УДК 512.64

В.П. Щедрик

ЗВЕДЕННЯ ОДНОСТОВПЦЕВОЇ МАТРИЦІ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ІЗ ДЕЯКОЇ МАТРИЧНОЇ ГРУПИ ДО ПРОСТІШОГО ВИГЛЯДУ

Нехай R - комутативна область головних ідеалів і A - матриця із $M_n(R)$, яка має канонічну діагональну форму (к.д.ф.) $\Phi = diag(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$, $det\Phi \neq 0$. В.Р. Зеліско [1], досліджуючи перетворюючі матриці, які зводять матрицю A до її к.д.ф. Φ, вперше розглянув матричну групу G_Φ, яка складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{array}{ccccc} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \ldots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1} & h_{nn} \end{array} \right\|.$$

Подальші дослідження [2,3] показали, що ця група безпосередньо пов'язана з питанням про асоційованість та розкладність матриць на множники. У цьому зв'язку виникла потреба вивчити властивості цієї групи, дослідити її дію на матриці, зокрема на одностовпцеві. Цій проблематиці і присвячена наша стаття.

Нехай $a_1, \ldots, a_k$ набір взаємно простих елементів із R. Надалі нам буде потрібно скористатись деякими властивостями цієї множини елементів.

<u>Властивість 1.</u> У кільці R можна підібрати такі $u_2, \ldots, u_{k-1}$, що

$$(a_1 + u_2a_2 + \ldots + u_{k-1}a_{k-1}, a_k) = 1.$$

Доведення. Нехай спочатку k = 3, тобто

$$(a_1, a_2, a_3) = 1.$$

Тоді шукане u_2, згідно з результатом роботи [4], може бути знайдено з рівності

$$a_3 = u_2 d,$$

де $d = p_1^{t_1} \ldots p_s^{t_s}$, p_i – нерозкладні дільники a_i, i = 1, ... , s, причому $(u_2, a_1) = 1$.

Тепер розглянемо загальний випадок. Нехай

$$(a_2, \ldots, a_{k-1}) = \gamma.$$

Тоді можна відшукати такі $v_2, \ldots, v_{k-1}$, що

$$v_2 a_2 + \ldots + v_{k-1} a_{k-1} = \gamma.$$

Оскільки

$$(a_1, \gamma, a_k) = 1,$$

то тоді, як було показано вище, знайдеться таке r, що

$$(a_1 + r\gamma, a_k) = 1.$$

Отже,

$$(a_1 + (rv_2)a_2 + \ldots + (rv_{k-1})a_{k-1}, a_k) = 1.$$

Тобто $u_i = rv_i$, i = 2, ..., k-1 ■

Властивість 2. У кільці R існують такі $u_1, \ldots, u_k$, що матриця

$$\left\| \begin{matrix} u_k & 0 & \ldots & 0 & 0 & u_{k-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & u_{k-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & u_1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \end{matrix} \right\| = U \qquad (1)$$

є оборотна.

Доведення. Згідно з властивістю 1 у кільці R можна вибрати такі $u_1, \ldots, u_{k-2}$, що

$$(a_k - u_1 a_{k-1} - \ldots - u_{k-2} a_2, a_1) = 1.$$

Розкладемо визначник матриці U по елементах її першого стовпця:

$$\det U = u_k \gamma_{k-1} - u_{k-1} a_1 ,$$

де $\gamma_{k-1} = a_k - u_1 a_{k-1} - \dots - u_{k-2} a_2$. Врахувавши попередню рівність, бачимо, що можна підібрати такі u_{k-1} і u_k при яких $\det U = 1$ ■

Позначимо через G_Φ^i підгрупу групи G_Φ матриць вигляду

$$\left\| \begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & E_{n-i} \end{array} \right\| ,$$

$i = 1, \dots, n$. E_0 - порожня матриця, тобто $G_\Phi^n = G_\Phi$.

<u>Наслідок. Якщо</u>

$$\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_1} a_{k1}, \dots , \frac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}} a_{k.k-1}, a_k \right) = 1,$$

$k \le n$, то у групі G_Φ^k знайдеться матриця в якої k-й рядок буде:

$$\left\| \frac{\varphi_k}{\varphi_1} a_{k1} \ \dots \ \frac{\varphi_k}{\varphi_{k-1}} a_{k.k-1} \ \ a_k \ \ a_{k+1} \dots a_n \right\| = a,$$

де $a_{k+1}, \dots, a_n$ - довільні елементи кільця R.

<u>Доведення.</u> Згідно з властивістю 2 рядок a може бути доповнений до оборотної матриці U вигляду (1). Тоді, очевидно, що матриця

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & \dots & 0 \\ & U & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & a_{k+1} & \dots & a_n \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right\|$$

буде шуканою ■

<u>Властивість 3.</u> Нехай $k \times k$ матриця

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k & * & \dots & * \end{array} \right\| = A$$

є оборотною і $A^{-1} = \| b_{ij} \|_1^k$. Тоді для того, щоб набір елементів

$u_1, \dots, u_k$ задавольняв рівність

$$u_1 a_1 + \dots + u_k a_k = 1 \qquad (2)$$

необхідно і достатньо, щоб радок $\| u_1 \ \dots \ u_k \|$ можна було представити у вигляді

$$\| u_1 \ \dots \ u_k \| = \| 1 \ x_2 \ \dots \ x_k \| A^{-1}, \qquad (3)$$

де x_i - довільні елементи із R.

<u>Доведення. Необхідність.</u> Розглянемо матрицю

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_k \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{Vmatrix} = U.$$

Тоді

$$UA = \begin{Vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_k \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Звідси безпосередньо випливає рівність (3).

<u>Достатність.</u> Якщо маємо рівність (3), то

$$\| u_1 \ \dots \ u_k \| \, \| a_1 \ \dots \ a_k \|^{T} = \| 1 \ x_2 \ \dots \ x_k \| A^{-1} \| a_1 \ \dots \ a_k \|^{T} =$$
$$= \| 1 \ x_2 \ \dots \ x_k \| \, \| 1 \ 0 \ \dots \ 0 \|^{T} = 1.$$

Тобто виконується рівність (2) ■

<u>Властивість 4.</u> Нехай ϕ деякий ненульовий елемент кільця R. Тоді знайдеться такий набір елементів $u_1, \dots, u_k$, що

1) $u_1 a_1 + \dots + u_k a_k = 1$,

ii) $(u_1, \dots, u_i) = 1$,

для довільного фіксованого $2 \le i \le k$,

iii) $(u_i, \phi) = 1$.

<u>Доведення.</u> Доповнимо стовпець $\| a_1 \ \dots \ a_k \|^{T}$ до оборотної матриці

$$\begin{Vmatrix} a_1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_k & * & \dots & * \end{Vmatrix} = A.$$

І нехай $A^{-1} = \| b_{ij} \|_1^k$. Тоді згідно з властивістю 3, довільний набір $u_1, \dots, u_k$, який задовольняє умову 1), отримується так

$$\| u_1 \ \dots \ u_k \| = \| 1 \ x_2 \ \dots \ x_k \| A^{-1},$$

де x_j – довільні елементи із R. Розглянемо матрицю, яка складається з перших i стовпців матриці A^{-1}:

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1i} \\ b_{21} & . & . & . & b_{2i} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{k1} & . & . & . & b_{ki} \end{Vmatrix} = S.$$

Тоді для доведення нашого твердження достатньо показати, що знайдуться такі $x_2, \dots, x_k$, що

$$\| 1 \ x_2 \ \dots \ x_k \| S = \| q_1 \ \dots \ q_i \|,$$

де $(q_1, \dots, q_i) = 1 = (q_i, \psi)$.

Якщо $b_{2i} = \dots = b_{ki} = 0$, то із того, що матриця A^{-1} є оборотною випливає, що $b_{1i} \in U(R)$. Отже, шуканим набором буде $b_{11}, \dots, b_{1i}$. Нехай тепер серед $b_{2i}, \dots, b_{ki}$ є принаймні одне ненульове. І нехай

$$(b_{2i}, \dots, b_{ki}) = \gamma.$$

Тоді в $GL_{k-1}(R)$ знайдеться така матриця D, що

$$D \| b_{2i} \ \dots \ b_{ki} \|^{T} = \| \gamma \ 0 \ \dots \ 0 \|^{T}.$$

Отже,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{Vmatrix} S = \begin{Vmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1.i-1} & b_{1i} \\ c_{21} & . & . & . & c_{2.i-1} & \gamma \\ c_{31} & . & . & . & c_{3.i-1} & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{k1} & . & . & . & c_{k.i-1} & 0 \end{Vmatrix} = S_1.$$

Виділимо підматрицю

$$M = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1.i-1} & b_{1i} \\ c_{21} & \dots & c_{2.i-1} & \gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i1} & \dots & c_{i.i-1} & 0 \end{vmatrix}$$

матриці S_1. Нехай $\det M \in U(R)$. Оскільки $(b_{1i}, \gamma) = 1$ тому і $(b_{1i}, \gamma, \phi) = 1$. Тоді з властивості 1 випливає, що знайдеться таке r для якого

$$(b_{1i} + r\gamma, \phi) = 1.$$

Розглянемо тепер наступну рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix} M = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1.i-1} & b_{1i} + \gamma r \\ c_{21} & \dots & c_{2.i-1} & \gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i1} & \dots & c_{i.i-1} & 0 \end{vmatrix} = M_1.$$

Оскільки $\det M = \det M_1$, тому $(c_{11}, \dots, c_{1.i-1}, b_{1i} + \gamma r) = 1$. Тобто і в цьому випадку ми знайшли шуканий набір: $c_{11}, \dots, c_{1.i-1}, b_{1i} + \gamma r$.

Насамкінець розглянемо випадок коли $\det M \in U(R)$. Легко переконатись, що у цьому разі серед елементів матриці

$$\begin{vmatrix} c_{i+1.1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{i+1.i-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{k.i-1} & 0 \end{vmatrix}$$

можна вибрати принаймні один ненульовий елемент c_{ij}. Тоді маємо рівність $(b_{1i}, \gamma, \phi c_{ij}) = 1$. Знову ж таки у кільці R можна відшукати таке l, що

$$(b_{1i} + l\gamma, \phi c_{ij}) = 1. \tag{4}$$

Розглянемо тепер добуток

$$\begin{Vmatrix} 1 & l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & 1 \end{Vmatrix} S_1 = \begin{Vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1j} & \dots & d_{1.i-1} & d_{1i} \\ c_{21} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2.i-1} & \gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{t1} & \dots & c_{tj} & \dots & c_{t.i-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & \dots & c_{kj} & \dots & c_{k.i-1} & 0 \end{Vmatrix} = S_2,$$

де $d_{1i} = b_{1i} + l\gamma$. З рівності (4) випливає, що $(d_{1j}, c_{tj}, d_{1i}) = 1$, а також

$$(d_{1i}, \phi) = 1. \tag{5}$$

Отже, знайдеться таке m, що

$$(d_{1j} + mc_{tj}, d_{1i}) = 1.$$

Зваживши на рівність (5), приходимо до висновку, що елементи першого рядка матриці

$$\begin{Vmatrix} \overbrace{1 & 0 \dots 0 & m}^{t} & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \quad 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix} S_2 = \begin{Vmatrix} * & \dots & * & d_{1j}+mc_{tj} & * \dots & * & d_{1i} \\ c_{21} & . & . & .c_{2j} & . & . & . & c_{2i-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & . & . & .c_{kj} & . & . & . & c_{ki-1} & 0 \end{Vmatrix}$$

будуть задовольняти усі три вимоги нашого твердження ■

Позначимо $\Phi_i = \mathrm{diag}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} \; \dots \; \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} \quad 1 \; \dots \; 1\right)$, $i = 2, \dots, n$.

<u>Лема.</u> Нехай $H \in G_\Phi$ і A – довільна $n \times m$ матриця. Тоді маємо таку еквівалентність:

$$\Phi_i A \sim \Phi_i HA,$$

$i = 2, \dots, n$.

<u>Доведення.</u> Розглянемо j-й стовпець матриці H:

$$h_j = \left\| h_{1j} \; \dots \; h_{jj} \quad \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} h_{j+1.j} \; \dots \; \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^T.$$

Тоді $\Phi_i h_j = \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_1} h_{1j} \ \dots \ \frac{\varphi_i}{\varphi_{j-1}} h_{j-1.j} \ \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{jj} \ \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{j+1.j} \dots \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{ij}\right.$

$$\left. \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_j} h_{i+1.j} \ \dots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^{\mathsf{T}} = \frac{\varphi_i}{\varphi_j} \left\| \frac{\varphi_j}{\varphi_1} h_{1j} \ \dots \ \frac{\varphi_j}{\varphi_{j-1}} h_{j-1.j} \right.$$

$$\left. h_{jj} \ \dots \ h_{ij} \ \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} h_{i+1.j} \ \dots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_i} h_{nj} \right\|^{\mathsf{T}}.$$

Отже, маємо рівність

$$\Phi_i H = K\Phi_i ,$$

$i = 2, \dots, n$, де матриця K є частка від ділення справа матриці $\Phi_i H$ на Φ_i. З цієї рівності випливає, що

$$\det K\Phi_i = \det\Phi_i \det H.$$

Оскільки $\det H \in U(R)$, то приходимо до висновку, що $K \in GL_n(R)$. Це означає, що є справедливою така еквівалентність

$$\Phi_i HA = K\Phi_i A \sim \Phi_i A \ \blacksquare$$

<u>Теорема.</u> Якщо $a_1, \dots, a_n$ – взаємно прості елементи із R і

$$\Phi_i \| a_1 \ \dots \ a_n \|^{\mathsf{T}} \sim \| \delta_i \ 0 \ \dots \ 0 \|^{\mathsf{T}},$$

$i = 2, \dots, n$, то у групі G_Φ знайдеться така матриця H, що

$$H \| a_1 \ \dots \ a_n \|^{\mathsf{T}} = \| * \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n \|^{\mathsf{T}},$$

де $\delta_{i+1} = \delta_i d_{i+1.i}$, причому $d_{i+1.i} \mid \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}$, $i = 1, \dots, n-1$.

<u>Доведення.</u> Із властивості 4 випливає, що в R можна вибрати такі $u_1, \dots, u_n$, що

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_1 a_1 + \dots + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n-1} a_{n-1} + u_n a_n = \delta_n ,$$

причому

$$\left(u_n , \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \right) = 1.$$

З останньої рівності випливає, що

$$\left(u_n, \frac{\varphi_n}{\varphi_j} \right) = 1,$$

$j = 1, \ldots, n-1$. Тому

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1, \ \ldots \ , \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1}, u_n\right) = 1.$$

Тоді з наслідку випливає, що в групі G_Φ знайдеться така матриця H_n, яка матиме своїм n-тим рядком рядок

$$\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_1 \ \ldots \ \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n-1} \ \ u_n \right\|.$$

Отже,

$$H_n \| a_1 \ \ldots \ a_n \|^T = \| \ b_1 \ \ldots \ b_{n-1} \ \ \delta_n \ \|^T.$$

Із леми отримуємо таку еквівалентність

$$\Phi_{n-1} H_n \| a_1 \ \ldots \ a_n \|^T \sim \| \ \delta_{n-1} \ \ 0 \ \ \ldots \ 0 \ \|^T.$$

Використовуючи знову властивість 4 і наслідок, будуємо таку матрицю $H_{n-1} \in G_\Phi^{n-1}$ для рядка $\| \ b_1 \ \ldots \ b_{n-1} \ \ \delta_n \ \|^T$, що

$$H_{n-1} H_n \| a_1 \ \ldots \ a_n \|^T \sim \| \ d_1 \ \ldots \ d_{n-2} \ \ \delta_{n-1} \ \ \delta_n \ \|^T.$$

Продовжуючи описаний процес, на $(n-1)$-у кроці отримаємо таку матри що $H = H_2 \ \ldots \ H_n \in G_\Phi$, що

$$H \| a_1 \ \ldots \ a_n \|^T = \| \ * \ \ \delta_2 \ \ldots \ \delta_n \|^T.$$

Обчислимо тепер δ_{i+1}:

$$\delta_{i+1} = \left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}a_1, \ \ldots \ , \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}a_i, a_{i+1}, \ \ldots, a_n\right) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}a_1, \ \ldots \ , \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}a_{i-1}, a_i\right), a_{i+1}, \ \ldots, a_n\right) =$$

$$= \delta_i \left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \frac{a_{i+1}}{\delta_i}, \ \ldots, \frac{a_n}{\delta_i}\right) = \delta_i d_{i+1.i}.$$

Отже, $\delta_{i+1} = \delta_i d_{i+1.i}$, де $d_{i+1.i} \mid \dfrac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}$, $i = 1, \ \ldots, n-1$ ■

Список літератури

1. Зелиско В.Р. О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.- мех. поля. 1990. № 12. С. 14 - 21.
2. Щедрик В.П. Про факторизацію матричних многочленів // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1989. № 10. С. 41 - 43.
3. Щедрик В.П. О разложении матричных многочленов на множители. - Львов, 1990. 22 с. (Препринт АН УССР. Ин- т прикл. пробл. мех. и мат.; № 22 - 90).
4. Helmer O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. Vol.49 P. 236 - 255.