [3] та (4) отримаємо

$$f^{(s)}(4pw_0 + 2tw_1 + w_0) = \sum C_{k,l,r}\zeta_r \frac{s!}{s_1!s_2!s_3!}\frac{k!}{(k-s_1)!}\times$$ /6/

$$\times (4pw_0 + w_0 + 2tw_1)^{k-s_1} P_{l,s_2}(\wp(w_0), 0, \wp''(w_0)) D_{l,s_3}(\varkappa, 1, 0) =$$

$$= B_{s,p,t}(w_0, w_1, g_2, \varkappa, \wp(w_0)).$$

Надалі завжди $s \leq S$; межі для $p, t \in \mathbb{Z}$ будемо вказувати окремо. Розглянемо $f^{(s)}(4pw_0 + 2tw_1 + w_0)$ як $(S+1)(2N+1)^2$ лінійних форм від $n(K+1)(L+1)$ змінних $C_{k,l,r}$. Згідно (3) (6) та принципу Діріхле ([4], с. 18), $C_{k,l,r}$ можна вибрати такими, щоб виконувались умови

$$|f^{(s)}(4pw_0 + 2tw_1 + w_0)| < \exp(-\lambda^5 P^3),$$ /7/

$$0 < \max |C_{k,l,r}| < \exp(n^{-1}\lambda^4 P^3).$$ /8/

Нехай ξ_5 – найближчий до $\wp(w_0)$ корінь рівняння $4v^3 - g_2 v - g_3 = 0$, (див.[9]). Розглянемо $B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)$, $|p|, |t| < 2N_1$, як значення многочленів з алгебраїчними коеффіціентами в алгебраїчній точці. З [2], с. 46, (1), (3), (5), (6) та (8) отримаємо

$$L(B_{s,p,t}) \leq \exp(n^{-1}\lambda^4 P^3 + \lambda^4 P^2 \ln P),$$ /9/

$$|B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)| > \exp(-(n\lambda^4 P^2 \ln P + \lambda^4 P^3)).$$ /10/

Оскільки для $|p|, |t| < 2N_1$ з (1), (3), (6) та (8) отримаемо

$$|f^{(s)}(4pw_0 + 2tw_1 + w_0) - B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)| < \exp(-2^{-1}\lambda^5 P^3),$$ /11/

то з (7) та (11) отримаемо для $|p|, |t| < N$ оцінку

$$|B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)| < \exp(-2^{-1}\lambda^5 P^3).$$ /12/

З (10) та (12) для $|p|, |t| < N$

$$B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5) = 0.$$ /13/

Але тоді з (11) та (13) для $|p|, |t| < N$ отримаемо оцінку

$$|f^{(s)}(4pw_0 + 2tw_1 + w_0)| < \exp(-2^{-1}\lambda^5 P^3).$$ /14/

Покажемо, що (14) виконується для $|p|, |t| < 2N_1$.

ОСНОВНА ЛЕМА. *Нехай* $\overline{N}_q = 2^q N$, $2^q < 2\lambda$. *Якщо (14) виконується для* $|p|,|t| < \overline{N}_q$, *то воно виконується і для* $|p|,|t| < \overline{N}_{q+1}$.

Доведення леми. Нехай $\sigma(z)$ – асоційована з $\wp(z)$ σ–функція,

$$F(z) = f(z)\sigma^{2L}(z)\sigma^{L}(\sqrt{e_1 - e_3}(z + \omega_1)). \qquad /15/$$

Позначимо через r найменше натуральне число, для якого круг радіуса $\frac{r}{2}$ лежить в паралелограмі з вершинами $C(\pm 8\overline{N}_q\omega_0 \pm 4\overline{N}_q\omega_1)$, $C = \max(1, (e_1 - e_3)^{-0.5})$. Тоді з (3), (4), (15), та теореми 3 [5] отримаємо

$$|F(z)|_{|z|\leq R} < \exp(2^{2q}\lambda^4 P^3). \qquad /16/$$

Згідно з теоремою [7], стр.58, та припущення основної леми, отримаємо

$$|F(z)|_{|z|\leq 2r} < \exp(-2^{2q}\lambda^5 P^3). \qquad /17/$$

З теореми [6], стр.78, теореми 4 ([5]) та вибору параметрів для λ^{-1}-околів точок $4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0$, $|p|,|t| < \overline{N}_{q+1}$ отримаємо оцінки

$$|\wp(z)\sigma^2(z)|^L, \quad |\mathrm{sn}\, z\sigma(\sqrt{e_1 - e_3}(z + \omega_1))|^L > \exp(-4^q\lambda^4 P^3). \ /18/$$

З (17) та (18) отримаємо для $|p|,|t| < \overline{N}_{q+1}$

$$|f(z)|_{z\in V_{\lambda^{-1}}(4p\omega_0+2t\omega_1+\omega_0)} < \exp(-2^{2q-1}\lambda^5 P^3). \qquad /19/$$

З (19) для $|p|,|t| < \overline{N}_{q+1}$ отримаємо

$$|B_{s,p,t}(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5)| < \exp(-2^{2q-2}\lambda^5 P^3). \qquad /20/$$

Оцінки (10) та (20) суперечливі, що й доводить основну лему.

Оцінимо $|C_{k,l}|$ зверху за допомогою леми 3 ([8]). Виберемо

$$\alpha_t = (1 + (k+1)(\lambda L)^{-1})((2\omega_0 + \omega_1)(4^{-1})), \ t = 0, \ldots, L,$$

Позначимо $\Delta = \det((\operatorname{sn}\alpha_t\wp(\alpha_t))^l)_{t,l=0,\dots,L}$; $\Delta_{t,l}$ – алгебраїчне доповнення елемента $(\operatorname{sn}\alpha_t\wp(\alpha_t))^l$; $\Delta(t) = \det((4p\omega_0 + 2t\omega_1 + \omega_0 + \alpha_t)^k)$, $\Delta_{h_1,h_2,k}(t)$ – алгебраїчне доповнення елемента $(4h_1\omega_0 + 2h_2\omega_1 + \omega_0 + \alpha_t)^k$. Згідно з лемою в [2], стр. 107,

$$\left|\frac{\Delta_{t,l}}{\Delta}\right| < \exp(\lambda^3 P \ln P), \quad \left|\frac{\Delta_{h_1,h_2,k}(t)}{\Delta(t)}\right| < \exp(\lambda^5 P^2 \ln P),$$

що разом з основною лемою дає

$$|C_{k,l}| < \exp(-\lambda^7 P^3). \qquad /21/$$

Розглянемо в (5) $C_{k,l}$ як значення відповідного многочлена у точці $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Згідно з теоремою [2], стр.46, $|C_{k,l}| > \exp(-\lambda^5 P^3)$. Отримана оцінка суперечить (21), тому $C_{k,l} \equiv 0$, що суперечить (8) і доводить теорему.

Список літератури

1. Маркушевич А.И., Теория аналитических функций. М., 1968, Т.2.
2. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М., 1982. 311 с.
3. Холявка Я.М. Деякі властивості еліптичних функцій Якобі.- Деп.в ДНТБ України. 17.10.1992. N 1677-УК92. 1-13 стр.
4. Гельфонд А.О., Трансцендентные и алгебраические числа. М., 1952. 256с.
5. Холявка Я.М. Деякі властивості еліптичних функцій Якобі.(II).- Деп. в ДНТБ України. 28.10.1993, N 2144-УК93, 1-10 стр.
6. Masser D. Elliptic functions and transcendence // Lect. Notes Math. 1975. Vol.437. P.1–143
7. Reyssat E. Approximation algebrique de nombres lies aux fonctions elliptique et exp // Bull. Soc. Math. France. 1980. N1, P.47–79.
8. Фельдман Н.И., Эллиптический аналог одного неравенства А.О.Гельфонда., Труды Моск. мат. о-ва. 1968, т.18, с.65-76.
9. Холявка Я.М. О совместных приближениях инвариантов эллиптической функции алгебраическими числами.- Диофантовы приближения, ч.2, Изд. МГУ, 1986, с.114-121.